

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROJETO DE GRADUAÇÃO

ÁTILA LUPIM CRUZ

**ANÁLISE DO DESEMPENHO DE FUNÇÕES DE BASE RADIAL NA
APROXIMAÇÃO DE SUPERFÍCIES**

VITÓRIA
2009

ÁTILA LUPIM CRUZ

**ANÁLISE DO DESEMPENHO DE FUNÇÕES DE BASE RADIAL NA
APROXIMAÇÃO DE SUPERFÍCIES**

Parte manuscrita do Projeto de Graduação do
aluno Átila Lupim Cruz, apresentado ao
Departamento de Engenharia Mecânica do Centro
Tecnológico da Universidade Federal do Espírito
Santo, para obtenção do grau de Engenheiro
Mecânico.

VITÓRIA
2009

ÁTILA LUPIM CRUZ

ANÁLISE DO DESEMPENHO DE FUNÇÕES DE BASE RADIAL NA APROXIMAÇÃO DE SUPERFÍCIES

Parte manuscrita do Projeto de Graduação do aluno Átila Lupim Cruz, apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, para obtenção do grau de Engenheiro Mecânico.

Aprovado em 3 de dezembro de 2009.

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador

Prof. Dr. Paulo Cesar Oliveira
Universidade Federal do Espírito Santo
Examinador

Prof. Dr. Fernando César Meira Menandro
Universidade Federal do Espírito Santo
Examinador

Eng. Dr. André Bulcão
Centro de Pesquisas da Petrobras
Examinador

"Se alguma coisa pode dar errado, dará"

Lei de Murphy

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pelas portas abertas em minha vida.

Agradeço a toda a minha família, em especial meus pais pela educação que me foi dada, a minha avó Ruth e minha tia Carly pelo apoio e ao meu irmão Vítor, pelo suporte.

Agradeço a minha namorada Ieda pelo carinho, compreensão e por estar sempre presente na minha vida nesses três últimos anos.

Agradeço também ao professor Loeffler por toda a orientação, paciência e pela troca de experiência e conhecimento.

E agradeço aos meus amigos pela diversão garantida ao longo do curso de graduação, aos amigos conhecidos durante o curso de graduação e também aos velhos amigos, pela certeza de sempre poder contar com eles.

RESUMO

Esse estudo apresenta uma discussão relacionada às características básicas das funções de base radial e suas vantagens nas aplicações de engenharia. Os testes preliminares mostram o comportamento típico de aproximações com funções radiais em domínios bidimensionais, solucionando problemas de determinação de volume sob superfícies e cálculo de integrais de linha ao longo de superfícies. Algumas características importantes da interpolação radial são discutidas neste contexto.

No que tange ao cálculo de volumes, primeiramente, estuda-se o tipo de função e sua precisão para simular ações do domínio em problemas estacionários, destacando a relação existente entre a função e o perfil da superfície a ser interpolada. Estuda-se a seguir a importância do número de pontos de interpolação e a necessidade de pólos internos ao domínio a ser aproximado. Em continuidade, examina-se o efeito da combinação de diferentes funções e o particionamento do domínio em setores. Finalmente, analisa-se a eficácia do procedimento que combina funções radiais locais e globais na determinação dos volumes por interpolação.

No tópico seguinte, concluindo o presente trabalho, investigam-se as propriedades de integração ao longo de superfícies interpoladas, comparando o resultado aproximado de integrais de linhas entre diferentes pontos com valores analíticos disponíveis.

Palavras-chaves: Funções radiais. Cálculo de volumes. Integrais de linha.

LISTA DE FIGURAS

Figura 5-1 – Comportamento unidimensional da Regra 1/3 de Simpson.	41
Figura 5-2 – Representação da subdivisão do domínio bidimensional.	43
Figura 5-3 – Domínio dos arquivos do tipo “Pontos(X)1.m”.....	49
Figura 5-4 – Domínio dos arquivos do tipo “Pontos(X)2.m”.....	49
Figura 5-5 – Domínio dos arquivos do tipo “Pontos(X)3.m”.....	49
Figura 5-6 – Domínio dos arquivos do tipo “Pontos(X)4.m”.....	50
Figura 5-7 – Domínio dos arquivos do tipo “Pontos(X)5.m”.....	50
Figura 5-8 – Matriz expandida com três equações globais.....	95
Figura 5-9 – Malha para os testes de expansão.....	96
Figura 5-10 – Matriz expandida com seis equações globais.	111
Figura 5-11 – Malha para os testes de expansão.....	120

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 4-1 – Função $y = x^2 - 2x + 2$	32
Gráfico 4-2 – Gráfico da interpolação pela função radial simples.....	35
Gráfico 4-3 – Gráfico da interpolação pela função radial cúbica.	37
Gráfico 5-1 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos11.m”.....	53
Gráfico 5-2 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos12.m”.....	53
Gráfico 5-3 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos13.m”.....	54
Gráfico 5-4 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos14.m”.....	55
Gráfico 5-5 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos15.m”.....	55
Gráfico 5-6 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos21.m”.....	56
Gráfico 5-7 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos22.m”.....	56
Gráfico 5-8 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos23.m”.....	57
Gráfico 5-9 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos24.m”.....	58
Gráfico 5-10 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos25.m”.....	58
Gráfico 5-11 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos31.m”.....	59
Gráfico 5-12 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos32.m”.....	60
Gráfico 5-13 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos33.m”.....	60
Gráfico 5-14 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos34.m”.....	61
Gráfico 5-15 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos35.m”.....	61
Gráfico 5-16 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos41.m”.....	62
Gráfico 5-17 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos42.m”.....	63
Gráfico 5-18 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos43.m”.....	63
Gráfico 5-19 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos44.m”.....	64
Gráfico 5-20 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos45.m”.....	64
Gráfico 5-21 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos11.m”.....	68
Gráfico 5-22 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos12.m”.....	69
Gráfico 5-23 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos13.m”.....	69
Gráfico 5-24 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos14.m”.....	69
Gráfico 5-25 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos15.m”.....	70
Gráfico 5-26 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos21.m”.....	70

Gráfico 5-27 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos22.m”	71
Gráfico 5-28 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos23.m”	71
Gráfico 5-29 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos24.m”	71
Gráfico 5-30 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos25.m”	72
Gráfico 5-31 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos31.m”	72
Gráfico 5-32 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos32.m”	72
Gráfico 5-33 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos33.m”	73
Gráfico 5-34 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos34.m”	73
Gráfico 5-35 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos35.m”	73
Gráfico 5-36 – Derivada em relação à X e a Y no arquivo “Pontos41.m”	74
Gráfico 5-37 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos42.m”	74
Gráfico 5-38 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos43.m”	74
Gráfico 5-39 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos44.m”	75
Gráfico 5-40 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos45.m”	75
Gráfico 5-41 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos16.m”	77
Gráfico 5-42 – Resultados para o arquivo “Pontos16.m”.....	77
Gráfico 5-43 – Resultados para o arquivo “Pontos26.m”.....	78
Gráfico 5-44 – Resultados para o arquivo “Pontos26.m”.....	79
Gráfico 5-45 – Resultados para o arquivo “Pontos48.m”.....	79
Gráfico 5-46 – Resultados para o arquivo “Pontos48.m”.....	80
Gráfico 5-47 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos11.m”	82
Gráfico 5-48 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos12.m”	83
Gráfico 5-49 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos13.m”	83
Gráfico 5-50 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos14.m”	84
Gráfico 5-51 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos15.m”	84
Gráfico 5-52 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos21.m”	85
Gráfico 5-53 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos22.m”	85
Gráfico 5-54 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos23.m”	86
Gráfico 5-55 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos24.m”	86
Gráfico 5-56 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos25.m”	87
Gráfico 5-57 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos31.m”	88
Gráfico 5-58 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos32.m”	88
Gráfico 5-59 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos33.m”	89

Gráfico 5-60 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos34.m”.....	89
Gráfico 5-61 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos35.m”.....	90
Gráfico 5-62 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos41.m”.....	91
Gráfico 5-63 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos42.m”.....	91
Gráfico 5-64 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos43.m”.....	92
Gráfico 5-65 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos44.m”.....	92
Gráfico 5-66 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos45.m”.....	93
Gráfico 5-67 – Primeiro teste da expansão com três equações.....	96
Gráfico 5-68 – Segundo teste da expansão com três equações.....	97
Gráfico 5-69 – Terceiro teste da expansão com três equações.....	97
Gráfico 5-70 – Quarto teste da expansão com três equações.....	98
Gráfico 5-71 – Quinto teste da expansão com três equações.....	99
Gráfico 5-72 – Sexto teste da expansão com três equações.....	99
Gráfico 5-73 – Sétimo teste da expansão com três equações.....	100
Gráfico 5-74 – Oitavo teste da expansão com três equações.....	101
Gráfico 5-75 – Nono teste da expansão com três equações.....	101
Gráfico 5-76 – Décimo teste da expansão com três equações.....	102
Gráfico 5-77 – Décimo primeiro teste da expansão com três equações.....	102
Gráfico 5-78 – Décimo segundo teste da expansão com três equações.....	103
Gráfico 5-79 – Décimo terceiro teste da expansão com três equações.....	104
Gráfico 5-80 – Décimo quarto teste da expansão com três equações.....	104
Gráfico 5-81 – Décimo quinto teste da expansão com três equações.....	105
Gráfico 5-82 – Décimo sexto teste da expansão com três equações.....	105
Gráfico 5-83 – Décimo sétimo teste da expansão com três equações.....	106
Gráfico 5-84 – Décimo oitavo teste da expansão com três equações.....	107
Gráfico 5-85 – Primeiro teste da expansão com seis equações.....	112
Gráfico 5-86 – Segundo teste da expansão com seis equações.....	113
Gráfico 5-87 – Terceiro teste da expansão com seis equações.....	113
Gráfico 5-88 – Quarto teste da expansão com seis equações.....	114
Gráfico 5-89 – Quinto teste da expansão com seis equações.....	115
Gráfico 5-90 – Sexto teste da expansão com seis equações.....	115
Gráfico 5-91 – Sétimo teste da expansão com seis equações.....	116
Gráfico 5-92 – Oitavo teste da expansão com seis equações.....	116

Gráfico 5-93 – Primeiro teste da expansão com três equações.	120
Gráfico 5-94 – Segundo teste da expansão com três equações.	121
Gráfico 5-95 – Terceiro teste da expansão com três equações.	122
Gráfico 5-96 – Quarto teste da expansão com três equações.	122
Gráfico 5-97 – Quinto teste da expansão com três equações.	123
Gráfico 5-98 – Sexto teste da expansão com três equações.	123
Gráfico 5-99 – Sétimo teste da expansão com três equações.	124
Gráfico 5-100 – Oitavo teste da expansão com três equações.	125
Gráfico 5-101 – Nono teste da expansão com três equações.	125
Gráfico 5-102 – Décimo teste da expansão com três equações.	126
Gráfico 5-103 – Décimo primeiro teste da expansão com três equações.	126
Gráfico 5-104 – Décimo segundo teste da expansão com três equações.	127
Gráfico 5-105 – Primeiro teste da expansão com seis equações.	131
Gráfico 5-106 – Segundo teste da expansão com seis equações.	131
Gráfico 5-107 – Terceiro teste da expansão com seis equações.	132
Gráfico 5-108 – Quarto teste da expansão com seis equações.	132
Gráfico 5-109 – Quinto teste da expansão com seis equações.	133
Gráfico 5-110 – Sexto teste da expansão com seis equações.	134
Gráfico 5-111 – Sétimo teste da expansão com seis equações.	134
Gráfico 5-112 – Oitavo teste da expansão com seis equações.	135

LISTA DE TABELAS

Tabela 5-1 – Resultados para o arquivo “Pontos11.m”	53
Tabela 5-2 – Resultados para o arquivo “Pontos12.m”	54
Tabela 5-3 – Resultados para o arquivo “Pontos13.m”	54
Tabela 5-4 – Resultados para o arquivo “Pontos14.m”	55
Tabela 5-5 – Resultados para o arquivo “Pontos15.m”	55
Tabela 5-6 – Resultados para o arquivo “Pontos21.m”	56
Tabela 5-7 – Resultados para o arquivo “Pontos22.m”	57
Tabela 5-8 – Resultados para o arquivo “Pontos23.m”	57
Tabela 5-9 – Resultados para o arquivo “Pontos24.m”	58
Tabela 5-10 – Resultados para o arquivo “Pontos25.m”	58
Tabela 5-11 – Resultados para o arquivo “Pontos31.m”	59
Tabela 5-12 – Resultados para o arquivo “Pontos32.m”	60
Tabela 5-13 – Resultados para o arquivo “Pontos33.m”	60
Tabela 5-14 – Resultados para o arquivo “Pontos34.m”	61
Tabela 5-15 – Resultados para o arquivo “Pontos35.m”	61
Tabela 5-16 – Resultados para o arquivo “Pontos41.m”	62
Tabela 5-17 – Resultados para o arquivo “Pontos42.m”	63
Tabela 5-18 – Resultados para o arquivo “Pontos43.m”	63
Tabela 5-19 – Resultados para o arquivo “Pontos44.m”	64
Tabela 5-20 – Resultados para o arquivo “Pontos45.m”	65
Tabela 5-21 – Resultados para o arquivo “Pontos16.m”	77
Tabela 5-22 – Resultados para o arquivo “Pontos16.m”	77
Tabela 5-23 – Resultados para o arquivo “Pontos26.m”	78
Tabela 5-24 – Resultados para o arquivo “Pontos26.m”	79
Tabela 5-25 – Resultados para o arquivo “Pontos48.m”	80
Tabela 5-26 – Resultados para o arquivo “Pontos48.m”	80
Tabela 5-27 – Comparação para a equação radial $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-r_i}$	81
Tabela 5-28 – Comparação para a equação radial $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-3 \cdot r_i}$	81

