

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROJETO DE GRADUAÇÃO**

ABRAÃO LEMOS CALDAS FROSSARD

**SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM
BARRAS VISCOELÁSTICAS**

**VITÓRIA
2014**

ABRAÃO LEMOS CALDAS FROSSARD

**SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM
BARRAS VISCOELÁSTICAS**

Projeto de graduação apresentado ao
Corpo Docente do Departamento de
Engenharia Mecânica do Centro
Tecnológico da Universidade Federal do
Espírito Santo, como requisito parcial
para obtenção do grau de Engenheiro
Mecânico.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Friedrich
Loeffler Neto

VITÓRIA

2014

ABRAÃO LEMOS CALDAS FROSSARD

**SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM
BARRAS VISCOELÁSTICAS**

Projeto de graduação apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do grau de Engenheiro Mecânico.

Aprovado em ____ de _____ de ____.

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Orientador

Prof. Dr. Antônio Bento Filho
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Examinador

Prof. Dr. Fernando César Meira Menandro
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Examinador

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela saúde e força para superar as dificuldades.

Aos meus pais pelo apoio e torcida.

Aos irmãos e amigos pela cumplicidade.

Ao Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler, pela orientação, apoio e confiança.

RESUMO

Normalmente nos projetos rotineiros de engenharia costuma-se trabalhar com materiais que apresentam um comportamento mecânico constitutivo independente do tempo. No entanto, com a evolução dos materiais e a inclusão de polímeros dentre os materiais usados na construção em engenharia, tornou-se importante incluir o efeito da dependência do tempo no comportamento destes materiais quando submetidos a uma dada carga. Entre os muitos efeitos, encontram-se os efeitos viscosos de relaxação, fluência e deslizamento. Por outro lado, muitos problemas da engenharia moderna envolvem carregamentos dinâmicos, de modo que os modelos matemáticos resultantes são complexos por acoplar simultaneamente o caráter dependente do tempo da resposta e do material constitutivo. Para resolvê-los, métodos numéricos discretos têm sido desenvolvidos, com formulações específicas para a sua abordagem, o que requer soluções analíticas para melhor aferição da qualidade de seus resultados. Com o intuito de gerar tais soluções de referência, este trabalho apresenta a solução analítica de uma barra visco elástica engastada submetida a uma solitação concentrada em seu extremo livre, através do tradicional Método de Separação de Variáveis.

Palavras-Chave: *Materiais visco elásticos, Método de Separação de Variáveis, Soluções Analíticas de Referência*

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Mola, componente utilizado para representar material que não apresenta variação de deformação com o tempo.....	10
Figura 2 - Representação gráfica da Lei de Hooke, variação linear da deformação com a força sem dependência de tempo.....	11
Figura 3 - Componentes feitos em material metálico.....	11
Figura 4 - Comportamento de Fluência, deformação aumenta no tempo com tensão mantida constante.....	12
Figura 5 - Comportamento de Recuperação, com a remoção instantânea parcial ou total da carga a deformação decrescerá com tempo.....	13
Figura 6 - Comportamento de Relaxamento, decréscimo de tensão com deformação mantida constante.....	13
Figura 7 – Efeitos de taxa, tendo como entrada (I) um aumento na taxa de tensão ou deformação se terá com resposta (R) um aumento na taxa de deformação ou na taxa de tensão.	14
Figura 8 – Dependência linear do tempo de um sólido viscoso (a), (b) gráfico de força-deslocamento-tempo, (c) gráfico tensão-deformação.	15
Figura 9 – Modelo de Maxwell e o comportamento a Tensão X Deformação.	17
Figura 10 – Relaxamento de tensão para o modelo de Maxwell	19
Figura 11 – Influência do comportamento tensão x deformação em função da taxa de tensão para o modelo de Maxwell	21
Figura 12 - Influência do comportamento tensão x deformação em função da taxa de deformação para o modelo de Maxwell	21
Figura 13 – (a) Modelo de Voigt, (b) comportamento tensão X deformação X tempo, (c) comportamento de fluência e recuperação.....	23
Figura 14 – Efeito de taxa de deformação no comportamento tensão X deformação para o modelo de Voigt.....	26
Figura 15 – Efeito da taxa de tensão no comportamento tensão x deformação de um modelo de Voigt.....	26
Figura 16 – Modelo de três componentes, (b) comportamento $\sigma \times \epsilon$	27
Figura 17 – Modelo de quatro componentes, (b) comportamento tensão x deformação x tempo, (c) fluência e recuperação.....	30

Figura 18 - Modelo de Maxwell com mola auxiliar.	38
Figura 19 - Modelo de Voigt com mola auxiliar em série.	38
Figura 20 - Modelo adaptado de Maxwell, carregamento e propriedades dos componentes.	39
Figura 21 - Carregamento do Modelo adaptado de Voigt.....	40
Figura 22 - Barra engastada solicitada pela carga P.	46
Figura 23 - Gráfico Deformação x tempo, resultado da aplicação das propriedades na equação (115).....	57
Figura 24 – Resultado obtido em [3] para o deslocamento na direção x, a solução analítica é a curva em preto, bem próxima a vermelha.	57
Figura 25 - Gráfico Deformação x tempo, resultado da aplicação das propriedades na equação (115) impondo um τ de 4 1/s.....	58

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	10
	VISCOELÁSTICIDADE	10
2.1	COMPONENTE ELÁSTICO ¹	10
2.2	COMPORTAMENTO TEMPORAL	12
2.2.1	FLUÊNCIA.....	12
2.2.2	RECUPERAÇÃO.....	13
2.2.3	RELAXAMENTO	13
2.2.4	EFEITOS DE TAXA.....	14
2.3	COMPONENTE VISCOSO	14
2.4	MODELOS PROPOSTOS.....	16
2.4.1	MODELO DE MAXWELL	17
2.4.2	MODELO DE VOIGT OU KELVIN.....	22
2.4.3	MODELO COM TRÊS COMPONENTES.....	27
2.4.4	MODELO DE QUATRO COMPONENTES.....	30
2.5	ANALISE DINÂMICA EM SÓLIDOS VISCOELÁSTICOS.....	32
2.6	O COMPORTAMENTO DOS SÓLIDOS.....	32
2.7	O PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO	36
2.8	PROPAGAÇÃO DE ONDAS DE TENSÃO EM UM SÓLIDO VISCOELÁSTICO	41
2.9	MÉTODO DA SEPARAÇÃO DAS VARIÁVEIS [1].....	42
2.10	VIBRAÇÕES LIVRES COM AMORTECIMENTO VISCOSO [8].....	42
2.11	PROPRIEDADE DE INTEGRAIS COM PRODUTOS DE SENOS E COSSENOS [5].....	43
3	MODELAGEM MATEMÁTICA.....	44
3.1	DETERMINANDO TERMO DE ADAPTAÇÃO DO MÉTODO	46
3.2	APLICANDO O MÉTODO DA SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS	48
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	56
5	CONCLUSÃO	59
6	SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS	60
7	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	61

INTRODUÇÃO

O estudo e utilização de polímeros como material de construção mecânica ainda possui relativamente pouca aplicação em engenharia. Entre as razões que podem ser justificadas, existe a questão da complexidade do modelo matemático e também o fato de não haver ainda uma formação cultural sobre suas propriedades e vantagens funcionais, pois são mais leves, tem boa absorção de impacto e fácil maleabilidade.

Nesse estudo, busca-se mostrar a utilização do modelo viscoelástico de Maxwell adaptado para montar uma equação característica voltada a materiais que apresentam esse comportamento e possuem cargas dinâmicas aplicadas, visto que a engenharia moderna, sobretudo a mecânica, trabalha usualmente com equipamentos rotativos de alta velocidade nos quais atuam cargas dinâmicas significativas.

A solução apresentada no texto é um exemplo de uma barra polimérica solicitada por uma carga concentrada em seu extremo livre, que é um problema simples, mas elucidativo, das particularidades que cercam a modelagem matemática destes materiais.

1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

VISCOELÁSTICIDADE

1.1 COMPONENTE ELÁSTICO¹

A facilidade de obtenção e de conformação fez com que os materiais metálicos sejam os mais utilizados pela engenharia atualmente. A formulação matemática que descreve o comportamento desse tipo material é relativamente simples, pois em geral não apresenta variação do comportamento mecânico com o tempo.

Normalmente trabalha-se com materiais apenas na parte em que não ocorre deformação permanente e nessa zona o material metálico tem comportamento semelhante a uma mola (figura 1). E seu comportamento pode ser descrito pela lei de Hooke

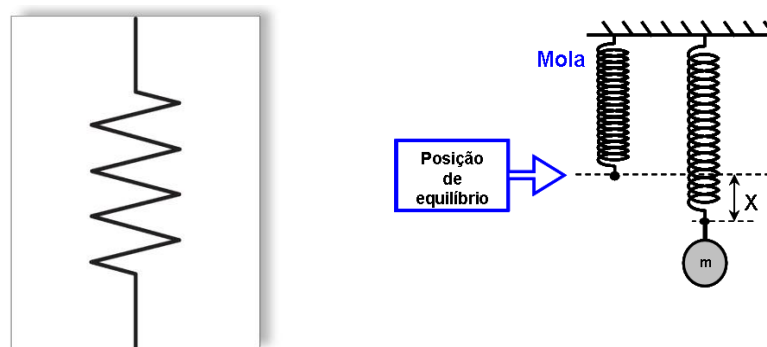


Figura 1 - Mola, componente utilizado para representar material que não apresenta variação de deformação com o tempo.

$$F = K * x \quad (1)$$

onde F é a força, K é a constante elástica da mola e x é o deslocamento. Graficamente, esse comportamento pode ser visto abaixo na figura 2:

¹ Os conteúdos e figuras apresentados na seção que se encerra em ² é prioritariamente baseado na referência [6].

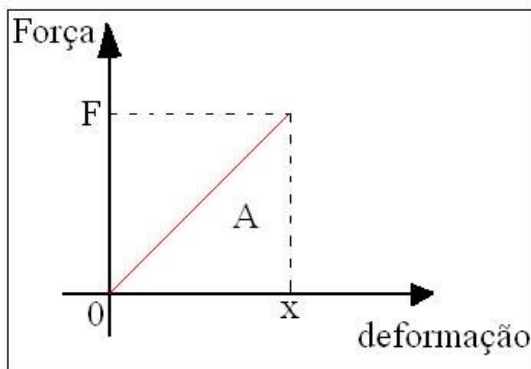


Figura 2 - Representação gráfica da Lei de Hooke, variação linear da deformação com a força sem dependência de tempo.

Como dito anteriormente, esse comportamento será independente do tempo. Ao se retirar a tensão o material voltará à forma inicial instantaneamente. Com o domínio desse tipo de conhecimento foi possível criar diversos objetos e componentes como o mostrado na figura 3:



Figura 3 - Componentes feitos em material metálico.

A necessidade de desenvolver projetos competitivos faz com que cada vez mais se procure por materiais que apresente: menor densidade; maior absorção de impacto; maior estabilidade química; maior facilidade de fabricação, entre outros. A busca por materiais que satisfaçam essas exigências vem incentivando o trabalho e criação de novos materiais, como os polímeros.

Esses materiais podem ser considerados inovadores e estão sendo predominantemente utilizado quando o constituinte não é solicitado mecanicamente.

Isso porque esse tipo de material apresenta uma variação da deformação com o tempo quando se aplica uma carga. Uma parcela desse comportamento pode ser comparado a resposta viscosa de um fluido quando cisalhado.

1.2 COMPORTAMENTO TEMPORAL

O desenvolvimento de uma relação constitutiva aceitável para esses sólidos com dependência do tempo, deve satisfazer a alguns fatores observados na prática, tais como:

1.2.1 FLUÊNCIA

Pode ser definida como um aumento na deformação ao longo do tempo com uma carga mantida constante. Uma descrição do comportamento de forma completa demonstra que a deformação aumenta com o tempo a uma taxa decrescente, seguido por uma taxa constante e, por fim, um aumento da taxa. Como pode ser observado na figura 4.