Tabela 5-29 – Resultados para o arquivo “Pontos11.m”	82
Tabela 5-30 – Resultados para o arquivo “Pontos12.m”	83
Tabela 5-31 – Resultados para o arquivo “Pontos13.m”	83
Tabela 5-32 – Resultados para o arquivo “Pontos14.m”	84
Tabela 5-33 – Resultados para o arquivo “Pontos15.m”	84
Tabela 5-34 – Resultados para o arquivo “Pontos21.m”	85
Tabela 5-35 – Resultados para o arquivo “Pontos22.m”	86
Tabela 5-36 – Resultados para o arquivo “Pontos23.m”	86
Tabela 5-37 – Resultados para o arquivo “Pontos24.m”	87
Tabela 5-38 – Resultados para o arquivo “Pontos25.m”	87
Tabela 5-39 – Resultados para o arquivo “Pontos31.m”	88
Tabela 5-40 – Resultados para o arquivo “Pontos32.m”	88
Tabela 5-41 – Resultados para o arquivo “Pontos33.m”	89
Tabela 5-42 – Resultados para o arquivo “Pontos34.m”	89
Tabela 5-43 – Resultados para o arquivo “Pontos35.m”	90
Tabela 5-44 – Resultados para o arquivo “Pontos41.m”	91
Tabela 5-45 – Resultados para o arquivo “Pontos42.m”	91
Tabela 5-46 – Resultados para o arquivo “Pontos43.m”	92
Tabela 5-47 – Resultados para o arquivo “Pontos44.m”	92
Tabela 5-48 – Resultados para o arquivo “Pontos45.m”	93
Tabela 5-49 – Resultados do primeiro teste da expansão com três equações	96
Tabela 5-50 – Resultados do segundo teste da expansão com três equações	97
Tabela 5-51 – Resultados do terceiro teste da expansão com três equações	98
Tabela 5-52 – Resultados do quarto teste da expansão com três equações	98
Tabela 5-53 – Resultados do quinto teste da expansão com três equações	99
Tabela 5-54 – Resultados do sexto teste da expansão com três equações	99
Tabela 5-55 – Resultados do sétimo teste da expansão com três equações	100
Tabela 5-56 – Resultados do oitavo teste da expansão com três equações	101
Tabela 5-57 – Resultados do nono teste da expansão com três equações	101
Tabela 5-58 – Resultados do décimo teste da expansão com três equações	102
Tabela 5-59 – Resultados do décimo primeiro teste da expansão com três equações	103

Tabela 5-60 – Resultados do décimo segundo teste da expansão com três equações.....	103
Tabela 5-61 – Resultados do décimo terceiro teste da expansão com três equações.....	104
Tabela 5-62 – Resultados do décimo quarto teste da expansão com três equações.....	104
Tabela 5-63 – Resultados do décimo quinto teste da expansão com três equações.....	105
Tabela 5-64 – Resultados do décimo sexto teste da expansão com três equações.....	106
Tabela 5-65 – Resultados do décimo sétimo teste da expansão com três equações.....	106
Tabela 5-66 – Resultados do décimo oitavo teste da expansão com três equações.....	107
Tabela 5-67 – Comparação dos resultados para o campo $z(x, y) = 1$	107
Tabela 5-68 – Comparação dos resultados para o campo $z(x, y) = x$	108
Tabela 5-69 – Comparação dos resultados para o campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$	108
Tabela 5-70 – Coeficientes da aproximação.	110
Tabela 5-71 – Resultados do primeiro teste da expansão com seis equações....	112
Tabela 5-72 – Resultados do segundo teste da expansão com seis equações....	113
Tabela 5-73 – Resultados do terceiro teste da expansão com seis equações....	113
Tabela 5-74 – Resultados do quarto teste da expansão com seis equações.....	114
Tabela 5-75 – Resultados do quinto teste da expansão com seis equações.	115
Tabela 5-76 – Resultados do sexto teste da expansão com seis equações.	115
Tabela 5-77 – Resultados do sétimo teste da expansão com seis equações.	116
Tabela 5-78 – Resultados do oitavo teste da expansão com seis equações.	117
Tabela 5-79 – Comparação dos resultados para o campo $z(x, y) = 1$	117
Tabela 5-80 – Comparação dos resultados para o campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$	117
Tabela 5-81 – Coeficientes da aproximação.	118
Tabela 5-82 – Resultados do primeiro teste da expansão com três equações.	121
Tabela 5-83 – Resultados do segundo teste da expansão com três equações....	121
Tabela 5-84 – Resultados do terceiro teste da expansão com três equações.	122
Tabela 5-85 – Resultados do quarto teste da expansão com três equações.	122

Tabela 5-86 – Resultados do quinto teste da expansão com três equações.....	123
Tabela 5-87 – Resultados do sexto teste da expansão com três equações.....	124
Tabela 5-88 – Resultados do sétimo teste da expansão com três equações.....	124
Tabela 5-89 – Resultados do oitavo teste da expansão com três equações.....	125
Tabela 5-90 – Resultados do nono teste da expansão com três equações.	125
Tabela 5-91 – Resultados do décimo teste da expansão com três equações.....	126
Tabela 5-92 – Resultados do décimo primeiro teste da expansão com três equações.....	127
Tabela 5-93 – Resultados do décimo segundo teste da expansão com três equações.....	127
Tabela 5-94 – Comparação dos resultados para o campo $z(x, y) = 1$	127
Tabela 5-95 – Comparação dos resultados para o campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$	128
Tabela 5-96 – Coeficientes da aproximação.	129
Tabela 5-97 – Resultados do primeiro teste da expansão com seis equações.	131
Tabela 5-98 – Resultados do segundo teste da expansão com seis equações.	131
Tabela 5-99 – Resultados do terceiro teste da expansão com seis equações.....	132
Tabela 5-100 – Resultados do quarto teste da expansão com seis equações.....	133
Tabela 5-101 – Resultados do quinto teste da expansão com seis equações.	133
Tabela 5-102 – Resultados do sexto teste da expansão com seis equações.	134
Tabela 5-103 – Resultados do sétimo teste da expansão com seis equações.	134
Tabela 5-104 – Resultados do oitavo teste da expansão com seis equações.	135
Tabela 5-105 – Comparação dos resultados para o campo $z(x, y) = 1$	135
Tabela 5-106 – Comparação dos resultados para o campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$	136
Tabela 5-107 – Coeficientes da aproximação.	136
Tabela 6-1 – Resultados para o caminho por uma reta.....	140
Tabela 6-2 – Resultados para o caminho por uma parábola de segundo grau.	142
Tabela 6-3 – Resultados para o caminho por uma parábola de quinto grau.	143
Tabela 6-4 – Resultados para o caminho por um caminho não suave.....	144
Tabela 6-5 – Resultados para o caminho por uma reta.....	146
Tabela 6-6 – Resultados para o caminho por uma parábola de segundo grau.	148

Tabela 6-7 – Resultados para o caminho por uma parábola de quinto grau.	149
Tabela 6-8 – Resultados para o caminho por um caminho não suave.....	151

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS	V
RESUMO	VI
LISTA DE FIGURAS	VII
LISTA DE GRÁFICOS	VIII
LISTA DE TABELAS	XII
SUMÁRIO.....	XVII
1 INTRODUÇÃO	21
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	24
3 METODOLOGIA.....	26
3.1 APROXIMAÇÃO UNIDIMENSIONAL.....	27
3.2 APROXIMAÇÃO BIDIMENSIONAL	28
3.3 CONCLUSÃO	31
4 TESTES UNIDIMENSIONAIS	32
4.1 RESULTADOS DA APROXIMAÇÃO	33
4.1.1 Aproximação com a função radial simples	33
4.1.1.1 Conclusões	35
4.1.2 Aproximação com a função radial cúbica	35
4.1.2.1 Conclusões	37
4.1.3 Testes com cálculo de área.....	37
4.1.3.1 Conclusões	39
5 TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUMES.....	40
5.1 MÉTODO DE CÁLCULO NUMÉRICO: REGRA 1/3 DE SIMPSON	41
5.1.1 Técnicas de aumento da precisão do método	43
5.1.2 Estimativa do erro máximo de integração.....	43
5.2 NOMECLATURA DOS ARQUIVOS DE ENTRADA	48
5.3 VOLUMES ANALÍTICOS NOS CASOS ESCOLHIDOS.....	50
5.3.1 Volume do campo $z(x, y) = 1$	51
5.3.2 Volume do campo $z(x, y) = x$	51
5.3.3 Volume do campo $z(x, y) = xy$	51
5.3.4 Volume do campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$	51

5.4 TESTES SIMPLES COM FUNÇÕES RADIAIS	52
5.4.1 Resultados para o campo $z(x, y) = 1$	52
5.4.2 Resultados para o campo $z(x, y) = x$	56
5.4.3 Resultados para o campo $z(x, y) = xy$	59
5.4.4 Resultados para o campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$	62
5.4.5 Conclusão.....	65
5.5 TESTES COM A DERIVADA PARCIAL EM RELAÇÃO A X E A Y.....	65
5.5.1 Derivada das funções radiais $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$ e $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$	66
5.5.2 Derivada da função radial $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-r_i}$	67
5.5.3 Derivada da função radial $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1 + r_i)^3}$	67
5.5.4 Resultados para o campo $z(x, y) = 1$	68
5.5.5 Resultados para o campo $z(x, y) = x$	70
5.5.6 Resultados para o campo $z(x, y) = xy$	72
5.5.7 Resultados para o campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$	74
5.5.8 Conclusões.....	75
5.6 TESTES COM DIVISÃO DO DOMÍNIO	76
5.6.1 Resultados para o campo $z(x, y) = 1$	76
5.6.2 Resultados para o campo $z(x, y) = x$	78
5.6.3 Resultados para o campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$	79
5.6.4 Conclusão.....	80
5.7 TESTES COM SOMA DE FUNÇÕES RADIAIS.....	82
5.7.1 Resultados para o campo $z(x, y) = 1$	82
5.7.2 Resultados para o campo $z(x, y) = x$	85
5.7.3 Resultados para o campo $z(x, y) = xy$	87
5.7.4 Resultados para o campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$	90
5.7.5 Conclusão.....	93

5.8 TESTES COM EXPANSÃO DO SISTEMA LINEAR SEM PONTOS INTERNOS NO DOMÍNIO	94
5.8.1 Expansão com três equações globais	94
5.8.1.1 Resultados para o campo $z(x, y) = 1$	96
5.8.1.2 Resultados para o campo $z(x, y) = x$	100
5.8.1.3 Resultados para o campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$	103
5.8.1.4 Conclusão	107
5.8.2 Expansão com seis equações globais.....	111
5.8.2.1 Resultados para o campo $z(x, y) = 1$	112
5.8.2.2 Resultados para o campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$	114
5.8.2.3 Conclusão	117
5.9 TESTES COM EXPANSÃO DO SISTEMA LINEAR COM PONTOS INTERNOS NO DOMÍNIO	119
5.9.1 Expansão com três equações globais	120
5.9.1.1 Resultados para o campo $z(x, y) = 1$	120
5.9.1.2 Resultados para o campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$	124
5.9.1.3 Conclusão	127
5.9.2 Expansão com seis equações globais.....	130
5.9.2.1 Resultados para o campo $z(x, y) = 1$	130
5.9.2.2 Resultados para o campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$	133
5.9.2.3 Conclusão	135
6 TESTES DE INTEGRAÇÃO DE LINHA.....	138
6.1 INTEGRAL DE LINHA OU CURVILÍNEA.....	138
6.2 TESTES DA ORIGEM ATÉ O PONTO (1;1).....	139
6.2.1 Resultados para o caminho reto	139
6.2.1.1 Cálculo analítico.....	139
6.2.1.2 Resultados numéricos.....	140
6.2.2 Resultados para o caminho parabólico de 2º grau	141
6.2.2.1 Cálculo analítico.....	141
6.2.2.2 Resultados numéricos.....	141
6.2.3 Resultados para o caminho parabólico de 5º grau	142

6.2.3.1 Cálculo analítico.....	142
6.2.3.2 Resultados numéricos.....	143
6.2.4 Resultados para o caminho não suave.....	143
6.2.4.1 Cálculo analítico.....	143
6.2.4.2 Resultados numéricos.....	144
6.2.5 Conclusões.....	145
6.3 TESTES DA ORIGEM ATÉ O PONTO (0,5;0,5)	145
6.3.1 Resultados para o caminho reto	145
6.3.1.1 Cálculo analítico.....	145
6.3.1.2 Resultados numéricos.....	146
6.3.2 Resultados para o caminho parabólico de 2º grau	146
6.3.2.1 Cálculo analítico.....	147
6.3.2.2 Resultados numéricos.....	148
6.3.3 Resultados para o caminho parabólico de 5º grau	148
6.3.3.1 Cálculo analítico.....	148
6.3.3.2 Resultados numéricos.....	149
6.3.4 Resultados para o caminho não suave.....	150
6.3.4.1 Cálculo analítico.....	150
6.3.4.2 Resultados numéricos.....	151
6.3.5 Conclusões.....	151
CONSIDERAÇÕES FINAIS	152
BIBLIOGRAFIA.....	154

1 INTRODUÇÃO

O uso das funções de base radial como ferramenta auxiliar no escopo de técnicas de aproximação numérica é uma das abordagens cujo uso mais se desenvolveu nos últimos anos. Atualmente podem ser encontradas freqüentes citações de tais funções na literatura da moderna teoria dos métodos aproximados, sendo particularmente recomendado quando à tarefa de aproximação de resultados exige trabalhar com dados esparsos e multidimensionais.