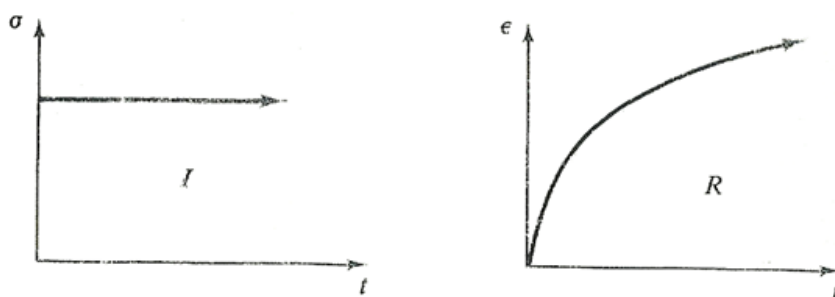


Figura 4 - Comportamento de Fluência, deformação aumenta no tempo com tensão mantida constante.

1.2.2 RECUPERAÇÃO

O alívio total ou parcial da carga deve resultar na diminuição da deformação com o decorrer do tempo. Esse efeito também vem sendo chamado de inelásticidade, anelásticidade, entre outros. O comportamento é explicado graficamente na figura 5.

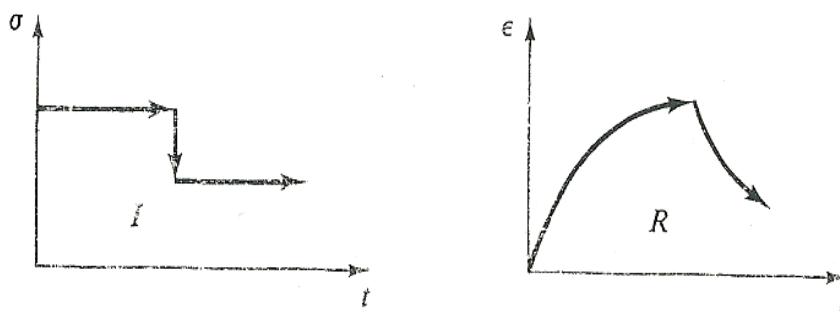


Figura 5 - Comportamento de Recuperação, com a remoção instantânea parcial ou total da carga a deformação decrescerá com tempo.

1.2.3 RELAXAMENTO

Ao se deformar uma amostra, caso essa deformação seja mantida constante, será observado um decréscimo da tensão com o tempo, como mostrado a seguir na figura 6:

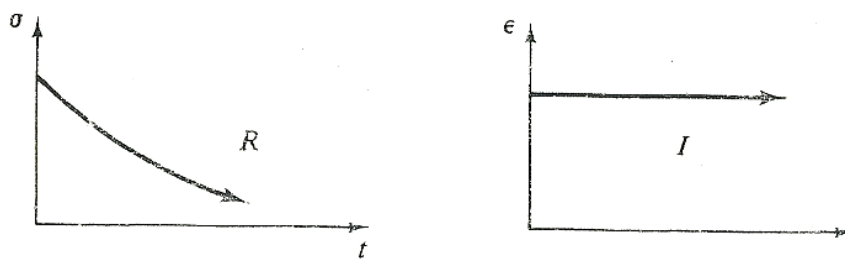


Figura 6 - Comportamento de Relaxamento, decréscimo de tensão com deformação mantida constante.

1.2.4 EFEITOS DE TAXA

Caso seja mantida constante uma taxa de tensão ou deformação, obtêm-se um aumento na taxa de deformação ou na taxa de tensão, respectivamente.

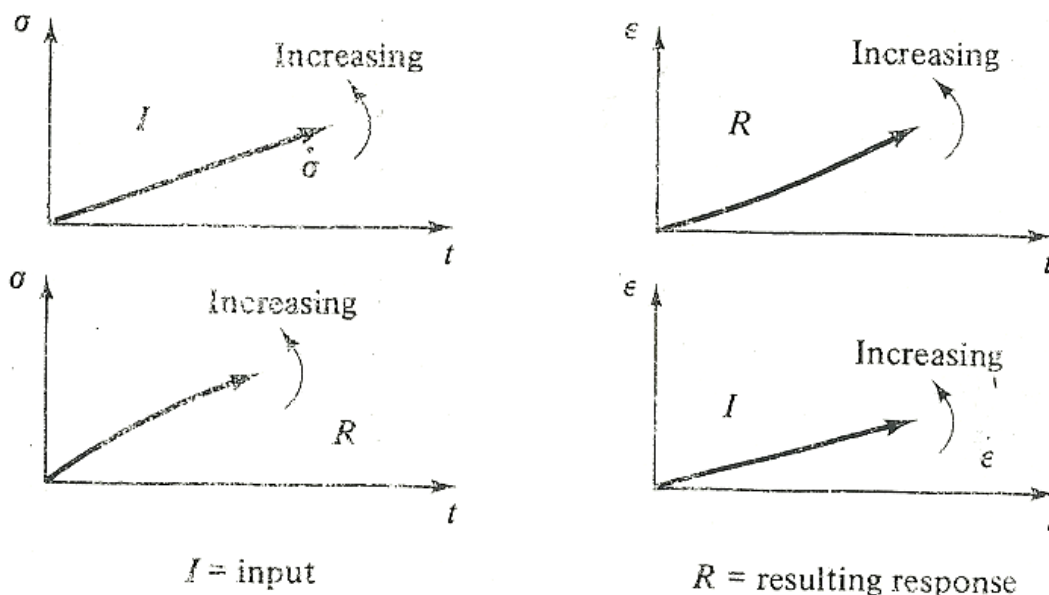


Figura 7 – Efeitos de taxa, tendo como entrada (I) um aumento na taxa de tensão ou deformação se terá com resposta (R) um aumento na taxa de deformação ou na taxa de tensão.

1.3 COMPONENTE VISCOSO

Os diferentes efeitos anteriormente citados satisfazem a resultados observados na prática, pelo menos de forma qualitativa. Uma sensação física razoável pode ser desenvolvida para mecânica utilizando componentes básicos para proporcionar relações constitutivas de um comportamento viscoelástico.

Esse comportamento temporal é observado também em metais, porém em polímeros eles ocorrem em temperatura ambiente e em um tempo relativamente curto, já para metais esse comportamento só será notado se os testes forem feitos em magnitude adequada. O nível de estudo apresentado nesse texto considera apenas o comportamento geral macroscópico envolvendo a deformação viscosa. Na figura 8 é apresentado o modelo simples que descreve o efeito viscoso:

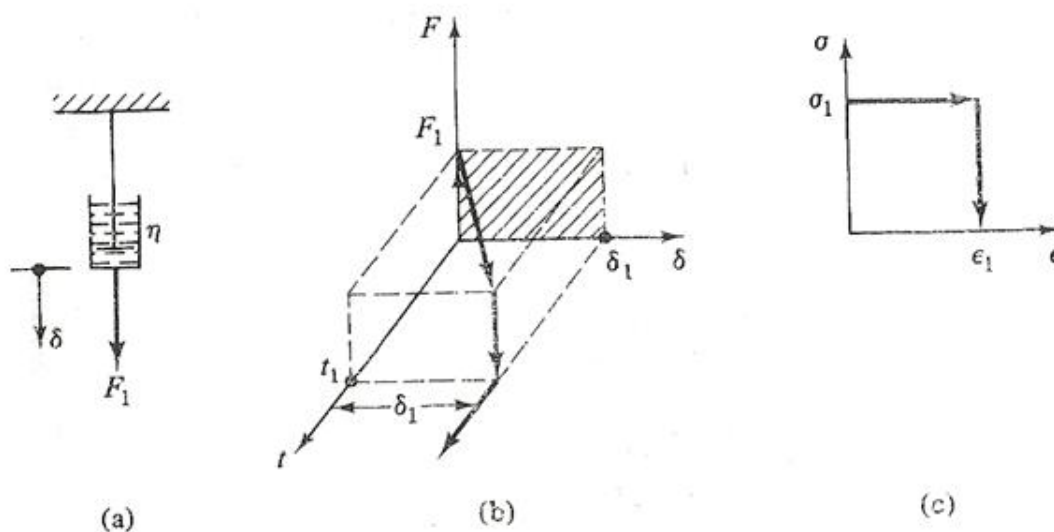


Figura 8 – Dependência linear do tempo de um sólido viscoso (a), (b) gráfico de força-deslocamento-tempo, (c) gráfico tensão-deformação.

Seria interessante uma visão completa do fenômeno, discutindo uma deformação visco-elástica-plástica, porém a maioria das fontes limita-se a discussões apenas dos efeitos viscoelásticos, o que é satisfatório se o objetivo é apenas discutir a zona de projeto. Por muitas vezes o termo viscoelástico é definido para uma deformação que retorna completamente com o tempo, o que não é o conceito seguido nessa parte inicial, que se trata de um tratamento “estático”.

Como dito anteriormente a mola é utilizada para modelar os efeitos elásticos. No caso do comportamento viscoso utiliza-se um amortecedor simples para representação, como mostrado na figura 8, assim deve-se considerar:

- O amortecedor compreende um fluido perfeitamente viscoso e a taxa de extensão ou taxa de deformação é diretamente proporcional à carga. Assim:

$$F = \eta \dot{\delta} \quad (2)$$

onde η é vista como uma propriedade do material.

- Com uma aplicação súbita da carga, F_1 , o amortecedor atua como um corpo rígido e nenhuma extensão imediata tem lugar no tempo zero. À medida que a força é mantida, uma extensão linear de tal modo que resulta:

$$\delta = \frac{F_1 t_1}{\eta} \quad (3)$$

após o tempo t_1 .

- Ao remove-se a carga verifica-se uma extensão permanente, δ_1 , mantendo-se assim toda a energia de entrada (área sombreada) é dissipada durante a deformação, não sendo recuperado. Similarmente a deformação plástica notada em metais, mas é importante ressaltar que estes tipos de deformação irreversível são devidos a causas diferentes.

1.4 MODELOS PROPOSTOS

Utilizando o amortecedor e a mola em várias combinações, obtêm-se uma melhor interpretação dos resultados reais do comportamento. Nas próximas abordagens a simbologia F - δ - t será substituído por σ - ϵ - t (tensão-deformação-tempo) que são de maior preocupação, essa substituição pode ser feita sem perda de generalidade.

O comportamento de uma mola é dado por:

$$\sigma = E\epsilon \quad (4)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material, no caso do material viscoelástico essa constante não precisa ser equivalente ao módulo de elasticidade de uma única mola.

As equações (2) e (3) podem ser escritas da seguinte forma:

$$\sigma = \eta\epsilon \quad (5)$$

e

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1 t_1}{\eta} \quad (6)$$

onde η é uma constante de “viscosidade” do material.

1.4.1 MODELO DE MAXWELL

Este modelo é propõe que o comportamento pode ser representado por uma mola e um amortecedor em série, como mostrado na figura 9.

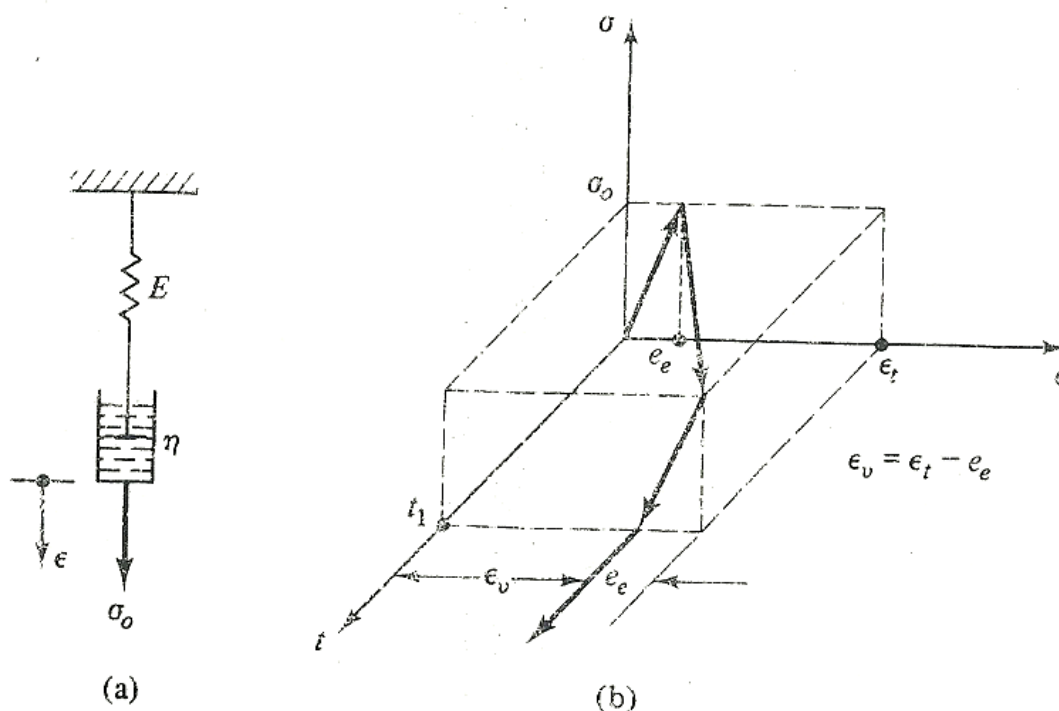


Figura 9 – Modelo de Maxwell e o comportamento a Tensão X Deformação.

Para conseguir uma representação teórica satisfatória é pertinente fazer as seguintes considerações:

- Ao se aplicar uma carga σ_0 , uma deformação elástica imediata ocorrerá devido à mola, essa energia ficará armazenada e é recuperável.
- Ambas as equações (4) e (5) são lineares podendo-se utilizar o princípio da superposição, assim o comportamento do amortecedor e da mola podem ser diretamente somadas.
- Após o tempo (t_1), uma deformação viscosa (ϵ_v) é adicionada a deformação elástica (e_e). A tensão aplicada é comum a ambos os elementos.
- A remoção completa de σ_0 levará a recuperação elástica de (e_e), mas uma deformação permanente continuará (ϵ_v).

Uma relação constitutiva pode ser desenvolvida para a deformação total, em um tempo t_1 :

$$\epsilon_t = e_e + \epsilon_v = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0 t_1}{\eta} \quad (7)$$

onde ϵ_t é a deformação total.

Em termos de taxas, $\epsilon_t = e_e + \epsilon_v$ e utilizando as equações (4) e (6). para uma tensão uniaxial, têm-se:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (8)$$

para determinar a adequação do modelo, cada um dos requisitos básicos dos itens de (3.2.1) a (3.2.4) serão examinados:

1.4.1.1 FLUÊNCIA

Com a aplicação da carga constante σ_0 observa-se uma deformação instantânea, e_e , seguida de uma deformação que cresce linearmente com o tempo. Um termo utilizado neste contexto é o comprimento de fluência, que é função do tempo. Pode ser representado como:

$$J(t) = \frac{\epsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{1}{E} \left(1 + \frac{Et}{\eta} \right) \quad (9)$$

A equação indica que a deformação, em qualquer tempo é proporcional à tensão constante é regulado pelo termo η/E , esta relação é chamada de tempo de relaxamento e é definido como $\tau = \eta/E$. O comportamento de fluência do sólido de Maxwell não é totalmente realista, uma vez que não evidencia a taxa de redução habitual da deformação com o tempo, tal como observado com sólidos reais.

1.4.1.2 RECUPERAÇÃO

O item indica que o sólido após a remoção completa da carga, teria uma parcela de recuperação imediata e depois de um tempo o restante de deformação iria se recuperando também, Porém independente do tempo à deformação do

componente viscoso é irreversível. Logo o sólido de Maxwell não apresentará recuperação, não sendo necessária a realização de mais considerações.

1.4.1.3 RELAXAMENTO

Nesse componente, considere que uma deformação constante (e_0) seja induzida. Imediatamente o componente elástico será o responsável pela deformação, com o tempo o componente viscoso se deformará “aliviando” a mola e mantendo a deformação constante, deste modo, a tensão diminuirá. A figura 10 apresenta um gráfico desse comportamento, como em qualquer momento a deformação é constante a taxa de deformação é zero.

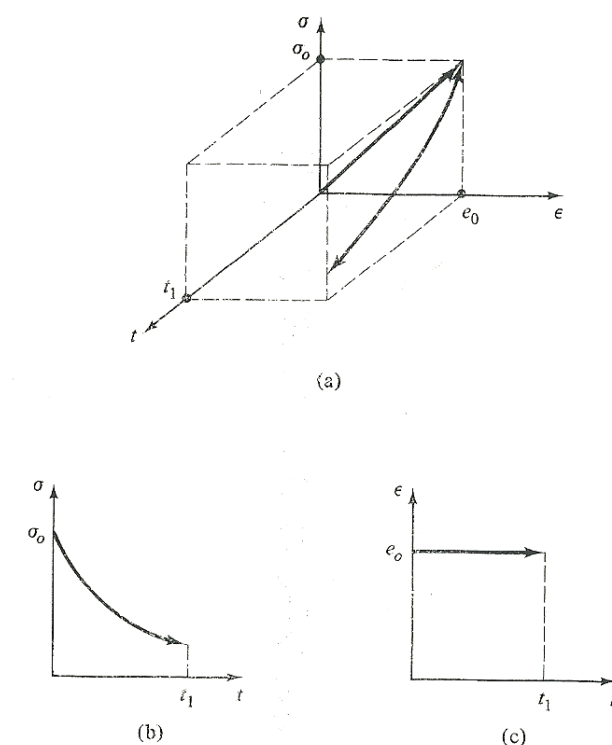


Figura 10 – Relaxamento de tensão para o modelo de Maxwell

A equação (8) pode ser resolvida de acordo com essas constatações, note que a tensão inicial (σ_0) deve ser igual a $E \cdot e_0$ no tempo zero. Utilizando esse valor inicial:

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{E}{\eta} dt$$

Então

$$\ln \sigma = -\frac{Et}{\eta} + C_1 \quad \text{onde } C_1 = \ln \sigma_0 \quad (10)$$

Assim

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{Et}{\eta}\right) = \sigma_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Ou

$$\sigma = e_0 E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (11)$$

aqui, o módulo de relaxamento, que é a taxa de tensão em um determinado tempo para uma deformação constante, é denotado $E_r(t)$ onde:

$$E_r(t) = \frac{\sigma(t)}{e_0} = E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (12)$$

este comportamento permite a visualização qualitativa razoável de relaxamento.

1.4.1.4 EFEITOS DA TAXA

Inicialmente, considere uma taxa constante de aplicação de tensão, ou seja, na equação (8) $d\sigma/dt = A$. Então $\sigma = A \cdot t$ uma vez que σ seja zero no tempo zero.

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{A}{E} + \frac{At}{\eta} \quad (13)$$

A solução de (13) é:

$$\epsilon = \frac{At}{E} + \frac{At^2}{2\eta} \quad \text{desde } \epsilon = 0 \text{ e } t = 0 \quad (14)$$

um aumento em A faz com que a deformação aumente de forma não linear, como mostrado na figura abaixo.

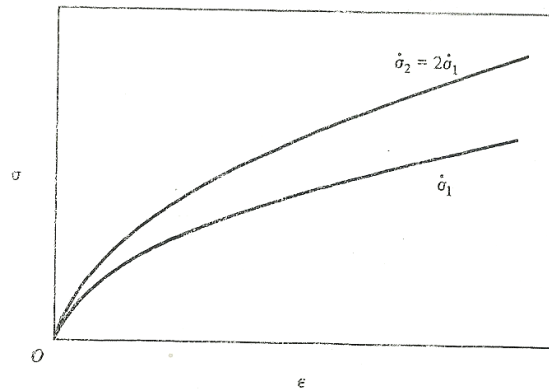


Figura 11 – Influência do comportamento tensão x deformação em função da taxa de tensão para o modelo de Maxwell

Para taxas constantes de deformação, D , a equação (8) torna-se:

$$D = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (15)$$

rearranjando e usando o fator de integração $\exp(Et/\eta)$ tem-se:

$$\sigma = \eta D \left(1 - \exp -\frac{t}{\tau} \right) \quad (16)$$

desde que tensão seja nula no tempo zero e $\tau = \eta/E$. Isso também levanta a curva tensão X deformação, com taxas mais altas, mas a tensão tem comportamento assintótico depois de um tempo assim como a deformação, esse comportamento pode ser visto na figura 12.

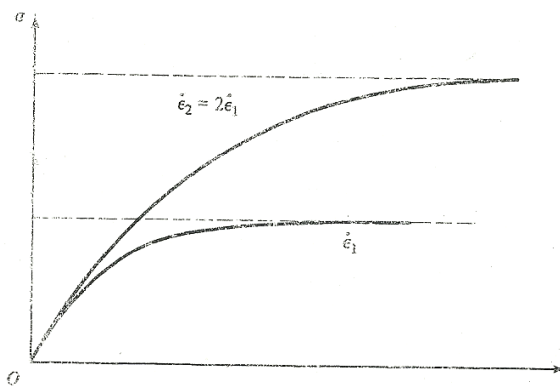


Figura 12 - Influência do comportamento tensão x deformação em função da taxa de deformação para o modelo de Maxwell

1.4.2 MODELO DE VOIGT OU KELVIN

Modelo formado por uma mola e um amortecedor em paralelo como mostrado na figura 13. Nota-se que:

- Quando uma tensão é aplicada, o amortecedor previne uma extensão instantânea da mola e cada componente suporta uma porção da tensão.
- Com o tempo, o componente viscoso causa uma crescente deformação não linear e, com este modelo, a deformação total é igual a deformação viscosa e elástica.
- Se a tensão é removida, a energia de deformação elástica vai começar a forçar o movimento do componente viscoso e a recuperação mostra um comportamento não linear no tempo.

Uma relação constitutiva para o modelo de Voigt é deduzida pelas relações de tensões de forma que:

$$\sigma_0 = \sigma_e + \sigma_v = Ee + \eta\epsilon_v \quad (17)$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{\sigma}{\eta} - \frac{E}{\eta}\epsilon \quad (18)$$

desde que todas as deformações são iguais e E e η são independentes do tempo. É necessário também considerar os comportamentos previstos, como no caso do modelo de Maxwell.

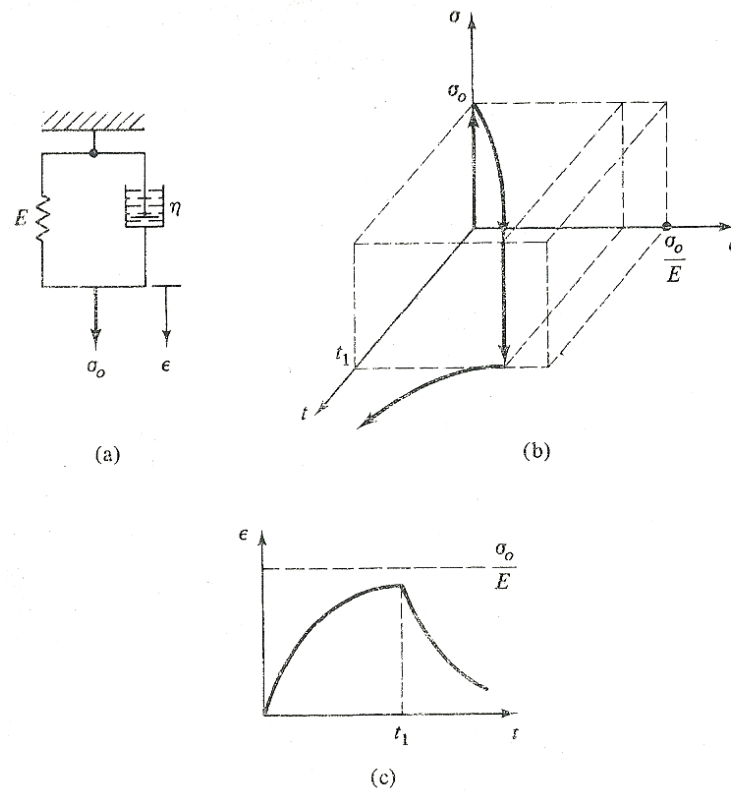


Figura 13 – (a) Modelo de Voigt, (b) comportamento tensão X deformação X tempo, (c) comportamento de fluência e recuperação.