Na época presente, quando os computadores são aplicados quase que em todos os ramos da ciência, em especial na engenharia e, até mesmo, nas corriqueiras tarefas do cotidiano, torna-se cada vez mais importante implementar algoritmos e ferramentais matemáticos eficientes dentro do processamento dos programas computacionais, gerados a partir dos mais diversos métodos numéricos. Com esse propósito, demanda-se freqüentemente empregar funções solução expressas em termos aproximados, ao invés de se empregar formas exatas, analiticamente mais extensas, trabalhosas e restritas.

Ainda que não se possa excluir qualquer esforço na pesquisa de procedimentos que implementem metodologias exatas de soluções, ainda existem razões, pertinentes ao esforço computacional, que motivam o investimento em técnicas essencialmente aproximadas. A mais simples delas é que na maior parte das ocasiões tais funções exatas são, na realidade, representadas por expansões em séries infinitas. Não obstante sua consistência e precisão, para alcançar essa última condição surgem problemas específicos, por conta da quantidade de termos necessários à convergência, que varia de problema para problema. A função que se deseja simular pode ser tão cara, demandando tanto tempo de processamento computacional e memória, que sua utilização não se justifica. Esse fator continua verdadeiro mesmo face ao crescente desenvolvimento da velocidade e memória computacional, pois os problemas demandados pelos usuários tornam-se cada vez mais sofisticados e o tamanho deles também se agiganta. Finalmente, nem sempre se conhece a função, e sim alguns dados esparsos a ela referentes, que podem não defini-la completamente e ainda podem ter que ser computados interativamente com algum procedimento paralelo de coleta de dados. Tudo isso sem contar que a dinâmica do

processo pode requerer um esquema incremental ou iterativo, de modo que se torna bastante conveniente o uso de uma abordagem baseada em aproximações numéricas na maior parte das fases que compõem a metodologia de solução do problema.

Em geral, as melhores aplicações das funções radiais são as seguintes:

- (a) as funções a serem aproximadas dependem de muitas variáveis ou parâmetros;
- (b) são definidas por muitos dados;
- (c) os dados são valores esparsos distribuídos no domínio.

Um ponto a ser analisado é o fato de que nem toda equação pode ser utilizada para a interpolação de um campo qualquer, já que a equação escolhida pode não ser apropriada para a aproximação da função solução exata ou um campo qualquer onde se conheça apenas valores esparsos. Um exemplo básico é a aproximação de um campo constante por uma equação constante, onde traria uma precisão maior do que se a aproximação fosse feita com uma equação parabólica sem termos constantes, por exemplo.

As aplicações das funções radiais atualmente são muito variadas. O tratamento de imagens é dos mais importantes. O processo de interpolação torna-se um ferramental importante para preservar o espectro do mapeamento obtido com base em informações colhidas de modo exato em certos pontos, como em exames de raios X do esqueleto humano. O mesmo ocorre no esquadrinhamento de costas marítimas por sonar. Em ambas as aplicações as funções radiais de placa tem apresentado ótimos resultados. Já as funções multiquádricas mostram bom desempenho em medidas de temperatura ou variáveis de campo na superfície da terra, bem como em aplicações meteorológicas nas quais estações colhem dados esparsos em vários instantes de tempo e estes resultados devem ser integrados espacialmente para dar uma visão satisfatória do clima numa região mais extensa. A modelagem do comportamento das redes neurais também se inclui entre os campos onde as funções radiais foram introduzidas com relativo êxito, graças a sua multifuncionalidade e, em certas circunstâncias, por sua suavidade. Uma área recente, cuja afinidade com os campos de pesquisa citados é imediata, diz respeito à prospecção de poços de petróleo, onde se deseja mapear com relativa precisão todo um campo geofísico com base em medições discretas. A denominação

tomografia sísmica explicita claramente as similaridades dessa nova área de atuação com as áreas anteriormente citadas.

Assim, é necessário um estudo sobre quais equações são mais indicadas para a aproximação de determinados campos, levando em consideração sua forma geométrica.

O presente estudo trata da modelagem matemática de campos constituídos por pontos esparsos utilizando funções radiais e utilizando técnicas de aumento de precisão para a observação de qual função radial proposta retorna o menor erro, sendo os testes feitos em função da geometria do campo a ser aproximado e se há pontos apenas no contorno do domínio considerado ou também em seu interior, bem como o número desses pontos.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Excetuando a parte inicial da pesquisa, todo o desenvolvimento do projeto foi feito utilizando ferramentas criadas para esse fim, de modo a maximizar os testes feitos aumentando o número de resultados para análise.

Para os cálculos numéricos, foi criado um programa em linguagem FORTRAN 77. O FORTRAN é o antepassado de toda a linguagem científica de computadores. Seu nome deriva de “FORmula TRANslation”, já que a intenção dessa linguagem era traduzir equações matemáticas para códigos de computador.

O inventor da linguagem foi a IBM, que desenvolveu a primeira versão da linguagem entre os anos de 1954 e 1957. O FORTRAN foi revolucionário, pois antes dele todos os programas eram lentos, tendenciosos e originavam muitos erros.

A origem do FORTRAN 77 foi a partir da modernização da linguagem ocorrida a partir de 1970, onde houve um padrão lançado no ano de 1977.

Uma desvantagem do FORTRAN 77 é o fato do mesmo não gerar gráficos, não possuir funções de geração de imagens.

Para a parte do desenho de gráficos, foi desenvolvido um aplicativo que gera os gráficos necessários usando o software Matlab. Foi escrita uma função na linguagem Matlab que foi posteriormente compilada para a criação de um aplicativo executável.

O Matlab (MATrix LABoratory) é um software interativo de alta performance voltado para o cálculo numérico. O Matlab integra análise numérica, cálculo de matrizes, processamento de sinais e construção de gráficos em ambiente de fácil uso, onde problemas e soluções são expressos somente como eles são escritos matematicamente.

O Matlab foi desenvolvido no fim do ano de 1970, por Cleve Moler que era o então presidente do departamento de ciências da computação da Universidade de Novo México (EUA). Em 1984 o software foi reescrito para a linguagem C, quando foi criada a MathWorks.

A integração entre os dois softwares criados para o desenvolvimento dos testes numéricos foi realizada com arquivos que foram escritos pelo software desenvolvido

em FORTRAN e que são lidos pelo software desenvolvido em Matlab. Essa configuração permite uma autonomia entre os dois programas, evitando que ambos sejam alterados caso haja alguma mudança em alguma parte do algoritmo de um dos dois programas.

3 METODOLOGIA

A partir de dados conhecidos em n dimensões, que são valores em locais ξ pertencentes ao R^n e valores da função $f(\xi)$ pertencentes a R , procuram-se uma aproximação S para a função $f: R^n \rightarrow R$ tal que também:

$$S: R^n \rightarrow R$$

Os dados que geram s naturalmente se originam de f . Em geral, considera-se que os $f(\xi)$ são valores explícitos de uma função f que se conhece nesses pontos, mas cuja função como um todo é desconhecido ou pelo menos não é avaliável em toda parte do domínio. Essa função pode representar um potencial magnético sobre a superfície da terra, medidas de temperatura numa determinada área ou ainda a profundidade de água numa faixa do oceano. O significado físico é diverso e não importa para o problema de interpolação. O objetivo é sempre o mesmo: interpolar a função entre os locais (ou no entorno) em que a função é conhecida.

Quando a função não é conhecida, para propósitos de análise de convergência, postula-se a existência da f , tal que seus aproximantes S possam ser comparados e a qualidade da aproximação possa ser estimada.

Naturalmente, no presente contexto os aproximantes S são expressos como combinações lineares finitas de funções de base radial, e tais bases radiais são dadas em termos da distância euclidiana r entre os pontos ξ considerados (onde se dispõem dos $f(\xi)$) também chamados de pontos base de interpolação.

Os aproximantes (resultados da aplicação das funções de interpolação radial) são da seguinte forma:

$$s(x) = \sum_{\xi=1}^N \alpha_\xi F_\xi(r)$$

Onde x pertence a R^n e r é a distância euclidiana entre x e ξ . Vários exemplos podem ser encontrados para as funções interpolantes, como $F(r) = r$, $F(r) = r^2 \ln(r)$, e $F(r) = e^{-\alpha r^2}$.

A simetria radial é das mais importantes propriedades dessa classe de funções; o valor do aproximante depende tão somente da distância do argumento ao ponto

base e quaisquer rotações não influenciam seu resultado. Além disso, a norma euclidiana também se caracteriza por estabelecer valores sempre positivos para seus resultados. Contudo, outros fatores podem se tornar igualmente importantes: muitas vezes características de decaimento e suavidade podem ser tão fundamentais e, nesse sentido, certas funções, as radiais simples e cúbica, não são adequadas.

Como exemplo, serão feitas duas aproximações para a visualização de como é conduzida a aproximação com funções radiais. Em cada exemplo será montada a matriz do sistema linear que será resolvida usando o método de pivoteamento e a eliminação de Gauss para minimizar os erros de truncamento que surgirão nos cálculos numéricos.

Nas seções 3.1 e 3.2 são mostrados os exemplos de como são feitas as aproximações com funções radiais. Para esses exemplos, será usada a função radial simples ($F(r) = r$) para o cálculo das aproximações.

3.1 APROXIMAÇÃO UNIDIMENSIONAL

Nesse exemplo será feita uma aproximação de uma função qualquer onde são conhecidos dois pontos apenas, que são mostrados abaixo:

$$\text{Ponto 1} \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0$$

$$\text{Ponto 2} \rightarrow x = 1 \rightarrow y = 1$$

Com dois pontos, a equação de interpolação é da forma:

$$\bar{y}(x) = \alpha_1 F^1(x) + \alpha_2 F^2(x)$$

No caso, a função radial simples é da forma $F^i(x) = r = \sqrt{(x - x_i)^2}$, onde i indica o número do ponto de referência. Para essa aproximação, o sistema linear a ser criado será da forma:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$$

Onde r_{11} é a distância euclidiana do ponto 1 em relação ao próprio ponto 1, r_{12} a distância do ponto 1 ao ponto 2, r_{21} a distância do ponto 2 ao ponto 1 e r_{22} a distância do ponto 2 ao próprio ponto 2.

Abaixo são mostrados os cálculos de cada distância euclidiana:

$$\begin{aligned}r_{11} &= \sqrt{(0-0)^2} = 0 \\r_{12} &= \sqrt{(0-1)^2} = 1 \\r_{21} &= \sqrt{(1-0)^2} = 1 \\r_{22} &= \sqrt{(1-1)^2} = 0\end{aligned}$$

Substituindo os valores na matriz do sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Primeiramente, realiza-se o pivoteamento. Trocando a primeira linha do sistema pela segunda linha:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nesse caso não há a necessidade de realizar a eliminação de Gauss. Calculando os coeficientes:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 1 \\ \alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

Substituindo os coeficientes na equação de interpolação:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= 1 \cdot F^1(x) + 0 \cdot F^2(x) = F^1(x) \\ \bar{y} &= r_1\end{aligned}$$

3.2 APROXIMAÇÃO BIDIMENSIONAL

Para a aproximação bidimensional, a lógica de cálculo é a mesma da aproximação unidimensional.

Na aproximação bidimensional, são usados três pontos, que são mostrados abaixo:

$$\text{Ponto } 1 \rightarrow x = 0; y = 0 \rightarrow z = 1$$

$$\text{Ponto } 2 \rightarrow x = 1; y = 0 \rightarrow z = 1$$

$$\text{Ponto } 3 \rightarrow x = 0,5; y = 1 \rightarrow z = 1$$

Para essa aproximação, a equação de interpolação é da forma:

$$\bar{y}(x, y) = \alpha_1 F^1(x, y) + \alpha_2 F^2(x, y) + \alpha_3 F^3(x, y)$$

Para esse caso, a função radial simples é da forma

$$F^i(x, y) = r = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}, \text{ onde } i \text{ indica o número do ponto de referência.}$$

Essa aproximação possui o sistema linear da forma:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix}$$

O r_{11} é a distância euclidiana do ponto 1 em relação ao próprio ponto 1, e assim sucessivamente para os demais pontos, da mesma forma que foi mostrado no exemplo unidimensional.