1.4.2.1 FLUÊNCIA

Para uma tensão aplicada, a equação (18) pode ser rearranjada resultando em:

$$d\epsilon + \frac{E}{\eta}\epsilon dt = \frac{\sigma_0}{\eta} dt \quad (19)$$

com E/η sendo $1/\tau$, deformação sendo zero quando $t=0$, e usando o fator de integração $\exp(1/\tau)$, a solução da equação (19) é:

$$\epsilon = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - \exp -\frac{t}{\tau} \right) \quad (20)$$

Em comparação com eq. (9), o comportamento de fluência previsto pelo modelo de Voigt é mais realista, desde que as aproximações de deformação σ_0/E (ou seja, a deformação elástica se nenhum amortecedor estiver presente) como o tempo se

aproxima do infinito e faz isso a uma taxa decrescente. Isto é observado em muitos sólidos durante um estágio inicial de deslizamento. A figura 13 mostra este comportamento.

A função comprimento de fluência para esse modelo é:

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \quad (21)$$

1.4.2.2 RECUPERAÇÃO

Como visto na figura 13 após o tempo t_1 , a remoção da tensão causaria uma aproximação exponencial a zero com a passagem do tempo. Esse comportamento é mais qualitativamente correto do que o encontrado no modelo de Maxwell e pode ser analisado utilizando a seguinte derivação.

A equação (20) mostra que a deformação causada pela tensão é:

$$\epsilon = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \quad \text{para } 0 \leq t \leq t_1$$

se no tempo t_1 , σ_0 é simplesmente reduzido a zero, e expressando a continuação no tempo $t' = t - t_1$ onde t é o tempo total decorrido depois da aplicação de σ_0 , então a equação (19) torna-se:

$$d\epsilon + \frac{\epsilon}{\tau} dt' = 0 \quad \text{para } t \geq t_1 \quad (22)$$

usando o valor inicial que $\epsilon = \epsilon_1$ quando $t' = 0$, a solução da equação (22) é:

$$\epsilon = \epsilon_1 \exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right) \quad (23)$$

substituindo $t - t_1$ por t' e a eq (20) por ϵ_1 no tempo t_1 , a eq (23) reduz a:

$$\epsilon = \frac{\sigma_0}{E} \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad t \geq t_1 \quad (24)$$

note que na eq (24), t tende a t_1 , quando ϵ tende a ϵ_1 , enquanto t tende ao infinito quando ϵ tende a zero.

1.4.2.3 RELAXAMENTO

Com aplicação de uma deformação constante, ϵ_0 , quando $d\epsilon/dt$ é zero a eq (18) mostra que:

$$\sigma_0 = E\epsilon_0 = \text{constante} \quad (25)$$

em essência, os dois componentes são engatados e não existe contração do componente elástico com o tempo como foi evidenciado pelo modelo de Maxwell. Assim, A unidade de Voigt não prevê o relaxamento.

1.4.2.4 EFEITOS DE TAXA

Considerando uma taxa de deformação constante aplicada, $D = d\epsilon/dt$. Usando a eq. (18) onde $\epsilon = D \cdot t$:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = D = \frac{\sigma}{\eta} - \frac{E}{\eta} D t \quad (26)$$

como ϵ é zero no tempo zero:

$$\sigma = E D t + D \eta \quad (27)$$

isto implica numa resposta viscosa inicial, que depende de D , seguido por um crescimento linear elástico da tensão com a deformação. A figura 14 indica o efeito das duas diferentes taxas constantes de deformação no resultado do comportamento σ - ϵ o modelo de Maxwell é mais realista a este respeito.

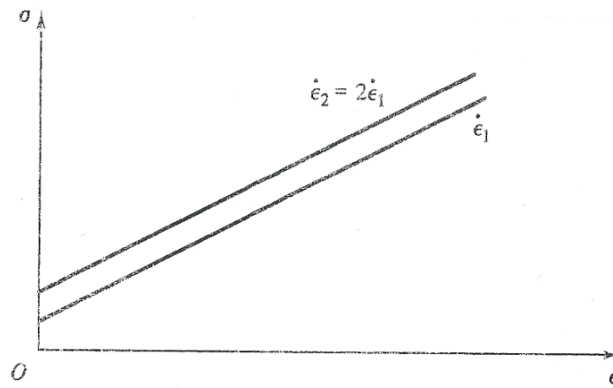


Figura 14 – Efeito de taxa de deformação no comportamento tensão X deformação para o modelo de Voigt

Para a aplicação de uma taxa de tensão constante, $d\sigma/dt = A$, então $\sigma = t \cdot A$ desde que no tempo zero a tensão seja zero. Usando a relação na eq (18):

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{A}{\eta} t - \frac{E}{\eta} \epsilon \quad (28)$$

rearranjando essa equação e utilizando o fator de integração $\exp(t/\tau)$ mais a condição inicial de deformação nula no tempo zero, a solução fica:

$$\epsilon = \frac{A}{E} \left(t - \tau \right) \left(1 - \exp -\frac{t}{\tau} \right) \quad (29)$$

embora um crescimento na taxa de tensão faça com que a curva σ - ϵ cresça, o comportamento é corretamente qualitativo apenas para curtos tempos e pequenas deformações. A figura 15 mostra o resultado geral:

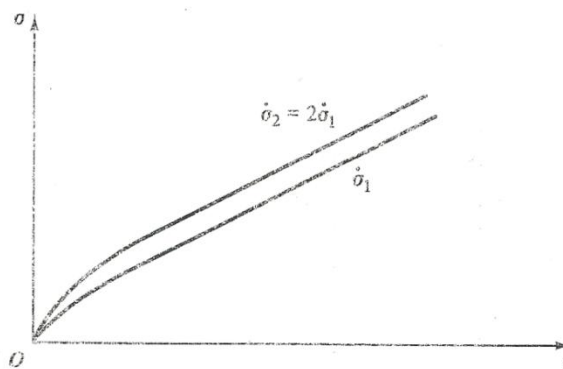


Figura 15 – Efeito da taxa de tensão no comportamento tensão x deformação de um modelo de Voigt.

Logo o modelo de Maxwell apresenta um comportamento razoável de relaxação ao passo que o modelo de Voigt fornece uma melhor descrição para fluência e recuperação. Porém ambos apresentam satisfatórios efeitos de taxa, Maxwell prevê soluções mais aceitáveis para esse requisito. Comportamentos mais realistas são obtidos, se for feita a combinação destes modelos de várias maneiras. Para demonstrar isso serão apresentados dois modelos compostos.

1.4.3 MODELO COM TRÊS COMPONENTES

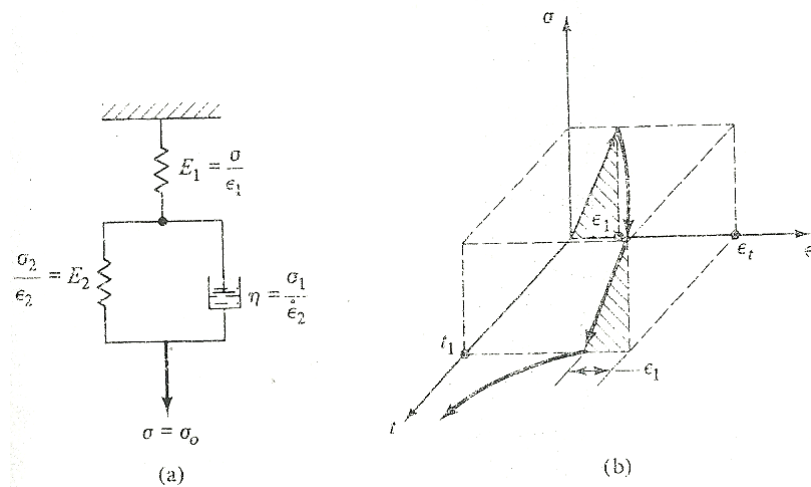


Figura 16 – Modelo de três componentes, (b) comportamento $\sigma \times \epsilon$

Utiliza uma mola em série com um componente de Voigt como mostrado na figura 16, onde as molas tem os módulos E_1 e E_2 , respectivamente. O comportamento geral de carregamento e descarga é mostrado também na figura acima. Para desenvolver um relacionamento constitutivo usam-se duas formas de equação. Primeiro:

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_k \quad (30)$$

onde ϵ , a deformação total é composta pela soma da deformação elástica e da deformação do modelo de Voigt (ϵ_k). Segundo:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (31)$$

onde a tensão aplicada é composta pela parcela da mola individual e pela parcela da porção de Voigt. Colocando a porção da deformação elástica como ϵ_1 e a de Voigt ser ϵ_2 , a equação em taxa torna-se:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{d\epsilon_1}{dt} + \frac{d\epsilon_2}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\epsilon_2}{dt} \quad (32)$$

e a equação (31) pode ser escrita como:

$$\sigma = \eta \frac{d\epsilon_2}{dt} + \epsilon_2 E_2 = \eta \frac{d\epsilon_2}{dt} + E_2 \epsilon - \epsilon_1$$

Ou

$$\frac{d\epsilon_2}{dt} = \frac{1}{\eta} \sigma - E_2 \epsilon + \frac{\sigma E_2}{E_1} \quad (33)$$

combinando as equações (32) e (33) tem-se:

$$\frac{d\epsilon}{dt} + \frac{E_2}{\eta} \epsilon = \frac{1}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \left(1 + \frac{E_2}{E_1} \right) \quad (34)$$

1.4.3.1 FLUÊNCIA

Com derivada de tensão no tempo = 0, e deformação sendo zero no tempo zero, e seguindo procedimentos, tais como aqueles que produziram eq. (21) a função de comprimento fluência é encontrado para ser:

$$J(t) = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \quad (35)$$

onde $\tau = \eta/E_2$. Note que usando a superposição na equação (30), a função comprimento de fluência é achada diretamente, desde que:

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 = \frac{\sigma_0}{E_1} + \frac{\sigma_0}{E_2} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \quad (36)$$

o que equivale a equação (35).

1.4.3.2 RECUPERAÇÃO

A figura indica que a remoção da tensão inicial causará uma recuperação imediata da deformação elástica, com um comportamento subsequente idêntico ao do modelo de Voigt dado pela eq. (24).

1.4.3.3 RELAXAMENTO

Com uma deformação constante aplicada, ϵ_0 , $d\epsilon/dt=0$, e o modulo de relaxamento pode ser achado usando um procedimento similar ao que foi utilizado para achar a eq. (12). Novamente, o tempo será zero, $\sigma=\sigma_0=\epsilon_0 * E_1$. O resultado pode ser expresso como:

$$\sigma_r(t) = E_1 - \frac{E_1^2}{E_1 + E_2} \left(1 - \exp -\frac{t}{\tau} \right) \quad (37)$$

onde $\tau = \eta / (E_1 + E_2)$.