Abaixo são mostrados os cálculos das distâncias euclidianas:

$$r_{11} = \sqrt{(0-0)^2 + (0-0)^2} = 0$$

$$r_{12} = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2} = 1$$

$$r_{13} = \sqrt{(0,5-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{1,25}$$

$$r_{21} = \sqrt{(0-1)^2 + (0-0)^2} = 1$$

$$r_{22} = \sqrt{(1-1)^2 + (0-0)^2} = 0$$

$$r_{23} = \sqrt{(0,5-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{1,25}$$

$$r_{31} = \sqrt{(0-0,5)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{1,25}$$

$$r_{32} = \sqrt{(1-0,5)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{1,25}$$

$$r_{33} = \sqrt{(0,5-0,5)^2 + (1-1)^2} = 0$$

Substituindo os valores na matriz do sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \sqrt{1,25} \\ 1 & 0 & \sqrt{1,25} \\ \sqrt{1,25} & \sqrt{1,25} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Primeiramente, realiza-se o pivoteamento. Trocando a primeira linha do sistema pela segunda linha e depois a primeira linha pela terceira linha:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{1,25} & \sqrt{1,25} & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{1,25} \\ 1 & 0 & \sqrt{1,25} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Para realizar a eliminação de Gauss, divide-se a primeira linha por $-\sqrt{1,25}$ e, posteriormente, essa linha dividida é somada com a terceira linha, tendo o resultado da soma alocado no espaço da terceira linha. Realizando esse cálculo:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{1,25} & \sqrt{1,25} & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{1,25} \\ 0 & -1 & \sqrt{1,25} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{1,25}} \end{bmatrix}$$

O próximo passo é somar a segunda linha com a terceira linha, colocando o resultado na terceira linha:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{1,25} & \sqrt{1,25} & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{1,25} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{1,25} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 - \frac{1}{\sqrt{1,25}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{2\sqrt{1,25} - 1}{\sqrt{1,25}} \end{bmatrix}$$

Com a eliminação de Gauss completada, podem-se calcular os coeficientes. Realizando os cálculos:

$$\alpha_1 = \frac{3}{2\sqrt{1,25}}$$

$$\alpha_2 = \frac{-1}{2\sqrt{1,25}}$$

$$\alpha_3 = \frac{2\sqrt{1,25} - 1}{2,5}$$

Substituindo os coeficientes na equação de interpolação:

$$\bar{y} = \frac{3}{2\sqrt{1,25}} \cdot F^1(x) + \frac{-1}{2\sqrt{1,25}} \cdot F^2(x) + \frac{2\sqrt{1,25} - 1}{2,5} \cdot F^3(x)$$

$$\bar{y} = \frac{3}{2\sqrt{1,25}} \cdot r_1 + \frac{-1}{2\sqrt{1,25}} \cdot r_2 + \frac{2\sqrt{1,25} - 1}{2,5} \cdot r_3$$

3.3 CONCLUSÃO

Percebe-se que as matrizes dos sistemas lineares das aproximações realizadas são simétricas, o que pode facilitar a implementação de métodos de resolução desses sistemas lineares, já que se conhece a forma dessas matrizes.

4 TESTES UNIDIMENSIONAIS

No início do estudo sobre o desempenho de aproximações por funções radiais, algumas funções algébricas de uma variável foram aproximadas para a familiarização de método e para o desenvolvimento de técnicas computacionais para o cálculo dos coeficientes das funções radiais, que serão exaustivamente utilizadas nos capítulos 5 e 6, nos testes bidimensionais.

As equações radiais utilizadas para a aproximação unidimensional são as funções radial simples e a radial cúbica, que são apresentadas, respectivamente, a seguir:

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$$

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$$

Para os testes, a função que será aproximada é $y = x^2 - 2x + 2$ e será tomado três pontos base dessa função no intervalo $[0;2]$.

O Gráfico 4-1 mostra o gráfico da parábola a ser aproximada pelas duas funções radiais consideradas no intervalo escolhido.

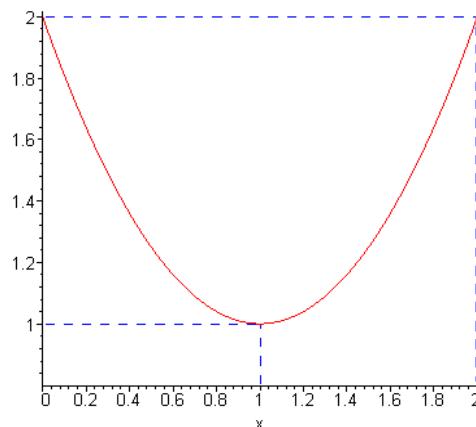


Gráfico 4-1 – Função $y = x^2 - 2x + 2$.

Os três pontos-base utilizados na aproximação são mostrados a seguir:

$$\begin{aligned}
 x = 0 &\rightarrow y = 2 \\
 x = 1 &\rightarrow y = 1 - 2 + 2 = 1 \\
 x = 2 &\rightarrow y = 4 - 4 + 2 = 2
 \end{aligned}$$

Para uma aproximação unidimensional utilizando três pontos-base, a função de interpolação é $y(x) = \alpha_1 F^1(x) + \alpha_2 F^2(x) + \alpha_3 F^3(x) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i F^i(x)$.

Na seção 4.1 são apresentados os resultados obtidos nessa aproximação, sendo os coeficientes da equação de aproximação obtidos de forma analítica.

4.1 RESULTADOS DA APROXIMAÇÃO

4.1.1 Aproximação com a função radial simples

Para os três pontos-base, o sistema linear a ser resolvido para a determinação dos coeficientes é:

$$\begin{aligned}
 y(0) &= \alpha_1 F^1(0) + \alpha_2 F^2(1) + \alpha_3 F^3(2) \\
 y(0) &= 2 = \alpha_1(0) + \alpha_2(1) + \alpha_3(2) \\
 y(1) &= 1 = \alpha_1(1) + \alpha_2(0) + \alpha_3(1) \\
 y(2) &= 2 = \alpha_1(2) + \alpha_2(1) + \alpha_3(0)
 \end{aligned}$$

Montando o sistema linear com as informações acima, determinam-se os três coeficientes da aproximação para a função radial simples:

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2} \\ \alpha_2 &= 1 \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Substituindo os coeficientes na equação de aproximação:

$$\bar{y} = \frac{F^1(x)}{2} + F^2(x) + \frac{F^3(x)}{2}$$

Para a verificação dos resultados, os pontos-base $x=0$ e $x=1$ são substituídos na equação de aproximação. O resultado obtido na substituição deve ser igual ao valor em y dos dois pontos-base utilizados no teste. Fazendo a substituição:

$$x = 0 \rightarrow 2 = \frac{(0)}{2} + (1) + \frac{(2)}{2} = 2$$

$$x = 1 \rightarrow 1 = \frac{(1)}{2} + (0) + \frac{(1)}{2} = 1$$

Percebe-se acima que a resposta esperada nesses dois pontos foi obtida, logo não houve erros na determinação dos coeficientes.

Os testes foram realizados utilizando os pontos $x=0,5$; $x=1,5$ e $x=2,5$; sendo o último ponto fora do intervalo de aproximação, o que poderia retornar valores não confiáveis. Os resultados desse teste são mostrados abaixo:

$$\bar{y}(0.5) = \frac{|0-0.5|}{2} + |1-0.5| + \frac{|2-0.5|}{2} = 1.5$$

$$\bar{y}(1.5) = \frac{|0-0.5|}{2} + |1-0.5| + \frac{|2-0.5|}{2} = 1.5$$

$$\bar{y}(2.5) = \frac{|0-0.5|}{2} + |1-0.5| + \frac{|2-0.5|}{2} = 3.25$$

Para avaliação da precisão, foram calculados de forma analítica os valores em y nos pontos que foram testados. Esses valores são mostrados abaixo:

$$y(0.5) = 1.25$$

$$y(1.5) = 1.25$$

$$y(2.5) = 3.25$$

O Gráfico 4-2 mostra o gráfico da interpolação com a função radial simples.

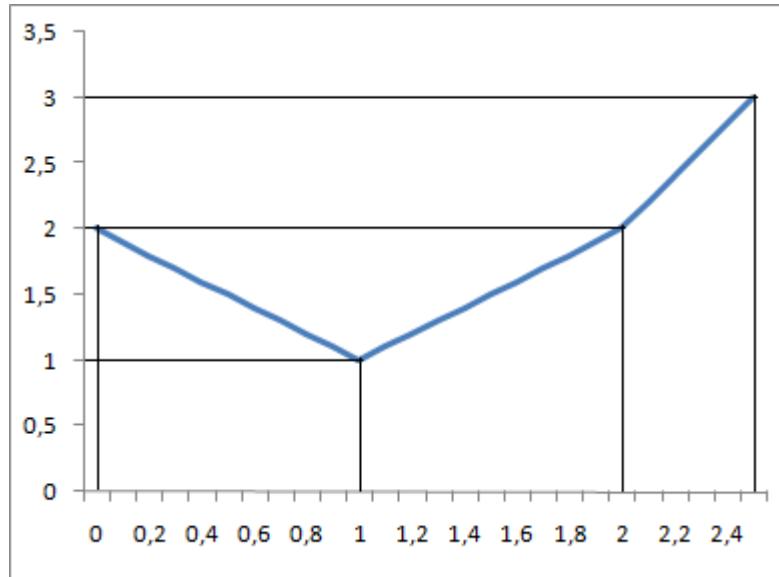


Gráfico 4-2 – Gráfico da interpolação pela função radial simples.

4.1.1.1 Conclusões

Nos testes pode-se perceber a falta de precisão desse tipo de interpolação com poucos pontos base e, também, o erro gerado para pontos dentro do próprio domínio de interpolação.

Fora a questão da precisão, não houve outros problemas nesse teste, pois o mesmo é apenas para a familiarização do método.

4.1.2 Aproximação com a função radial cúbica

Os mesmos pontos base de interpolação do teste da função radial simples são empregados nesse caso. Realizando os mesmos cálculos para a montagem do sistema linear do teste anterior:

$$\begin{aligned}
 y(0) &= 2 = \alpha_1 F^1(0) + \alpha_2 F^2(1) + \alpha_3 F^3(2) \\
 y(0) &= \alpha_1(0) + \alpha_2(1) + \alpha_3(8) \\
 y(1) &= 1 = \alpha_1(1) + \alpha_2(0) + \alpha_3(1) \\
 y(2) &= 2 = \alpha_1(8) + \alpha_2(1) + \alpha_3(0)
 \end{aligned}$$

Montando o sistema linear, os valores dos coeficientes são:

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2} \\ \alpha_2 = -2 \\ \alpha_3 = \frac{1}{2}$$

Substituindo os valores dos coeficientes na equação de interpolação:

$$\bar{y} = \frac{F^1(x)}{2} - 2F^2(x) + \frac{F^3(x)}{2}$$

Com a equação de interpolação determinada, são realizados os testes com os mesmos pontos do teste com a função radial simples. Os resultados obtidos são:

$$\begin{aligned} \bar{y}(0.5) &= \frac{|0-0.5|^3}{2} - 2|1-0.5|^3 + \frac{|2-0.5|^3}{2} = 1.5 \\ \bar{y}(1.5) &= \frac{|0-0.5|^3}{2} - 2|1-0.5|^3 + \frac{|2-0.5|^3}{2} = 1.5 \\ \bar{y}(2.5) &= \frac{|0-0.5|^3}{2} - 2|1-0.5|^3 + \frac{|2-0.5|^3}{2} = 1.125 \end{aligned}$$

A título de comparação, são exibidos novamente os resultados analíticos da função parabólica para os pontos testados.

$$\begin{aligned} y(0.5) &= 1.25 \\ y(1.5) &= 1.25 \\ y(2.5) &= 3.25 \end{aligned}$$

O Gráfico 4-3 representa o gráfico da função interpolada.

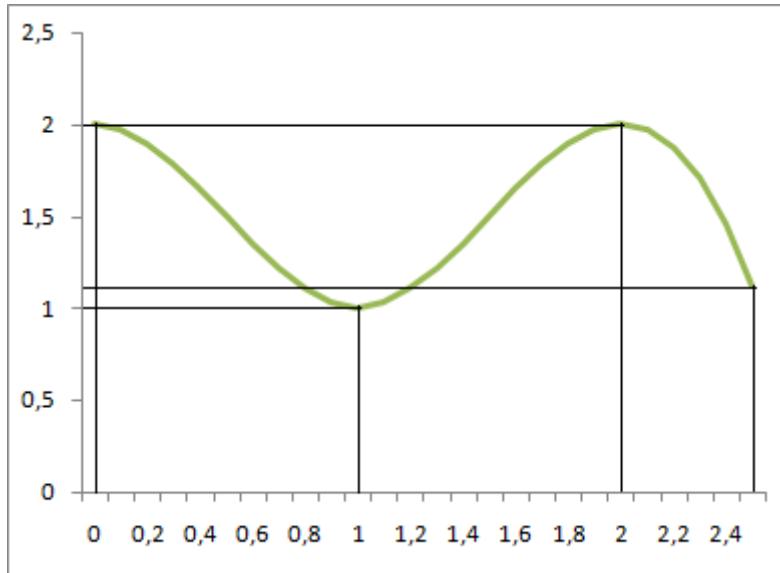


Gráfico 4-3 – Gráfico da interpolação pela função radial cúbica.

4.1.2.1 Conclusões

Nota-se que os resultados para a função radial simples e a cúbica foram idênticos para os pontos calculados, menos para o valor obtido no ponto extrapolado. Esse teste mostra a diferença entre a aproximação com funções radiais distintas. No interior do intervalo as aproximações são exatas nos pontos base, diferindo entre esses pontos por causa da forma da aproximação de cada função radial. Para os pontos fora do intervalo, há a possibilidade de ocorrer grandes erros no resultado.

4.1.3 Testes com cálculo de área

O objetivo deste teste é verificar a precisão da aproximação pelo cálculo da área abaixo da curva. Como proposição, considere a integral da função parabólica que foi aproximada:

$$\int_0^2 (x^2 - 2x + 2) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 2x \right]_0^2 = \frac{8}{3} - 4 + 4 = \frac{8}{3} \approx 2.7 \text{ u.a.}$$

Para o cálculo da área da função de interpolação radial simples:

$$A = \int_0^2 \left(\frac{|0-x|}{2} + |1-x| + \frac{|2-x|}{2} \right) dx$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^2 |-x| dx + \int_0^2 |1-x| dx + \frac{1}{2} \int_0^2 |2-x| dx$$

$$x^i - x = u$$

$$dx = -du$$

$$A = \frac{-1}{2} \int_0^{-2} |u| du - \int_1^0 |u| du - \int_0^{-1} |u| du - \frac{1}{2} \int_2^0 |u| du$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{-2} u du - \int_1^0 u du + \int_0^{-1} u du - \frac{1}{2} \int_2^0 u du$$

$$A = \frac{1}{2} \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^{-2} - \left[\frac{u^2}{2} \right]_1^0 + \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^{-1} - \frac{1}{2} \left[\frac{u^2}{2} \right]_2^0$$

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1$$

$$A = 3u.a.$$

Para o cálculo da função radial cúbica:

$$A = \int_0^2 \left(\frac{|0-x|^3}{2} - 2|1-x|^3 + \frac{|2-x|^3}{2} \right) dx$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^2 |-x|^3 dx - 2 \int_0^2 |1-x|^3 dx + \frac{1}{2} \int_0^2 |2-x|^3 dx$$

$$x^i - x = u \quad |u|^3 = |u^3|$$

$$dx = -du$$

$$A = \frac{-1}{2} \int_0^{-2} |u^3| du + 2 \int_1^0 |u^3| du + 2 \int_0^{-1} |u^3| du - \frac{1}{2} \int_2^0 |u^3| du$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{-2} u^3 du + 2 \int_1^0 u^3 du - 2 \int_0^{-1} u^3 du - \frac{1}{2} \int_2^0 u^3 du$$

$$A = \frac{1}{2} \left[\frac{u^4}{4} \right]_0^{-2} + 2 \left[\frac{u^4}{4} \right]_1^0 - 2 \left[\frac{u^4}{4} \right]_0^{-1} - \frac{1}{2} \left[\frac{u^4}{4} \right]_2^0$$

$$A = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 2$$

$$A = 3u.a.$$

4.1.3.1 Conclusões

Esses resultados mostram que a aproximação convergiu para um resultado próximo do real, além que a área foi a mesma para as duas equações radiais. Como os resultados pontuais e os volumes foram iguais nos dois casos, poderia haver a conclusão de que as aproximações são idênticas, porém, deve-se analisar o gráfico gerado. Analisando os gráficos, percebe-se que as duas aproximações foram diferentes, exceto para os pontos analisados e os pontos externos ao domínio da função.

Esses testes foram importantes para a verificação que a extrapolação com funções radiais podem fornecer resultados muito diferentes do real e também que a forma da curva aproximada muda com a função radial escolhida.

5 TESTES BIDIMENSIONAIS COM VOLUMES

A interpolação radial bidimensional envolve a aproximação de uma função escalar $f(x,y)$ na forma:

$$f(x, y) \equiv \sum_{j=1}^n \alpha^j F^j(x, y) = \alpha^1 F^1(x, y) + \alpha^2 F^2(x, y) + \dots + \alpha^n F^n(x, y)$$

Na expressão anterior, n é a quantidade de pontos base de interpolação, F^j são as funções de interpolação, α^j são os coeficientes das funções e (x, y) é a norma usada para o argumento da função de interpolação. Essa norma é a distância euclidiana entre os pontos base e os pontos escolhidos do domínio, como mostrado abaixo:

$$(x, y)^i = r(X^i; x, y) = \sqrt{(x^i - x)^2 + (y^i - y)^2}$$

Por conveniência, a cota z é a função de x e y a ser calculada:

$$z(x, y) = f(x, y) \equiv \sum_{j=1}^n \alpha^j F^j(x, y)$$

Para o estudo do desempenho das interpolações radiais em duas dimensões escolheu-se determinar o volume sob a superfície gerada por $z(x, y)$ num determinado domínio bidimensional:

$$V = \int_A z dA = \iint f(x, y) dx dy = \iint \alpha^j F^j(r) dx dy$$

O comportamento bidimensional das funções radiais depende da ordem da função, da classe da função a ser interpolada e da quantidade de pontos base tomados para a interpolação. Assim, será necessário empregar um procedimento numérico simples e eficaz para determinar o volume gerado pelas interpolações radiais. Escolheu-se com esse propósito a “Regra 1/3 de Simpson”, cujas características são apresentadas com detalhes na seção 5.1.

As aproximações serão realizadas com os campos a seguir, utilizando pontos esparsos como será representado na seção 5.2:

$$z(x, y) = 1$$

$$z(x, y) = x$$

$$z(x, y) = xy$$

$$z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$$

5.1 MÉTODO DE CÁLCULO NUMÉRICO: REGRA 1/3 DE SIMPSON

Esta regra integra uma função qualquer $f(x)$, aproximando essa função por um polinômio de Lagrange de segundo grau utilizando três pontos igualmente espaçados. A Figura 5-1 ilustra o comportamento do método no caso unidimensional:

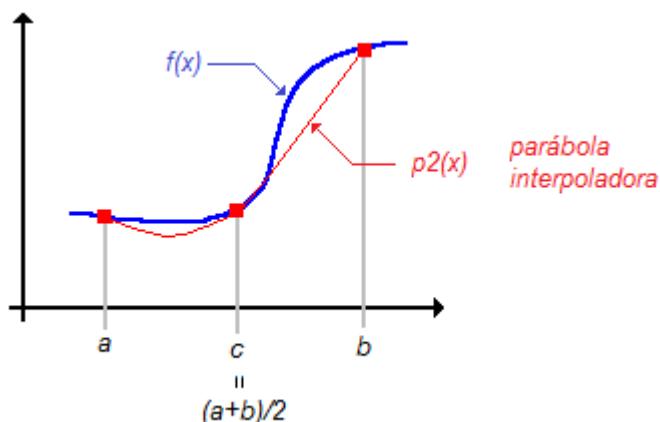


Figura 5-1 – Comportamento unidimensional da Regra 1/3 de Simpson.

A integral associada à Regra é da forma:

$$I_2[f(x)] = A_0 f(a) + A_1 f(c) + A_2 f(b)$$

Os coeficientes A0, A1 e A2 são obtidos através das seguintes fórmulas:

$$A_0 = \int_a^b l_0(x) dx = \int_a^b \frac{x-a}{a-b} \frac{x-c}{a-c} dx = \frac{h}{3}$$

$$A_1 = \int_a^b l_1(x) dx = \int_a^b \frac{x-b}{b-a} \frac{x-c}{b-c} dx = \frac{4h}{3}$$

$$A_2 = \int_a^b l_2(x)dx = \int_a^b \frac{x-a}{c-a} \frac{x-b}{c-b} dx = \frac{h}{3}$$

Onde, $h = \frac{(b-a)}{m}$ e, nesse caso $m = 2$.

Assim, obtém-se a Regra 1/3 de Simpson:

$$I_2 = \frac{h}{3} [f(a) + 4f(c) + f(b)]$$

Para a resolução numérica de integrais múltiplas, o procedimento é particionado. No caso de uma integral dupla:

$$I = \int_c^d \int_a^b F(x, y) dx dy$$

Aplica-se primeiramente a Regra de Simpson na integral interna:

$$I \approx \int_c^d \frac{h}{3} \left(F(a, y) + 4F\left(\frac{a+b}{2}, y\right) + F(b, y) \right) dy$$

A função resultante é uma função apenas de y dentro de uma integral em relação à y , logo podemos utilizar novamente a Regra de Simpson desta vez na direção y :

$$I \approx \frac{h}{3} \frac{k}{3} \left[\left(F(a, c) + 4F\left(\frac{a+b}{2}, c\right) + F(b, c) \right) + 4 \left(F\left(a, \frac{d+c}{2}\right) + 4F\left(\frac{a+b}{2}, \frac{d+c}{2}\right) + F\left(b, \frac{d+c}{2}\right) \right) + \left(F(a, d) + 4F\left(\frac{a+b}{2}, d\right) + F(b, d) \right) \right]$$

$$I \approx \frac{hk}{9} \left[\left(F(a, c) + 4F\left(\frac{a+b}{2}, c\right) + F(b, c) \right) + 4 \left(F\left(a, \frac{d+c}{2}\right) + 4F\left(\frac{a+b}{2}, \frac{d+c}{2}\right) + F\left(b, \frac{d+c}{2}\right) \right) + \left(F(a, d) + 4F\left(\frac{a+b}{2}, d\right) + F(b, d) \right) \right]$$

Onde $h = \frac{(a-b)}{m} = \frac{(a-b)}{2}$ e $k = \frac{(d-c)}{m} = \frac{(d-c)}{2}$.

5.1.1 Técnicas de aumento da precisão do método

Para o aumento da precisão, é feita uma subdivisão do domínio. Essa subdivisão reparte o domínio em n partes, sendo que em cada subdivisão é calculado o volume. Como o intervalo de integração da Regra de Simpson é diminuído, o método consegue “enxergar” pequenas oscilações na aproximação do campo, deixando o volume global mais preciso. As subdivisões do domínio são representadas esquematicamente na Figura 5-2.

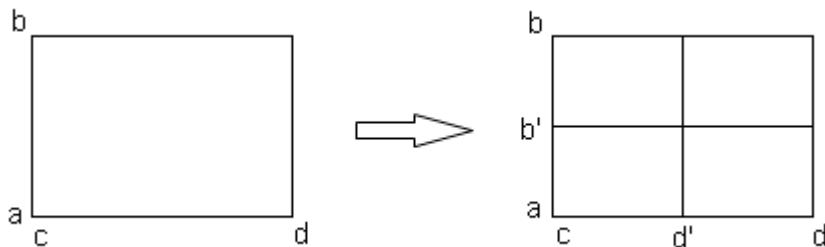


Figura 5-2 – Representação da subdivisão do domínio bidimensional.

O volume total é calculado como a soma dos volumes em cada subdivisão:

$$V = \sum_{i=1}^{sub} \sum_{j=1}^{sub} V(i, j)$$

Como os campos apresentados possuem domínio bidimensional retangular, a aplicação da regra será facilitada, pois não haverá imprecisões geradas devido a aproximações no contorno.

5.1.2 Estimativa do erro máximo de integração

Como toda aproximação, esta regra possui um erro ao aproximar a função $f(x)$ em um polinômio e integrá-lo. Pode-se determinar esse erro através de uma equação que será deduzida a seguir.