1.4.3.4 EFEITOS DE TAXA

Com uma taxa de tensão constante, $A = d\sigma/dt$, e a tensão é zero no tempo zero, $\sigma=t*A$ para qualquer tempo. Seguindo os procedimentos anteriormente usados, a solução de (24) é:

$$\epsilon = \frac{At}{E_1} + \frac{A}{E_2} \left(t - \tau \left(1 - \exp -\frac{t}{\tau} \right) \right) \quad (38)$$

onde $\tau = \eta/E_2$. Note que o primeiro termo é referente à deformação elástica e é função de tempo enquanto o segundo termo é idêntico ao da equação (29).

A derivação de σ em função do tempo com base na taxa de deformação constante, é obtida de maneira similar.

1.4.4 MODELO DE QUATRO COMPONENTES

Este modelo consiste em uma unidade de Maxwell em série com uma unidade de Voigt como mostrado abaixo, na figura 17, o comportamento gráfico da tensão-deformação-tempo também é mostrado:

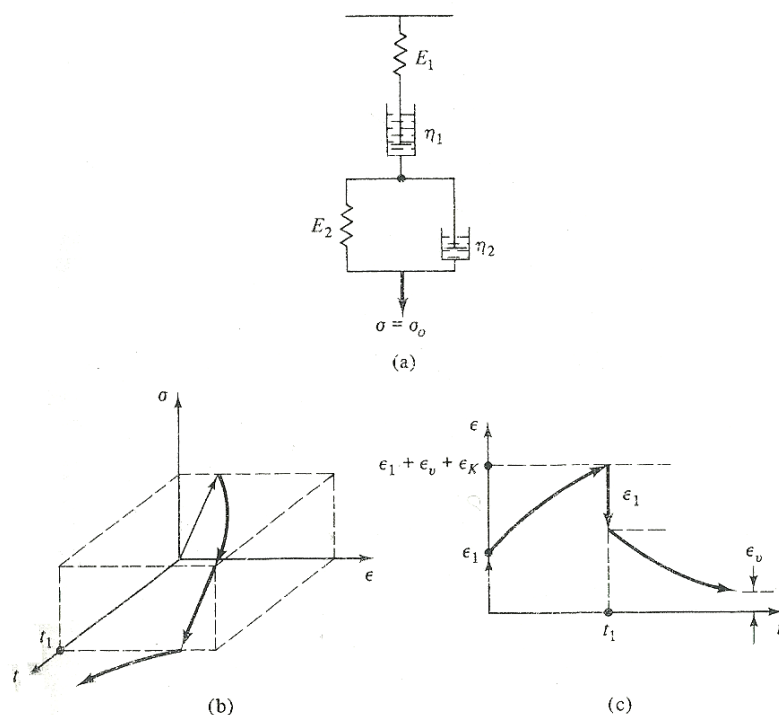


Figura 17 – Modelo de quatro componentes, (b) comportamento tensão x deformação x tempo, (c) fluência e recuperação.

onde E_1 é o módulo de elasticidade da mola de Maxwell, E_2 é o módulo da mola de Voigt e $\tau = \eta / (E_1 + E_2)$.

O comportamento de um sólido viscoelástico pode ser descrito pelo modelo mostrado.

- Com uma carga subitamente aplicada, a mola E_1 , fornece uma deformação elástica instantânea.
- A deformação dependente do tempo e é composta pela deformação viscosa devido à deformação η_1 e pela deformação exibida pela unidade de Voigt (E_2 e η_2).
- A remoção da tensão σ_0 causa uma recuperação elástica instantânea seguida por uma recuperação dependente do tempo que, no limite, se aproxima de uma deformação plástica devido a η_1 .

Em essência, a porção de Maxwell governa os efeitos elásticos, relaxamento e deformação viscosa permanente, enquanto a porção de Voigt controla recuperação. Fluência e efeitos de taxa são influenciados pelos dois; Assim, o espectro completo de resposta do material é mais bem satisfeito quando comparado com cada um dos modelos agindo individualmente. Com o uso da superposição, a deformação total é simplesmente a soma dos componentes individuais e o resultado é:

$$\epsilon = \frac{\sigma_0}{E_1} + \frac{\sigma_0 t}{\eta_1} + \frac{\sigma_0}{E_2} \left(1 - \exp -\frac{t}{\tau} \right) \quad (39)$$

a Figura 17 (c) mostra a combinação dos efeitos.

Tal como acontece com os desenvolvimentos anteriores, as respostas de recuperação, relaxamento, e os efeitos da taxa pode ser determinada utilizando o modelo de quatro componentes. Muitas outras combinações podem ser introduzidas a fim de produzir refinamentos sutis.²

² Os conteúdos e figuras apresentados na seção iniciada em ¹ é prioritariamente baseado na referência [6].

2.5 ANALISE DINÂMICA EM SÓLIDOS VISCOELÁSTICOS.³

A relação entre várias definições de fricção interna é obtida por uma amostra que é exposta a uma força elástica restauradora proporcional ao deslocamento e a uma força de dissipação proporcional a velocidade. A equação do movimento de tal amostra pode ser escrita como:

$$P = M_1 \ddot{\xi} + \eta_1 \dot{\xi} + E_1 \xi \quad (40)$$

onde P é a força impressa e ξ é o deslocamento. O primeiro termo do lado direito é a equação do termo de inércia, M_1 depende da massa e da geometria da amostra; o segundo termo é o de amortecimento, η_1 envolve a taxa entre velocidade e força de amortecimento; o terceiro termo é o elástico, E_1 depende do módulo de elasticidade e o formato da amostra.

2.6 O COMPORTAMENTO DOS SÓLIDOS

A natureza da força dissipativa não foi discutida anteriormente, deve-se considerar que ela depende da frequência, caso seja puramente viscosa. Maxwell, em 1890 propôs que a relação entre a força e a deformação no caso de sólidos era dada por $\sigma = E * \epsilon$, a relação para um sólido real seria mais precisamente:

$$\frac{d\sigma}{dt} = E \frac{d\epsilon}{dt} - \frac{\sigma}{\tau} \quad (41)$$

tais propriedades já foram apresentadas anteriormente.

Quando uma força é aplicada por um tempo pequeno comparado com τ , o comportamento se assemelhará com um sólido elástico, já com um tempo longo de aplicação o comportamento será parecido com um líquido viscoso de viscosidade $E * \tau$. O sólido de Maxwell obedece a equação (41).

³ Os conteúdos e figuras apresentados na secção que será encerrada em ⁴ é prioritariamente baseado na referência [4].

Voigt, em 1892 assumiu que a tensão em sólidos pode ser representada como a soma de dois termos, o primeiro sendo proporcional a deformação e o segundo proporcional a taxa de mudança da deformação. Sendo assim, a equação de tensão em um sólido alotrópico é a soma de termos, sendo seis termos da forma $c_{rs}\epsilon_{ij}$ e seis termos da forma $a_{rs}(\frac{\partial}{\partial t})\epsilon_{ij}$; os coeficientes c são as constantes elásticas do material e os coeficientes a são correspondentes as constantes viscosas. Para um material isotrópico essas constantes são reduzidas as constantes de Lamé, que são denotadas λ' e μ' . As equações serão semelhantes a:

$$\sigma_{xx} = \lambda\Delta + 2\mu\epsilon_{xx} + \lambda'\frac{\partial\Delta}{\partial t} + 2\mu'\frac{\partial\epsilon_{xx}}{\partial t} \quad (42)$$

e

$$\sigma_{yz} = \mu\epsilon_{yz} + \mu'\frac{\partial\epsilon_{yz}}{\partial t}$$

estas equações conduzem a relações semelhantes a obtidas em sólidos com vibração, porém na maioria dos casos conduz a equacionamentos bem complicados. Para sólidos de Voigt a tensão é a soma desses termos. Para uma deformação torsional com apenas cisalhamento envolvido, com duas forças opostas de magnitude C agem na face de um cilindro de comprimento l e raio r e a deformação relativa entre as faces é θ . Para um sólido elástico tem-se:

$$C = \frac{1}{2}\pi\mu r^4\theta/l \quad (43)$$

para um sólido de Voigt, com constante elástica μ e amortecimento μ' :

$$C = \frac{1}{2}\frac{\pi r^4}{l} \mu\theta + \mu'\frac{d\theta}{dt} \quad (44)$$

para simplificar considere um disco de comprimento l e raio r , suspenso por arames. O momento de inercia do disco é muito grande comparado com o do arame. A equação de movimento vibratório de torção fica:

$$I\ddot{\theta} + \frac{\pi r^4}{2l} \mu' \dot{\theta} + \mu \theta = 0 \quad (45)$$

que é semelhante a (40) tendo como:

$$M_1 = I$$

$$E_1 = \frac{\pi r^4 \mu}{2l}$$

$$\eta_1 = \frac{\pi r^4 \mu'}{2l}$$

Para extensão uniaxial de uma haste, a razão entre a tensão e a deformação é dada pela modulo de Young $E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$. Em 1933, Thompson mostrou que para um sólido de Voigt essa relação é dada por:

$$\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx} + E' \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial t} \quad (46)$$

onde E' é aproximadamente

$$\frac{E'}{E} = \frac{\lambda \mu \tau_1 + \frac{3\lambda^2 + 4\lambda\mu + 2\mu^2}{3\lambda + 2\mu} \tau_2}{\lambda + \mu} \quad (47)$$

$$\tau_1 = \frac{\lambda'}{\lambda} \quad \text{e} \quad \tau_2 = \frac{\mu'}{\mu}$$

E' tem sido chamado de “coeficiente normal de viscosidade” por Honda e Konno (1921). Se:

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\mu'}{\mu} = \tau'$$

$$E' = E \tau'.$$

Retornando para o sólido de Maxwell, considere a vibração de uma grande massa M suspensa por uma haste de comprimento l e área de seção transversal A considerando que a inercia da haste é insignificante quando comparada com a da massa. A equação de movimento é:

$$M\ddot{\xi} + A\sigma = 0 \quad (48)$$

a deformação na haste (ϵ) vai ser dada por ξ/l e pela equação (41) assim:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{E}{l} \frac{d\xi}{dt} - \frac{\sigma}{\tau} \quad (49)$$

eliminando σ e $d\sigma/dt$ das equações (48) e (49) obtêm-se:

$$\frac{M}{A} \frac{d^3\xi}{dt^3} + \frac{M}{A\tau} \frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{E^*}{l} \frac{d\xi}{dt} = 0 \quad (50)$$

pode-se integrar para obter:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\xi}{dt} + \frac{E^*A}{Ml} \xi = \text{const} \quad (51)$$

o que é similar a equação (40).

Para ter resultados mais próximos ao real os especialistas utilizam uma série de modelos de Maxwell unidos em paralelos, ou certo número de modelos de Voigt interligados em série. Essa aproximação é válida por apresentar inúmeros tempos

de relaxamento. Esse tratamento é matematicamente equivalente a abordagem feita por Boltzmann, que é apresentada abaixo.

2.7 O PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO

Como dito anteriormente um sólido de Maxwell sofrerá os efeitos do relaxamento no tempo se mantido com uma deformação constante, pela equação (41) pode ser visto que a tensão decai exponencialmente com o tempo na forma $(E \exp -t/\tau)$. Boltzmann (1876) generalizou essa consideração para materiais em que a tensão decai com o tempo. Ele sugere que o comportamento mecânico de uma amostra vai depender do seu histórico, e assume que o comportamento vai depender das deformações e que cada deformação é independente da outra, de modo que o comportamento resultante pode ser achado por uma simples soma. Assume-se que o cisalhamento e a dilatação causam deformações diferentes. A análise para extensão uniaxial em que ambas estão envolvidas é muito complexa, porém a análise para deformação torsional (apenas cisalhamento) ou aqueles que o relaxamento por dilatação é pequeno, é simples.