Seja o erro:

$$E(x) = |f(x)| - |P_2(x)|$$

Assim sendo, tem-se que:

$$E = R(h) = \int_{x_i-h}^{x_i+h} f(x)dx - \int_{x_i-h}^{x_i+h} P_2(x)dx, \text{ onde } x_i \text{ é o valor médio do intervalo } [a;b]$$

Portanto:

$$R(h) = \int_{x_i-h}^{x_i+h} f(x)dx - \frac{h}{3} [f(x_i-h) + 4f(x_i) + f(x_i+h)]$$

Seja:

$$\psi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Então:

$$\frac{d\psi}{dx}(x) = f(x)$$

Logo:

$$\begin{aligned} R'(h) &= f(x_i+h) + f(x_i-h) - \frac{1}{3} [f(x_i-h) + 4f(x_i) + f(x_i+h)] - \frac{h}{3} [f'(x_i+h) - f'(x_i-h)] \\ \therefore R'(h) &= -\frac{2}{3} [f(x_i+h) + f(x_i-h)] - \frac{4}{3} f(x_i) - \frac{h}{3} [f'(x_i+h) - f'(x_i-h)] \end{aligned}$$

Analogamente obtém-se:

$$R''(h) = \frac{1}{3} [f'(x_i+h) - f'(x_i-h)] - \frac{h}{3} [f''(x_i+h) + f''(x_i-h)]$$

$$R'''(h) = -\frac{h}{3} [f'''(x_i+h) - f'''(x_i-h)]$$

De acordo com o Teorema do Valor Médio, numa função contínua no intervalo fechado $[a;b]$ e diferenciável no intervalo aberto $(a;b)$, existe um ponto c em $(a;b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{(b-a)}$$

Ou então:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Reescrevendo a equação acima:

$$R'''(h) = -\frac{2}{3}h^2 f^{(4)}(\varepsilon_3)$$

Na qual $\varepsilon_3 \in (a; b)$. Sabendo que $R(0) = R'(0) = R''(0) = 0$, pois $R^z(h) = qh^p$, em que q e p são números quaisquer. Realizou-se então a integração da equação anterior, como se segue:

$$R''(h) = R''(0) + \int_0^h R'''(t)dt = -\frac{2}{3} \int_0^h t^2 f^{(4)}(\varepsilon_3)dt$$

$$R''(h) = -\frac{2}{3} f^{(4)}(\varepsilon_3) \int_0^h t^2 dt = -\frac{2}{9} h^3 f^{(4)}(\varepsilon_2) , \text{ sendo } \varepsilon_2 \in (a; b)$$

$$R'(h) = R'(0) + \int_0^h R''(t)dt = -\frac{2}{9} \int_0^h t^3 f^{(4)}(\varepsilon_2)dt$$

$$R''(h) = -\frac{2}{9} f^{(4)}(\varepsilon_2) \int_0^h t^3 dt = -\frac{1}{18} h^4 f^{(4)}(\varepsilon_1) , \text{ em que } \varepsilon_1 \in (a; b)$$

$$R(h) = R(0) + \int_0^h R'(t)dt = -\frac{1}{18} \int_0^h t^4 f^{(4)}(\varepsilon_1)dt$$

$$R(h) = -\frac{1}{18} f^{(4)}(\varepsilon_1) \int_0^h t^4 dt = -\frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\mu) , \text{ considerando } \mu \in (a; b)$$

Assim:

$$E = -\frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\mu) , \text{ onde } \mu \in (a; b)$$

Nos casos onde μ não é conhecido, pode-se calcular o erro máximo da integração de $f(x)$ através de:

$|E_t| \leq \frac{h^5}{90} \max|f^{(4)}(x)|$, em que $x \in [a; b]$ e $\max|f^{(4)}(x)|$ é o valor máximo da derivada à quarta de $f(x)$.

No caso de uma integral múltipla, a equação acima nos dá o erro de integração em uma direção e o erro total é a soma dos erros em cada direção da integral. A equação pode ser usada, pois no caso de integrações e derivações em relação a uma dimensão, as outras dimensões são tomadas como constantes. Por exemplo, para uma integral dupla qualquer:

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy$$

O erro total máximo da integração é:

$$|E_t| \leq \frac{h^5}{90} \max |f_{xxxx}(x, y)| + \frac{k^5}{90} \max |f_{yyyy}(x, y)|, \text{ onde } k = \frac{(d-c)}{m} \text{ e } h = \frac{(b-a)}{m}.$$

Tomando como exemplo a equação de interpolação radial mais simples, pode-se determinar o erro máximo cometido nessa aproximação. Deve-se primeiro calcular a derivada dessa equação de interpolação em relação a x e em relação a y . Calculando primeiramente a derivada à quarta em relação a x :

$$f(x, y) = f = \sum_{i=1}^n \alpha_i [(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2]^{grau/2}$$

Chamando $(x_i - x)$ de v e $v^2 + (y_i - y)^2$ de u , temos a função radial:

$$f(x, y) = f = \sum_{i=1}^n \alpha_i [u]^{grau/2}$$

Pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

Em que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

Logo:

$$f' = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left\{ \left(\frac{grau}{2} \right) [u]^{\frac{grau}{2}-1} \right\} \cdot [-2v]$$

$$f' = -(grau) \sum_{i=1}^n \alpha_i v [u]^{\frac{grau}{2}-1}$$

$$f^{(2)} = -(grau) \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x} \left[v [u]^{\frac{grau}{2}-1} \right]$$

A partir deste caso, a regra da cadeia é:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

Sendendo $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$.

$$f^{(2)} = -(grau) \sum_{i=1}^n \alpha_i \left\{ \left[-[u]^{\frac{grau}{2}-1} \right] + \left[\left(\frac{grau}{2} - 1 \right) [u]^{\frac{grau}{2}-2} (-2v) \right] \right\}$$

$$f^{(2)} = (grau) \sum_{i=1}^n \alpha_i \left[[u]^{\frac{grau}{2}-1} + 2v \left(\frac{grau}{2} - 1 \right) [u]^{\frac{grau}{2}-2} \right]$$

$$f^{(3)} = (grau) \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x} \left[[u]^{\frac{grau}{2}-1} + 2v \left(\frac{grau}{2} - 1 \right) [u]^{\frac{grau}{2}-2} \right]$$

$$f^{(3)} = (grau) \sum_{i=1}^n \alpha_i \left\{ \begin{aligned} & -2 \left(\frac{grau}{2} - 1 \right) [u]^{\frac{grau}{2}-2} - \left(\frac{grau}{2} - 1 \right) [u]^{\frac{grau}{2}-2} + \\ & + 2v \left(\frac{grau}{2} - 1 \right) \left(\frac{grau}{2} - 2 \right) [u]^{\frac{grau}{2}-3} (-2v) \end{aligned} \right\}$$

$$f^{(3)} = -(grau) \sum_{i=1}^n \alpha_i \left[3 \left(\frac{grau}{2} - 1 \right) [u]^{\frac{grau}{2}-2} + 4v^2 \left(\frac{grau}{2} - 1 \right) \left(\frac{grau}{2} - 2 \right) [u]^{\frac{grau}{2}-3} \right]$$

$$f^{(4)} = -(grau) \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x} \left[3 \left(\frac{grau}{2} - 1 \right) [u]^{\frac{grau}{2}-2} + 4v^2 \left(\frac{grau}{2} - 1 \right) \left(\frac{grau}{2} - 2 \right) [u]^{\frac{grau}{2}-3} \right]$$

$$f^{(4)} = -(grau) \sum_{i=1}^n \alpha_i \left\{ \begin{aligned} & -8v \left(\frac{grau}{2} - 1 \right) \left(\frac{grau}{2} - 2 \right) [u]^{\frac{grau}{2}-3} + \\ & + 3 \left(\frac{grau}{2} - 1 \right) \left(\frac{grau}{2} - 2 \right) [u]^{\frac{grau}{2}-3} (-2v) + \\ & + 4v^2 \left(\frac{grau}{2} - 1 \right) \left(\frac{grau}{2} - 2 \right) \left(\frac{grau}{2} - 3 \right) [u]^{\frac{grau}{2}-4} (-2v) \end{aligned} \right\}$$

$$f^{(4)} = (grau) \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x} \left[\begin{aligned} & 14v \left(\frac{grau}{2} - 1 \right) \left(\frac{grau}{2} - 2 \right) [u]^{\frac{grau}{2}-3} + \\ & + 8v^3 \left(\frac{grau}{2} - 1 \right) \left(\frac{grau}{2} - 2 \right) \left(\frac{grau}{2} - 3 \right) [u]^{\frac{grau}{2}-4} \end{aligned} \right]$$

$$f^{(4)} = (grau) \left(\frac{grau}{2} - 1 \right) \left(\frac{grau}{2} - 2 \right) \sum_{i=1}^n \alpha_i v \left[14[u]^{\frac{grau}{2}-3} + 8v^3 \left(\frac{grau}{2} - 3 \right) [u]^{\frac{grau}{2}-4} \right]$$

Substituindo u e v :

$$f^{(4)} = \left(grau \left(\frac{grau}{2} - 1 \right) \left(\frac{grau}{2} - 2 \right) \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i - x) \left[\begin{array}{l} 14[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2]^{\frac{grau}{2} - 3} + \\ + 8(x_i - x)^2 \left(\frac{grau}{2} - 3 \right) [(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2]^{\frac{grau}{2} - 4} \end{array} \right] \right)$$

Pela estrutura simétrica da função radial, a derivação na direção y vai dar um resultado semelhante ao encontrado para o resultado em x , logo:

$$f^{(4)} = \left(grau \left(\frac{grau}{2} - 1 \right) \left(\frac{grau}{2} - 2 \right) \sum_{i=1}^n \alpha_i (y_i - y) \left[\begin{array}{l} 14[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2]^{\frac{grau}{2} - 3} + \\ + 8(y_i - y)^2 \left(\frac{grau}{2} - 3 \right) [(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2]^{\frac{grau}{2} - 4} \end{array} \right] \right)$$

Em cada subintervalo encontram-se os pontos mínimos e máximos das derivadas e os aplicam na fórmula do erro, calculando, assim, o erro máximo que é gerado na aproximação da integral pelo Método de Simpson.

No caso das subdivisões de domínio para o aumento da precisão na integração, o erro total é a soma do erro em todas as subdivisões dos subdomínios.

5.2 NOMECLATURA DOS ARQUIVOS DE ENTRADA

Para a interpolação e cálculo do volume em um campo com pontos esparsos, foi desenvolvido um programa na linguagem de programação FORTRAN. Para a correta leitura dos valores dos pontos esparsos nos campos, foi criado um padrão para os arquivos de entrada do programa.

O nome padronizado dos arquivos segue uma seqüência, que é: "Pontos(K)(J).m". O "K" representa a identificação do campo a ser aproximado e o "J" é a identificação do domínio, que varia de acordo com o número de pontos base presentes no mesmo. Essa identificação é numérica, como será mais bem explicada a seguir.

Nos arquivos "Pontos1(J).m" o campo a ser interpolado é o $z(x, y) = 1$; para os arquivos "Pontos2(J).m", o campo é $z(x, y) = x$; para os arquivos do tipo "Pontos3(J).m", o campo aproximado é $z(x, y) = xy$ e, para os arquivos "Pontos4(J).m", o campo escolhido é $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$.

A quantidade de pontos base de interpolação é um fator importante, bem como a sua localização. O índice “J” indica essa quantidade e localização dos pontos de domínio da função que ficam armazenados nos arquivos de entrada.

Para os arquivos do tipo “Pontos(K)1.m”, a Figura 5-3 representa o número e a localização dos oito pontos base utilizados para a realização da aproximação dos quatro campos considerados.

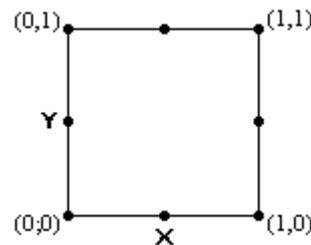


Figura 5-3 – Domínio dos arquivos do tipo “Pontos(X)1.m”.

Já para os arquivos do tipo “Pontos(K)2.m”, a Figura 5-4 representa as características dos nove pontos base utilizados.

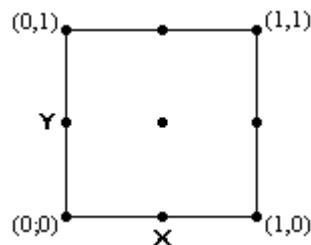


Figura 5-4 – Domínio dos arquivos do tipo “Pontos(X)2.m”.

Para os arquivos do tipo “Pontos(K)3.m”, a Figura 5-5 representa as características dos dezesseis pontos base utilizados.

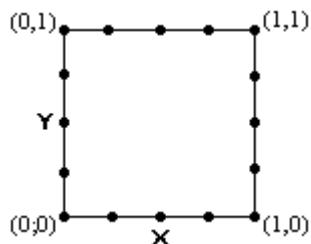


Figura 5-5 – Domínio dos arquivos do tipo “Pontos(X)3.m”.

Os arquivos do tipo “Pontos(K)4.m” representam o domínio de treze pontos base explicitado na Figura 5-6.

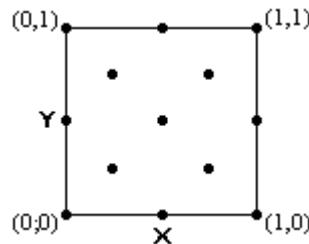


Figura 5-6 – Domínio dos arquivos do tipo “Pontos(X)4.m”.

Por fim, os arquivos do tipo “Pontos(K)5.m” representam o domínio de vinte e cinco pontos base contido na Figura 5-7.

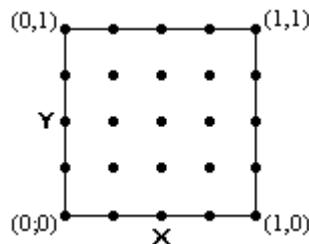


Figura 5-7 – Domínio dos arquivos do tipo “Pontos(X)5.m”.

Como exemplo, o arquivo com o nome “Pontos15.m” armazena as coordenadas dos pontos base representados na Figura 5-7, sendo o campo a que esses pontos dizem respeito o $z(x, y) = 1$.

5.3 VOLUMES ANALÍTICOS NOS CASOS ESCOLHIDOS

Para a determinação do erro, é necessário conhecer o volume analítico de cada campo a ser aproximado. A seguir é apresentado o cálculo analítico para a determinação do volume real necessário:

5.3.1 Volume do campo $z(x, y) = 1$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^1 (1) dy dx \\ V &= \int_0^1 [x]_0^1 dy = \int_0^1 (1) dy \\ V &= [y]_0^1 = 1u.v. \end{aligned}$$

5.3.2 Volume do campo $z(x, y) = x$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^1 (x) dy dx \\ V &= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 dy = \int_0^1 (0.5) dy \\ V &= 0.5 \left([y]_0^1 \right) = 0.5u.v. \end{aligned}$$

5.3.3 Volume do campo $z(x, y) = xy$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^1 (xy) dy dx \\ V &= \int_0^1 \left[\frac{x^2 y^2}{2} \right]_0^1 dy = \int_0^1 (0.5y) dy \\ V &= 0.5 \left(\left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 \right) = 0.25u.v. \end{aligned}$$

5.3.4 Volume do campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^1 \int_0^1 \left((x-0.5)^2 + (y+0.5)^2 \right) dy dx = \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} \left((u)^2 + (v)^2 \right) du dv \\
 V &= \int_{-0.5}^{0.5} \left[\frac{u^3}{3} \right]_{-0.5}^{0.5} + \left[uv^2 \right]_{-0.5}^{0.5} dv = \int_{-0.5}^{0.5} \left(\frac{0.5^2}{3} + v^2 \right) dv \\
 V &= \left[\frac{0.5^2 v}{3} \right]_{-0.5}^{0.5} + \left[\frac{v^3}{3} \right]_{-0.5}^{0.5} = \frac{1}{6} u \cdot v.
 \end{aligned}$$

5.4 TESTES SIMPLES COM FUNÇÕES RADIAIS

Neste teste foram aproximados os campos com algumas funções radiais. As equações utilizadas para a interpolação dos quatro campos considerados são exibidas a seguir:

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$$

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$$

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-r_i}$$

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1+r_i)^3}$$

Os resultados obtidos são mostrados como seguem, sendo exibido o gráfico da função e uma tabela com o volume calculado e seu erro quando se divide o domínio em 1, 10, 100 ou 1000 divisões na direção X e em Y para a realização da integração numérica.

5.4.1 Resultados para o campo $z(x, y) = 1$

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$

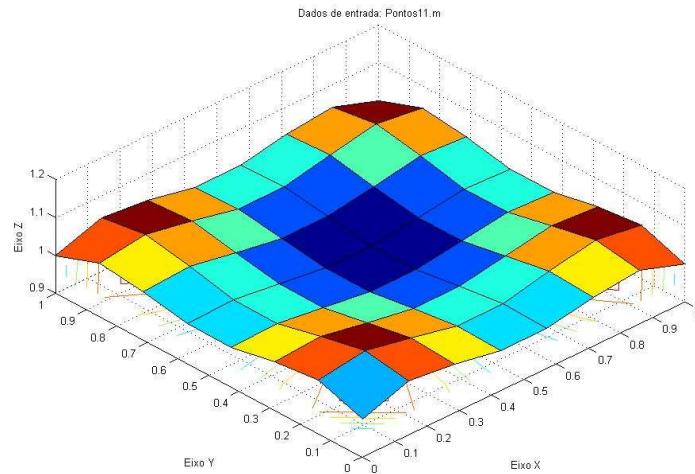


Gráfico 5-1 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos11.m”.

Tabela 5-1 – Resultados para o arquivo “Pontos11.m”.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.987318993	1.01838553	1.0183841	1.01997781
Erro (u.v.)	0.012681007	0.01838553	0.0183841	0.01997781

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-r_i}$

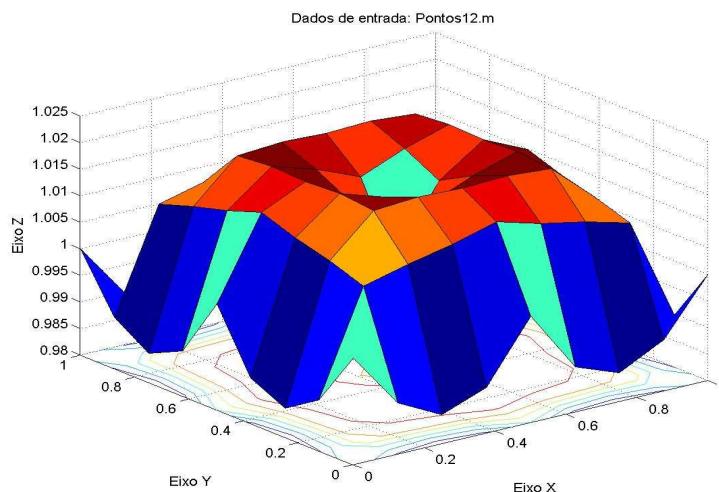


Gráfico 5-2 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos12.m”.

Tabela 5-2 – Resultados para o arquivo “Pontos12.m”.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	1	1.01027644	1.01028323	1.01042855
Erro (u.v.)	0	0.01027644	0.01028323	0.01042855

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$

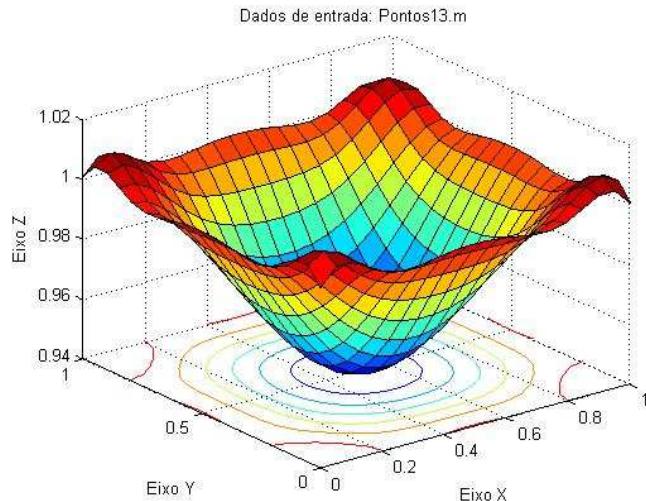


Gráfico 5-3 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos13.m”.

Tabela 5-3 – Resultados para o arquivo “Pontos13.m”.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.973705053	0.980388045	0.980392873	0.98232168
Erro (u.v.)	0.026294947	0.019611955	0.019607127	0.01767832

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$

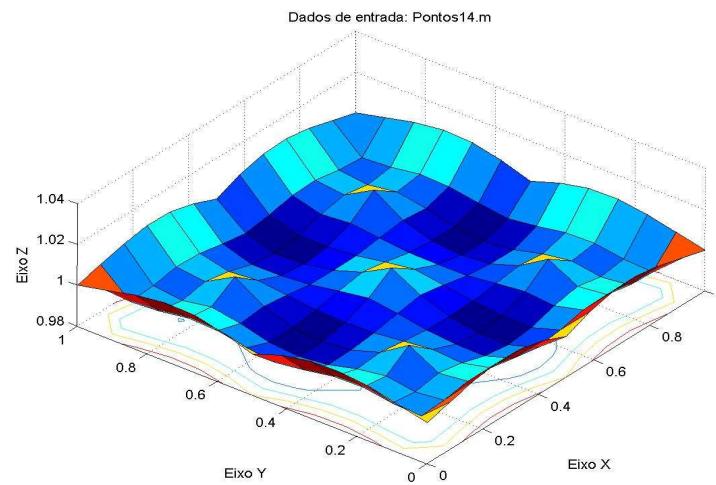


Gráfico 5-4 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos14.m”.

Tabela 5-4 – Resultados para o arquivo “Pontos14.m”.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	1.00000036	0.99193871	0.99188447	1.00109017
Erro (u.v.)	0.00000036	0.00806129	0.00811553	0.00109017

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1 + r_i)^3}$

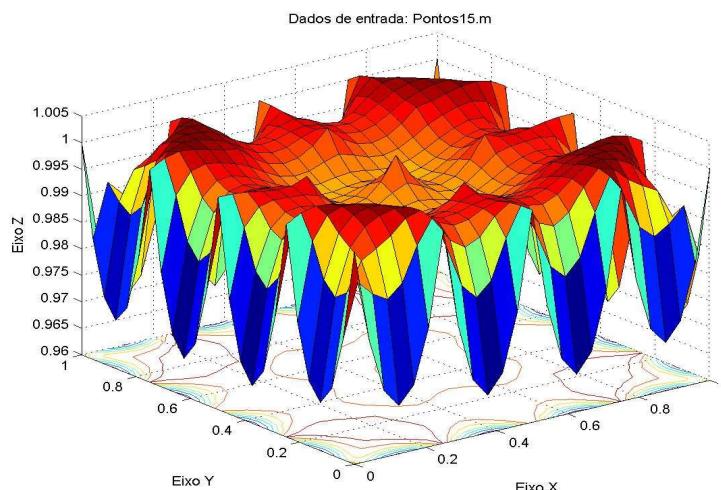


Gráfico 5-5 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos15.m”.

Tabela 5-5 – Resultados para o arquivo “Pontos15.m”.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	1.00000012	0.995070219	0.995038033	1.00057256
Erro (u.v.)	0.00000012	0.004929781	0.004961967	0.00057256

5.4.2 Resultados para o campo $z(x, y) = x$

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$

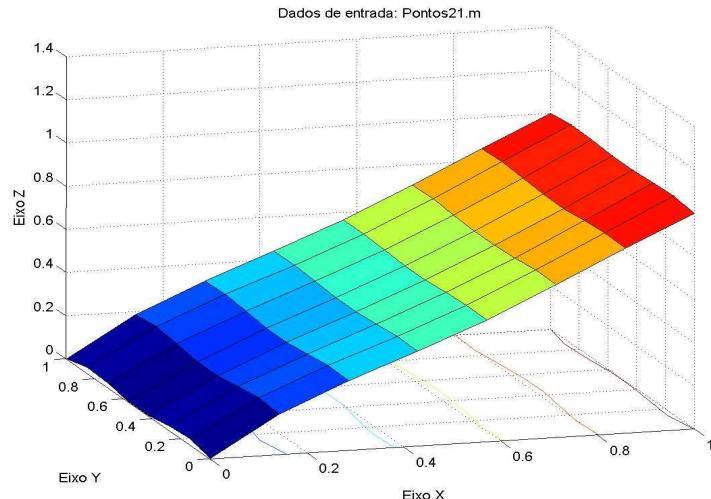


Gráfico 5-6 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos21.m”.

Tabela 5-6 – Resultados para o arquivo “Pontos21.m”.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.493659288	0.509192526	0.509192944	0.509190202
Erro (u.v.)	0.006340712	0.009192526	0.009192944	0.009190202

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-r_i}$

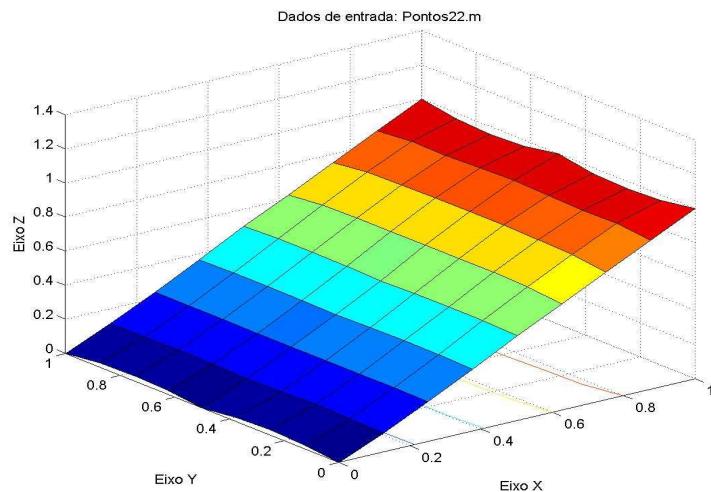


Gráfico 5-7 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos22.m”.

Tabela 5-7 – Resultados para o arquivo “Pontos22.m”.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.5	0.505138278	0.505142808	0.505132198
Erro (u.v.)	0	0.0051138278	0.005142808	0.005132198

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1 + r_i)^3}$

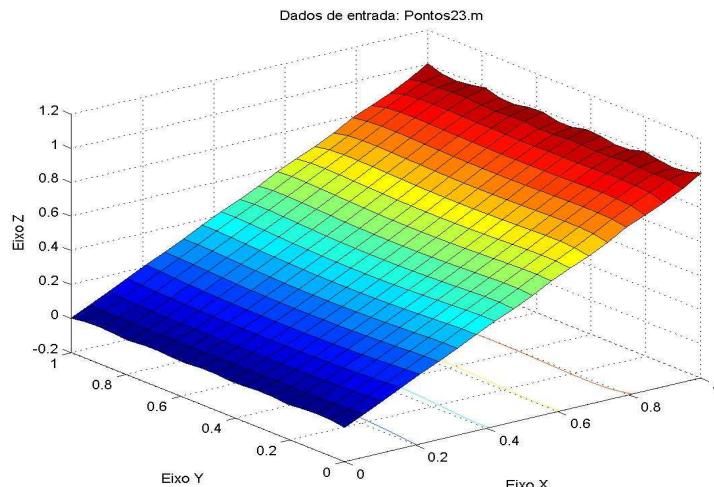


Gráfico 5-8 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos23.m”.