Assume-se uma amostra deformada por $\epsilon(T)$ para um tempo δT no tempo T , a tensão residual será:

$$-\epsilon T f(t - T) \delta T$$

para $(t > T)$, $f(t - T)$ é chamado de função memória, e é característica do material e do tipo de tensão. A tensão total σ é assumida como a soma dos elementos de deformação, considerando o histórico e a parcela instantânea. Esta contribuição da deformação normalmente é considerada como $F(\epsilon)$ tendo assim:

$$\sigma_{\epsilon, t} = F(\epsilon) - \int_{-\infty}^t \epsilon T f(t - T) dT \quad (52)$$

esta equação é uma forma do princípio da superposição no qual o problema considerado foi o termo de relaxamento de tensão, a tensão inicial é dada em termos do histórico de deformação da amostra. O problema, no entanto é encontrar uma maneira de tratamento no qual não seja necessário o conhecimento do histórico

da amostra. Em 1947, Gross apresentou um tratamento matemático que dispensa o conhecimento do histórico de deformação da amostra. Para um sólido de Maxwell, a equação (52) torna-se:

$$\sigma_{\epsilon, t} = E^* \epsilon - \frac{E}{\tau} \int_{-\infty}^t \epsilon(T) f\left(\frac{t-T}{\tau}\right) dT \quad (53)$$

para uma amostra não deformada:

$$\sigma_{\epsilon, t} = E\epsilon \left[1 - \frac{1}{\tau} \int_{t_1}^t \exp\left(-\frac{t-T}{\tau}\right) dT \right] = E\epsilon \exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau}\right) \quad (54)$$

ou seja, um resultado idêntico ao obtido na equação (41).

Para maioria dos sólidos reais $f(t-T)$ é obtido como a soma de uma série de exponenciais com diferentes valores de τ . Isso é equivalente a colocar modelos de Maxwell em paralelo. No limite a função memória pode ser expressa como uma integral na forma

$$f\left(\frac{t-T}{\tau}\right) = \int_0^{\infty} A(\tau) \exp\left(-\frac{t-T}{\tau}\right) d\tau \quad (55)$$

a plotagem de $A(\tau)$ dá o espectro de relaxamento do material. Essa curva pode ser facilmente encontrada em processos microscópicos produzindo a própria função memória.

Quando é mantida fixa uma deformação em um modelo de Maxwell a tensão tende à zero assintoticamente. Em um sólido real a tensão tende a um valor finito. Isso pode ser representado por uma mola em paralelo ao modelo de Maxwell, figura 18.

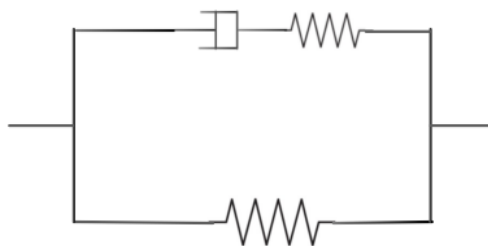


Figura 18 - Modelo de Maxwell com mola auxiliar.

Para um sólido que mantido com deformação constante, a aproximação assintótica tem valor $A\epsilon$ menor que $F(\epsilon)$. A relação entre tensão e deformação é depois de um longo tempo:

$$\sigma = F \epsilon - A\epsilon \quad (56)$$

sendo essa equação referente a relação entre tensão e deformação para a mola auxiliar.

O modelo de Voigt não apresenta relaxamento, porém se uma mola auxiliar é colocada em série a ele, obtém-se uma equivalência com o modelo de Maxwell, a figura 19 mostra esse modelo adaptado. É importante destacar a equivalência entre os modelos apresentados nas figuras 18 e 19.

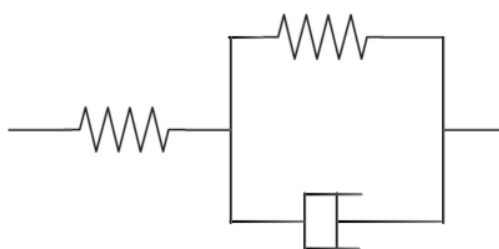


Figura 19 - Modelo de Voigt com mola auxiliar em série.

Se for aplicada uma carga P no elemento adaptado de Maxwell, ela será decomposta em duas parcelas (P_1 e P_2) como mostrado na figura 20, E_α é o módulo de elasticidade da mola auxiliar, η_m e E_m são as propriedades viscosas e elásticas do modelo de Maxwell, respectivamente. Sendo assim têm-se:

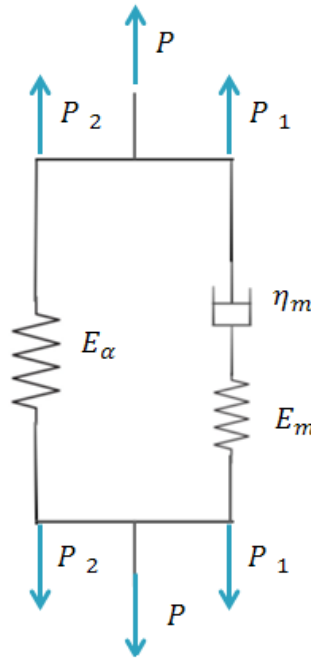


Figura 20 - Modelo adaptado de Maxwell, carregamento e propriedades dos componentes.

$$E_m P_1 + \eta_m \frac{dP_1}{dt} = E_m \eta_m \frac{d\epsilon}{dt} \quad (57)$$

e

$$P_2 = E_\alpha \epsilon \quad (58)$$

como $P = P_1 + P_2$, vem da equação (57) e (58):

$$E_m P + \eta_m \frac{dP}{dt} = E_m + E_\alpha \eta_m \frac{d\epsilon}{dt} + E_m E_\alpha \epsilon \quad (59)$$

O mesmo pode ser obtido a partir do modelo mostrado na figura 19, tendo a ilustração do carregamento na figura 21, E'_α é o módulo de elasticidade da mola auxiliar, η_v e E_v são as propriedades viscosas e elásticas do componente de Voigt. Seguindo procedimento semelhante ao anterior, tem-se:

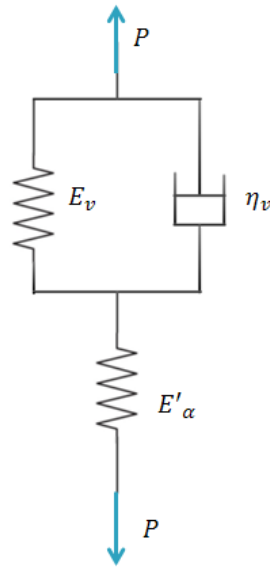


Figura 21 - Carregamento do Modelo adaptado de Voigt

$$(E'_\alpha + E_v)P + \eta_v \frac{dP}{dt} = E'_\alpha \eta_v \frac{d\epsilon}{dt} + E_v E'_\alpha \epsilon \quad (60)$$

se $E'_\alpha = E_\alpha + E_m$, $E_v = E_\alpha \left(1 + \frac{E_\alpha}{E_m} \right)$ e $\eta_v E_m E_\alpha = \eta_m E_v E'_\alpha$

as equações (59) e (60) são equivalentes. O comportamento de mecanismos dos dois tipos de modelos propostos é matematicamente idêntico, sendo assim, o mecanismo utilizado pode ser escolhido de acordo com a conveniência.

2.8 Propagação de Ondas de tensão em um Sólido Viscoelástico

Pela teoria de vibração de Boltzmann sólidos que obedecem à equação (52) lidam com equacionamentos extremamente complicados de se analisar, pois a solução envolvem equações integro-diferenciais parciais. Vários estudos foram apresentados buscando solucionar esse equacionamento. Em 1949, Hillier considerou que a propagação longitudinal de ondas senoidais através de um filamento viscoelástico e relacionou com os sólidos adaptados demonstrados anteriormente. Para um sólido de Maxwell a relação tensão X deformação é dado pela equação (41). E a segunda lei de Newton é:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (61)$$

derivando a equação (41) em relação a x e substituindo σ da equação (61) obtêm-se:

$$\rho \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - E \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\rho}{\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (62)$$

será satisfeito por uma solução do tipo $u = A \exp i(pt - f_1 x)$ se $f_1 = f + i\alpha$, sendo assim:

$$f^2 = \rho p^2 / 2E \sqrt{1 + p^{-2} \tau^{-2}} + 1 \quad (63)$$

e

$$\alpha^2 = \rho p^2 / 2E \sqrt{1 + p^{-2} \tau^{-2}} - 1$$

quando p é grande comparado com $1/\tau$, o período da onda de tensão é curto comparado com o tempo de relaxamento, $f^2 = \rho p^2 / E^*$ assim a velocidade é $\sqrt{E/\rho}$. O fator de atenuação α é $\sqrt{\rho/4E\tau^2}$ e é independente da frequência.

O mesmo procedimento pode ser feito para um sólido de Voigt adaptado, com as devidas considerações a resposta encontrada seria a mesma.⁴

⁴ Os conteúdos e figuras apresentados, iniciado em ³ é prioritariamente baseado na referência [4].

2.9 MÉTODO DA SEPARAÇÃO DAS VARIÁVEIS [1]

Consiste em representar uma função de duas ou mais variáveis como um produto de funções de uma variável somente. Isso permite escrever o problema em termos de EDOs independentes. Assim,

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x)T_i(t) \quad (64)$$

Condições:

- EDP linear;
- A estrutura da EDP deve permitir a separação;
- EDP homogênea (deve ser feita adaptações para EDPs não homogêneas)

2.10 VIBRAÇÕES LIVRES COM AMORTECIMENTO VISCOSO [8]

Pela equação (40) é possível afirmar que uma atenuação do movimento ocorrerá o que diminuirá a sua amplitude com o tempo. Supondo uma solução do tipo e^{rt} e derivando duas vezes em relação ao tempo, obtêm-se a seguinte equação (65):

$$Mr^2 + \eta r + E = 0 \quad (65)$$

Por Bhaskara tem-se

$$r_{1,2} = -\frac{\eta}{2M} \pm \sqrt{\frac{\eta^2}{4M^2} - \frac{E}{M}} \quad (66)$$

a solução mais geral será composta pelas duas raízes de (66)

$$T_n(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad (67)$$

Uma interpretação física da equação (67) depende da análise do radical da equação (66).

2.11 PROPRIEDADE DE INTEGRAIS COM PRODUTOS DE SENOS E COSSENOS [5]

Se for considerado um sistema de funções com parâmetros $\frac{1}{p} \text{sen } \frac{k\pi x}{p}$, $\frac{1}{p} \cos \frac{k\pi x}{p}$, pode se provar que:

$$\frac{1}{p} \int_{a-p}^{a+p} \text{sen } \frac{n\pi x}{p} \text{sen } \frac{m\pi x}{p} dx = \delta_{mn} \quad (68)$$

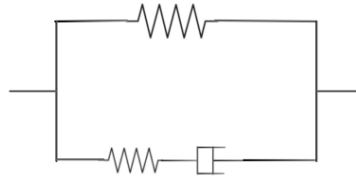
$$\frac{1}{p} \int_{a-p}^{a+p} \cos \frac{n\pi x}{p} \cos \frac{m\pi x}{p} dx = \delta_{mn} \quad (69)$$

$$\frac{1}{p} \int_{a-p}^{a+p} \text{sen } \frac{n\pi x}{p} \cos \frac{m\pi x}{p} dx = 0 \quad (70)$$

onde $\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA

Para construção considera-se um sólido de Maxwell adaptado com uma mola auxiliar, como mostrado na figura 18, abaixo:



Neste caso, a equação (41) que relaciona tensão e deformação é dada por:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{\sigma}{\tau}$$

onde E é o módulo de elasticidade resultante das molas, σ é a tensão inicialmente aplicadas, τ é o tempo de relaxamento do material e u representa o deslocamento ao longo da direção x . A segunda lei de Newton neste caso é expressa por (61):

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

Compondo estas duas equações, a equação diferencial parcial que governa a propagação de ondas axiais é representada por (62):

$$\rho \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - E \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\rho}{\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Ressalta-se que neste modelo o comportamento elástico e dissipativo estão em paralelo. A solução desta equação pode ser obtida considerando-se que:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\rho}{\tau} \frac{\partial u}{\partial t} = \gamma \quad (71)$$

o valor de γ é retirado da análise das condições de segunda derivada no tempo e depende das propriedades viscoelásticas do material.

Neste texto os pontos sobrescritos designará derivada temporal, sendo assim, um ponto (u) seria a primeira derivada de tempo de u , para derivada em relação a x poderá ser utilizado sinal tipográfico (apostrofe), assim sendo, u' será a derivada primeira em relação a x e u'' será a derivada segunda em relação a x , continuando sucessivamente para as outras derivadas.

O γ da equação (71) pode ser uma constante ou uma função de x que caracterizará um carregamento:

$$u_{x,0} = -\frac{1}{E}\gamma \quad (72)$$

reescrevendo (71):

$$u'' = \frac{\rho}{E} u + \frac{\rho}{\tau E} u - \frac{\gamma}{E} \quad (73)$$

Utilizando o método de separação das variáveis, pode-se afirmar que:

$$u_{x,t} = h(x) + X_n(x) * T_n(t) \quad (74)$$

onde $h(x)$ obedece as condições de contorno não homogênea (γ).

2.1 DETERMINANDO TERMO DE ADAPTAÇÃO DO MÉTODO

Considerando, por exemplo, que γ seja uma função degrau (Δ) do tipo:

$$\gamma(x) = \Delta(x - x_0) * P \quad (75)$$

tal equacionamento pode ser utilizado para uma viga engastada com uma carga concentrada P em um comprimento L . Como mostrado na figura 22.

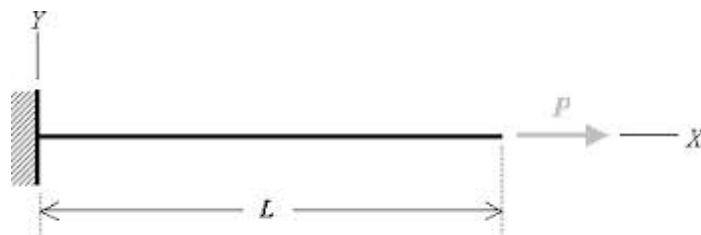


Figura 22 - Barra engastada solicitada pela carga P .

Tendo como condição inicial do problema proposto na figura 22:

$$\gamma(0) = 0 \text{ quando } x = 0 \quad (76)$$

$$\gamma(L) \neq 0 \text{ quando } x = L$$

Nestas condições é possível determinar $h(x)$:

$$h''(x) = -\frac{\Delta(L, x) * P}{E} \quad (77)$$

Integrando nos dois lados em relação a x :

$$h'(x) = -\frac{\Delta(L, x) * P}{E} dx \quad (78)$$

Obtendo:

$$h'(x) = -\frac{H(L, x) * P}{E} + D \quad (79)$$

Sendo H a integral de Δ e D sendo uma constante, para encontrar $h(x)$ é necessário uma nova integração em relação a x:

$$h(x) = -\frac{H(L,x) * P}{E} dx + D dx \quad (80)$$

Resultando em:

$$h(x) = -\frac{H^1(L,x) * P}{E} + Dx + E \quad (81)$$

as constantes D e E podem ser encontradas aplicando as condições iniciais (76):

$$h(0) = -\frac{H^1(L,0) * P}{E} + D * 0 + E = 0 \quad (82)$$

portanto $E=0$

e

$$h'(L) = -\frac{H(L,L) * P}{E} + D = 0 \quad (83)$$

portanto $D = \frac{P}{E}$

portanto substituindo (82) e (83) em (81) e aplicando para $0 < x < L$ tem-se:

$$h(0 < x < L) = \frac{P}{E} x \quad (84)$$

logo a condição não homogênea ($\gamma = h(x)$) para o problema (71) nas condições de carregamento proposta pela figura 22 foi encontrada em (84).

2.2 APLICANDO O MÉTODO DA SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

Pode-se partir então para as outras parcelas da equação (74) como foi encontrado o termo $h(x)$ segue-se como no caso de uma solução de EDP com condições iniciais homogêneas, nesta condição ajuda entender a sensação física pensar em uma barra engastada sem nenhuma carga aplicada:

$$u(x,t) = X_n(x) * T_n(t) \quad (85)$$

substituindo (85) em (73):

$$X_n'' T_n = \frac{\rho}{E} X_n T_n + \frac{\rho}{\tau E} X_n T_n \quad (86)$$

Dividindo (86) por (85):

$$\frac{X_n''}{X_n} = \frac{\rho}{E} \frac{T_n}{T_n} + \frac{\rho}{\tau E} \frac{T_n}{T_n} \quad (87)$$

para (87) ser verdadeiro os dois lados devem ser igual a uma constante, portanto pegando a parcela a direita da igualdade:

$$\frac{X_n''}{X_n} = -p_n^2 \quad (88)$$

neste caso pode-se afirmar pela teoria de vibração que:

$$X_n = A_n \cos(p_n x) + B_n \sin(p_n x) \quad (89)$$

as constantes podem ser encontradas aplicando algumas condições iniciais:

$$X_n(0) = 0 \quad (90)$$

Então $A_n = 0$

E

$$X'_n x = p_n B_n \cos(p_n x) \quad (91)$$

Para

$$X'_n L = 0 \quad (92)$$

$$\cos(p_n L) = 0$$

$$p_n L = \frac{n \pi}{2}$$

$$p_n = \frac{n \pi}{2 L}$$

com n sendo um número ímpar. Logo:

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n \pi}{2 L} x \quad (93)$$

A parte temporal poderá ser obtida igualando também à mesma constante da equação (88):

$$\frac{\rho}{E} \frac{T_n}{T_n} + \frac{\rho}{\tau E} \frac{T_n}{T_n} = -p_n^2 \quad (94)$$

que pode ser escrito como:

$$\rho T_n + \frac{\rho}{\tau} T_n = -p_n^2 E T_n \quad (95)$$

$$\rho T_n + \frac{\rho}{\tau} T_n + \frac{n \pi^2}{2 L^2} E T_n = 0$$

que é semelhante a equação (40), supondo uma solução do tipo e^{rt} e derivando duas vezes em relação ao tempo, obtêm-se a seguinte equação (96):

$$\rho r^2 + \frac{\rho}{\tau} r + \frac{n \pi^2}{2L} E e^{rt} = 0 \quad (96)$$

Por Bhaskara tem-se

$$r_{1,2} = -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \frac{n \pi^2}{2L} \frac{E}{\rho}} \quad (97)$$

a solução mais geral será composta pelas duas raízes de (97)

$$T_n(t) = C_n e^{r_1 t} + D_n e^{r_2 t} \quad (98)$$

Na equação (98) a resposta vai depender do radical da eq. (97) pode-se ter três tipos de radical diferentes, nulo (amortecimento critico), positivo (não há movimento vibratório) e negativo (movimento é oscilatório e amortecido). Neste texto será feito para o caso de movimento oscilatório e amortecido. Assim:

$$\frac{n \pi^2}{2L} \frac{E}{\rho} > \frac{1}{4\tau^2} \quad (99)$$

sendo assim pode-se definir um q:

$$q = \sqrt{\frac{n \pi^2}{2L} \frac{E}{\rho} - \frac{1}{4\tau^2}} \quad (100)$$

as raízes (97) pode ser escrita como:

$$r_{1,2} = -\frac{1}{2\tau} \pm iq \quad (101)$$

Assim (98) pode ser escrito como:

$$T_n t = C_n e^{-\frac{1}{2\tau}t} e^{iqt} + D_n e^{-\frac{1}{2\tau}t} e^{-iqt} \quad (102)$$

onde pode ser utilizado a fórmula de De Moivre:

$$T_n t = e^{-\frac{1}{2\tau}t} C_n \cos qt + i \operatorname{sen} qt + D_n \cos qt - i \operatorname{sen} qt \quad (103)$$

$$T_n t = e^{-\frac{1}{2\tau}t} C_n + D_n \cos qt + iC_n - iD_n \operatorname{sen} qt$$

é possível trabalhar apenas com variáveis reais se for feito $C_n = F_n + iG_n$ e $D_n = F_n - iG_n$, (103) torna-se:

$$T_n t = e^{-\frac{1}{2\tau}t} F_n \cos qt + G_n \operatorname{sen} qt \quad (104)$$

Pelas condições iniciais pode-se afirmar:

$$u(x, 0) = h(x) + X_n(x) * T_n(0) = 0 \quad (105)$$

$$u(x, 0) = X_n(x) T_n(0) = 0 \quad (106)$$

$$T_n(0) = 0$$

derivando (104):

$$T_n t = -\frac{1}{2\tau} e^{-\frac{1}{2\tau}t} - F_n q \operatorname{sen} qt + G_n q \cos qt \quad (107)$$

aplicando (106) em (107), tem-se:

$$T_n 0 = G_n q = 0 \quad (108)$$

$$G_n = 0$$

portanto (104) torna-se:

$$T_n t = e^{-\frac{1}{2\tau}t} F_n \cos qt \quad (109)$$

reorganizando em (105) tem-se:

$$-h x = X_n x * T_n 0 \quad (110)$$

aplicando (109) no tempo zero:

$$T_n 0 = F_n \quad (111)$$

Substituindo (84), (93) e (111) em (110):

$$-\frac{P}{E}x = B_n \sin \frac{n\pi}{2L}x F_n \quad (112)$$

agrupando todas as constantes em apenas uma, (112) torna-se:

$$-\frac{P}{E}x = H_n \sin \frac{n\pi}{2L}x \quad (113)$$

a constante H_n pode ser encontrada utilizando uma série de Fourier:

$$-\frac{P}{E}x = H_1 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2L}x + H_3 \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2L}x + H_5 \operatorname{sen} \frac{5\pi}{2L}x + \dots + H_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2L}x \quad (114)$$

multiplicando os dois lados pelo fator $\operatorname{sen} \frac{m\pi}{2L}x$ e integrando para encontrar as constantes para cada $n = m$ ímpar, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_0^L -\frac{P}{E}x \operatorname{sen} \frac{m\pi}{2L}x \, dx \\ = \int_0^L H_1 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2L}x \operatorname{sen} \frac{m\pi}{2L}x \, dx + \int_0^L H_3 \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2L}x \operatorname{sen} \frac{m\pi}{2L}x \, dx \\ + \dots \end{aligned}$$

Assim para $m=1$ mostra-se que:

$$\int_0^L -\frac{P}{E}x \operatorname{sen} \frac{\pi}{2L}x \, dx = H_1 \int_0^L \operatorname{sen} \frac{\pi}{2L}x \operatorname{sen} \frac{\pi}{2L}x \, dx$$

$$-\frac{P}{E} \int_0^L x \operatorname{sen} \frac{\pi}{2L}x \, dx = 2L H_1$$

$$-\frac{P}{2LE} \int_0^L x \operatorname{sen} \frac{\pi}{2L}x \, dx = H_1$$

pelo método de integração por partes:

$$H_1 = -\frac{P}{2LE} * \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2L}x - \frac{\pi}{2L}x \cos \frac{\pi}{2L}x}{\frac{\pi}{2L}} \Big|_0^L$$

$$H_1 = -\frac{P}{2LE} * \frac{\sin \frac{\pi}{2L} L - \frac{\pi}{2L} L \cos \frac{\pi}{2L} L}{\frac{\pi}{2L}^2} - \frac{\sin \frac{\pi}{2L} * 0 - \frac{\pi}{2L} * 0 * \cos \frac{\pi}{2L} * 0}{\frac{\pi}{2L}^2}$$

$$H_1 = -\frac{P}{2LE} \frac{\sin \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2L}^2}$$

$$H_1 = -\frac{2PL}{\pi^2 E}$$

Fazendo o mesmo para outros m's consegue-se:

m=n	
1	$H_1 = -\frac{2PL}{\pi^2 E}$
3	$H_3 = \frac{2PL}{(3\pi)^2 E}$
5	$H_5 = -\frac{2PL}{(5\pi)^2 E}$
7	$H_7 = \frac{2PL}{(7\pi)^2 E}$
9	$H_9 = -\frac{2PL}{(9\pi)^2 E}$

11	$H_{11} = \frac{2PL}{(11\pi)^2 E}$
13	$H_{13} = -\frac{2PL}{(13\pi)^2 E}$
15	$H_{15} = \frac{2PL}{(15\pi)^2 E}$

Então a constante H_n pode ser encontrada para qualquer n ímpar. Aqui só será feito com n até 15, pois os valores já serão muito pequenos neste termo.

Unindo (84), (93), (109) com as constantes encontradas e substituindo em (74), resulta-se em:

$$u(x, t) = \frac{P}{E}x + \sum_{n=1,3,5}^{\infty} -\frac{2PL}{(n\pi)^2 E} * \sin \frac{n\pi}{2L}x * e^{-\frac{1}{2\tau}t} \cos \sqrt{\frac{n\pi^2 E}{2L} - \frac{1}{4\tau^2}}t \quad (115)$$

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

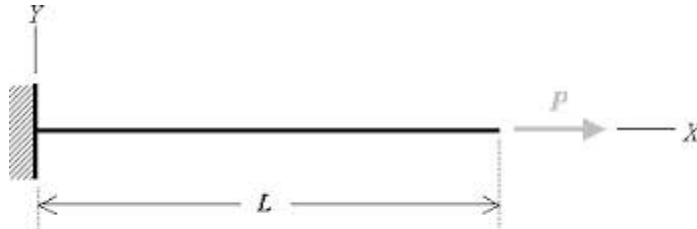
Como demonstrado anteriormente, a equação (115) representará o comportamento de uma barra de material viscoelástico engastada submetida a uma solicitação concentrada em seu extremo livre.

$$u(x,t) = \frac{P}{E}x + \sum_{n=1,3,5}^{\infty} -\frac{2PL}{(n\pi)^2 E} * \sin \frac{n\pi}{2L}x * e^{-\frac{1}{2\tau}t} \cos \sqrt{\frac{n\pi^2 E}{2L\rho} - \frac{1}{4\tau^2}}t$$

Para uma visualização da resposta física pode-se pegar um exemplo de um material que apresente características da equação (99), ou seja:

$$\frac{n\pi^2 E}{2L\rho} > \frac{1}{4\tau^2}$$

Tomando como base a figura 32, com um L de 10 centímetro e uma carga P de 1 kN.



O material adotado é semelhante ao utilizado em [3] as seguintes propriedades:

$$\rho = 20$$

$$E = 1280 \text{ KN/cm}^2$$

o tempo de relaxamento (τ) pode variar de $0,4 \frac{1}{s}$. Logo esse material satisfará as condições da equação (99). Assim o deslocamento no tempo será:

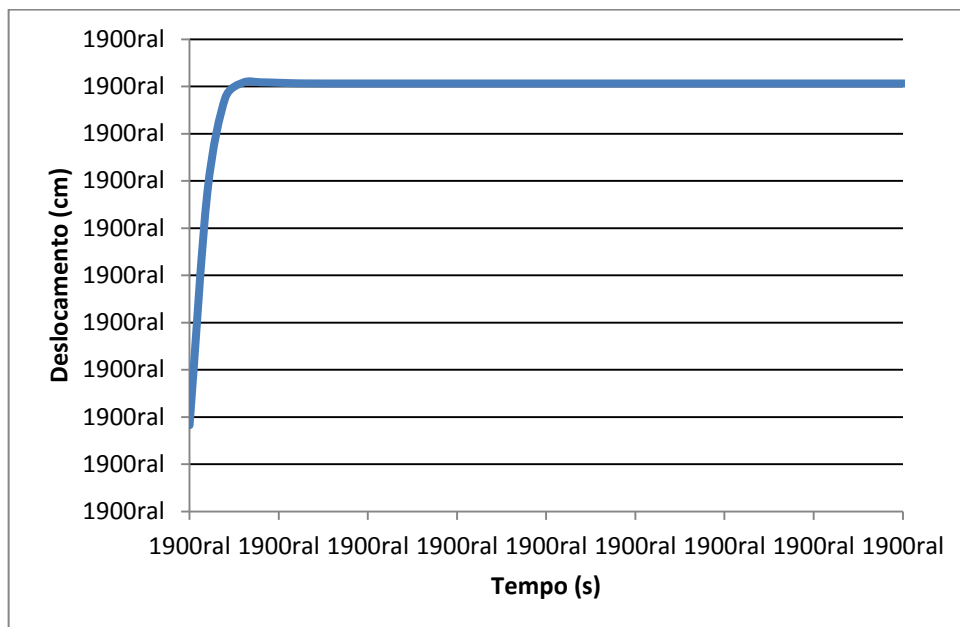


Figura 23 - Gráfico Deformação x tempo, resultado da aplicação das propriedades na equação (115)

O resultado encontrado em [3] é parecido com o encontrado na figura 23, é necessário ressaltar que na tese foi utilizada uma barra de 100 cm que não foi adotada aqui por não satisfazer a (99), porém oferece uma boa comparação qualitativa. O resultado obtido no texto é apresentado na figura 24, onde também aparece uma simulação com tempos de relaxamento menores.

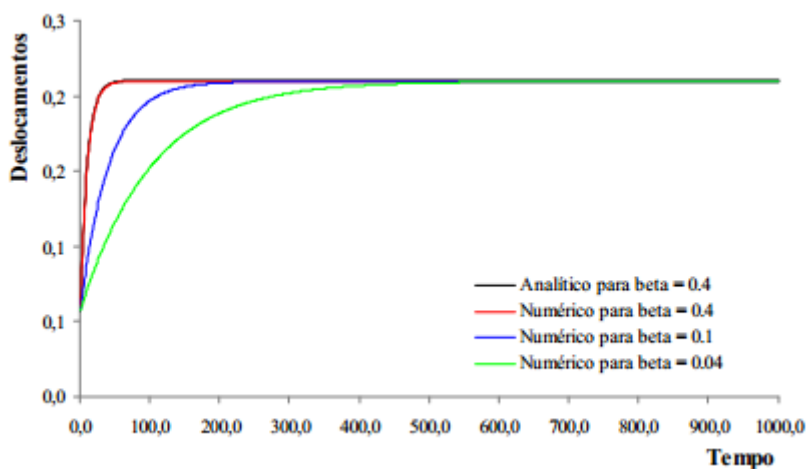


Figura 24 – Resultado obtido em [3] para o deslocamento na direção x, a solução analítica é a curva em preto, bem próxima a vermelha.

Alterando o tempo de relaxamento (τ) pode variar de $4 \frac{1}{s}$, como mostrado na figura 25, e comparando com o resultado com τ menores mostrados na figura 24, é possível ter uma visão qualitativa da influência desse termo para o comportamento do material.

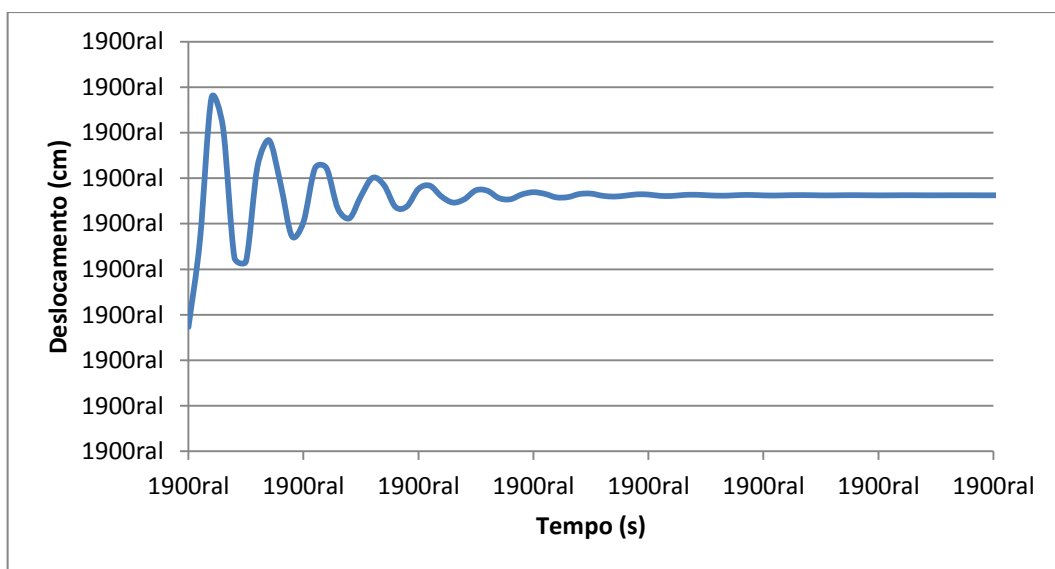


Figura 25 - Gráfico Deformação x tempo, resultado da aplicação das propriedades na equação (115) impondo um τ de $4 \frac{1}{s}$.

4 CONCLUSÃO

A modelagem do problema de uma carga de impacto sendo aplicada em um corpo viscoelástico aponta uma similaridade com os problemas elásticos simples em que ações de domínio atuam no sistema, como, por exemplo, a carga gravitacional. Entretanto, esta condição é obtida por imposição de condições iniciais referentes à inércia do sistema no instante da aplicação do carregamento dinâmico, é precisa ser generalizada para casos mais complicados.

Neste texto a modelagem foi feita para uma barra engastada sujeita a uma carga de tração concentrada a uma distância L da origem, porém os procedimentos aqui sugeridos podem ser utilizados para quaisquer tipos de carregamento fazendo-se as modificações necessárias.

Tais soluções servem para embasar os pesquisadores no desenvolvimento métodos numéricos, em que é preciso contar com soluções analíticas para exame da qualidade dos seus resultados.

Com a difusão desse tipo de conhecimento e ampliação das técnicas de solução de problemas, os engenheiros e físicos poderão se motivar a desenvolver e utilizar polímeros em seus trabalhos, o que amplia a quantidade de materiais para opção na construção e empreendimentos em geral.

5 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

Para os próximos trabalhos nessa área podem ser feitas:

- Modelagem matemática com cargas diferentes, Cisalhantes ou Flexoras;
- Modelagem matemática com diferentes apoios;
- Solução utilizando métodos computacionais;
- Ensaios práticos para conferir validade;

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] C. F. Loeffler Neto, Apostila de Cálculo Avançado, Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica (DEM/UFES), 2014
- [2] E. Kreiszg, Matematica Superior, vol 3, Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 1976.
- [3] F. Cezario, Uma Formulação para o Método dos Elementos de Contorno Aplicada a Problemas Viscoelásticos Lineares, Quasi-Estáticos e Dinâmicos, no Domínio do Tempo, UFRJ/COPPE (Tese de Doutorado no Programa de Engenharia Civil), Rio de Janeiro, 2009.
- [4] H. Kolsky, “Stress Waves in Solids”, Dover, 1963.
- [5] H. Sagens, “Boundary and eigenvalue problems in mathematical physics”, Wiley, New York, 1961.
- [6] R. M. Caddell, “Deformation and Fracture of Solids”, Prentice-Hall, 1980.
- [7] R. C. Juvinall, “Engineering Considerations of Stress, Strain and Strength”, McGraw-hill, 1967.
- [8] V. Prodonoff. Vibrações; Métodos e Análise, (Tese de Doutorado / Petrobras), Rio de Janeiro, 1977.