Tabela 5-8 – Resultados para o arquivo “Pontos23.m”.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.482669979	0.491618484	0.491653174	0.491634101
Erro (u.v.)	0.017330021	0.008381516	0.008346826	0.008365899

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-r_i}$

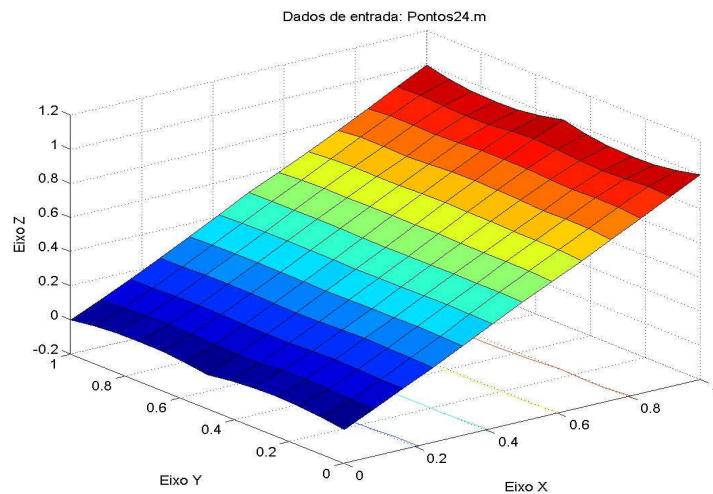


Gráfico 5-9 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos24.m”.

Tabela 5-9 – Resultados para o arquivo “Pontos24.m”.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.50000006	0.500761569	0.500776708	0.500774622
Erro (u.v.)	0.00000006	0.000761569	0.000776908	0.000774622

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$

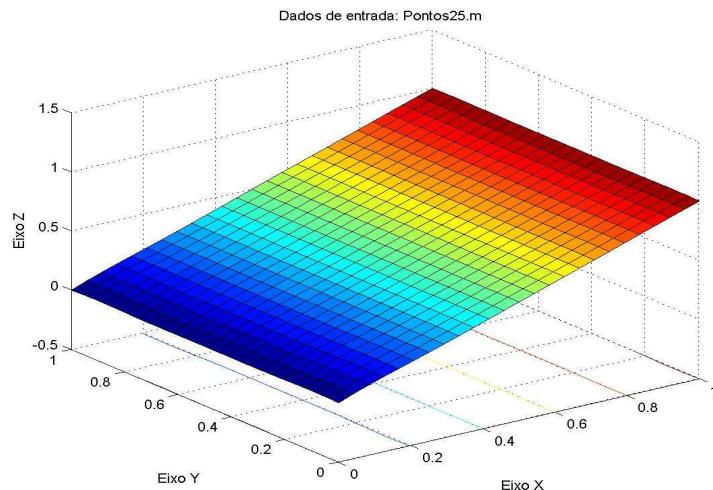


Gráfico 5-10 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos25.m”.

Tabela 5-10 – Resultados para o arquivo “Pontos25.m”.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.5	0.497535169	0.497519791	0.497563332
Erro (u.v.)	0	0.002464831	0.002480209	0.002436668

5.4.3 Resultados para o campo $z(x, y) = xy$

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$

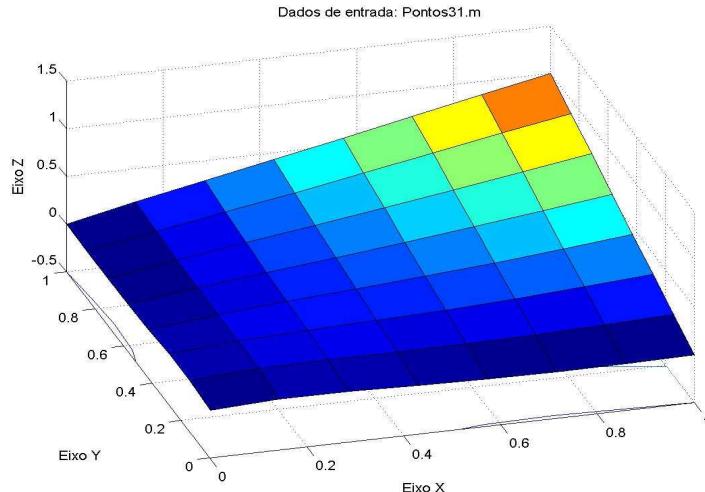


Gráfico 5-11 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos31.m”.

Tabela 5-11 – Resultados para o arquivo “Pontos31.m”.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.246829674	0.254596323	0.25467211	0.254668146
Erro (u.v.)	0.003170326	0.004596323	0.00467211	0.004668146

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-r_i}$

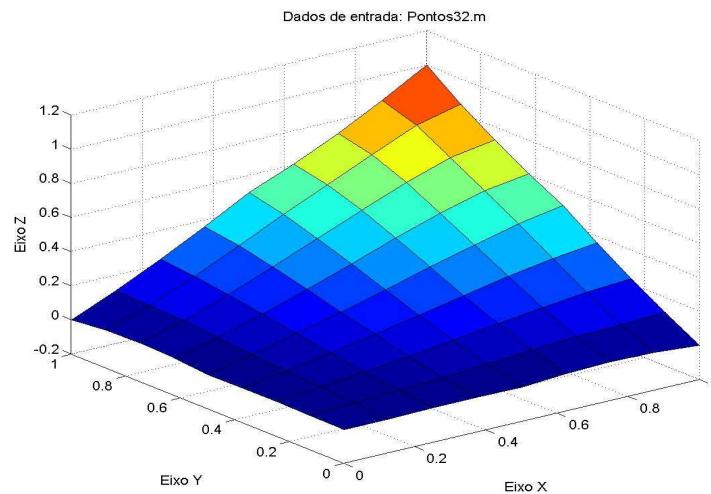


Gráfico 5-12 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos32.m”.

Tabela 5-12 – Resultados para o arquivo “Pontos32.m”.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.25	0.252569139	0.252570719	0.252566785
Erro (u.v.)	0	0.002569139	0.002570719	0.002566785

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1 + r_i)^3}$

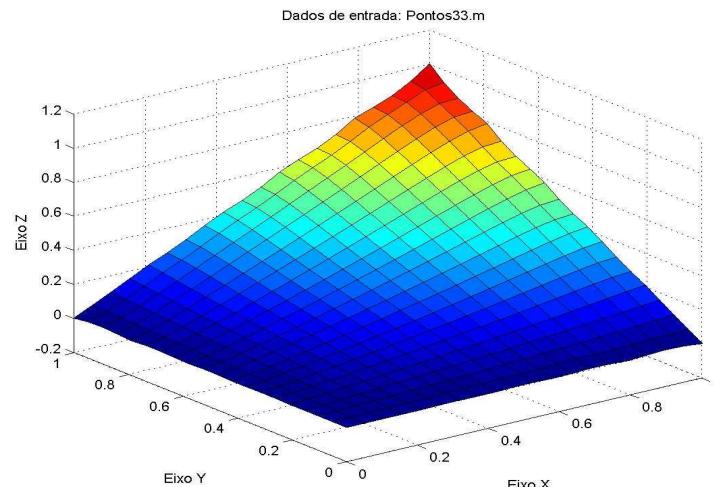


Gráfico 5-13 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos33.m”.

Tabela 5-13 – Resultados para o arquivo “Pontos33.m”.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.24133499	0.245809272	0.245826468	0.245822981
Erro (u.v.)	0.00866501	0.004190728	0.004173532	0.004177019

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-r_i}$

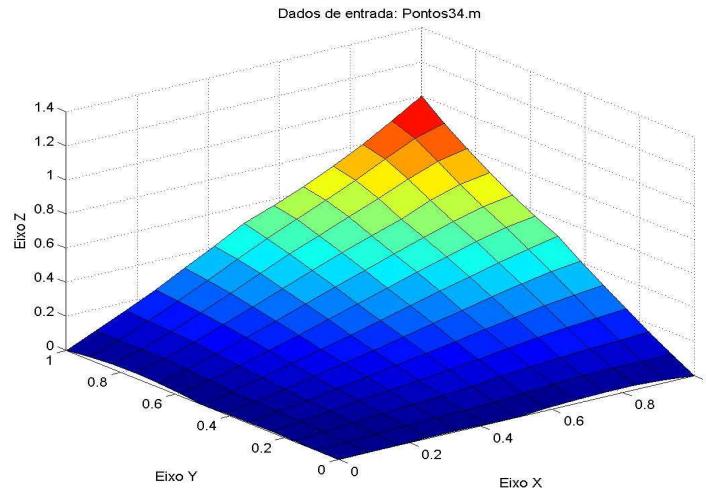


Gráfico 5-14 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos34.m”.

Tabela 5-14 – Resultados para o arquivo “Pontos34.m”.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.25000003	0.250380844	0.250388354	0.250384718
Erro (u.v.)	0.00000003	0.000380844	0.000388354	0.000384718

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$

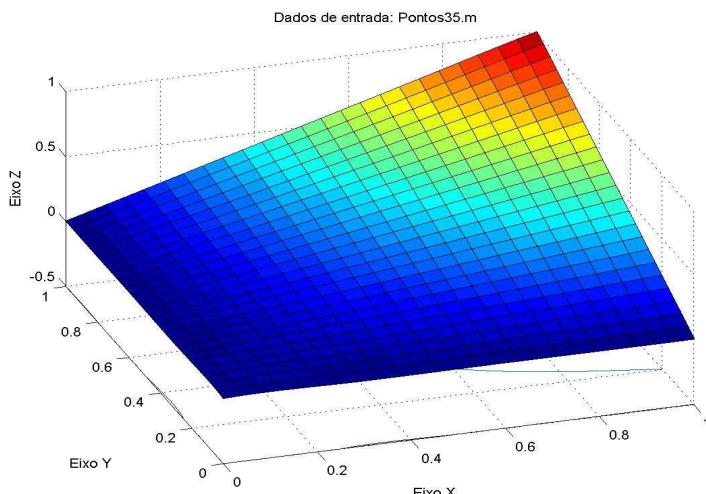


Gráfico 5-15 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos35.m”.

Tabela 5-15 – Resultados para o arquivo “Pontos35.m”.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.250007004	0.250586003	0.250586569	0.250580281

Erro (u.v.)	0.000007004	0.000586003	0.000586569	0.000580281
--------------	-------------	-------------	-------------	-------------

5.4.4 Resultados para o campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$

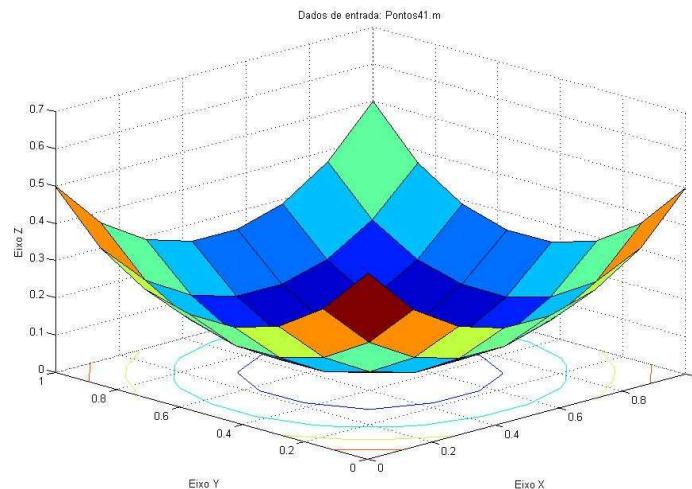


Gráfico 5-16 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos41.m”.

Tabela 5-16 – Resultados para o arquivo “Pontos41.m”.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.285842776	0.298593253	0.298606753	0.298130631
Erro (u.v.)	0.119176109	0.131926586	0.131940086	0.131463964

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$

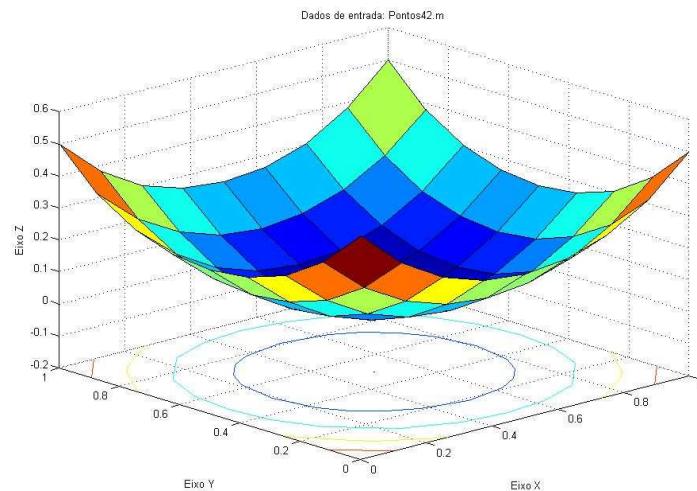


Gráfico 5-17 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos42.m”.

Tabela 5-17 – Resultados para o arquivo “Pontos42.m”.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.1666666657	0.162220597	0.162219703	0.162209377
Erro (u.v.)	0.000000009	0.004446069	0.004446963	0.004457289

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$

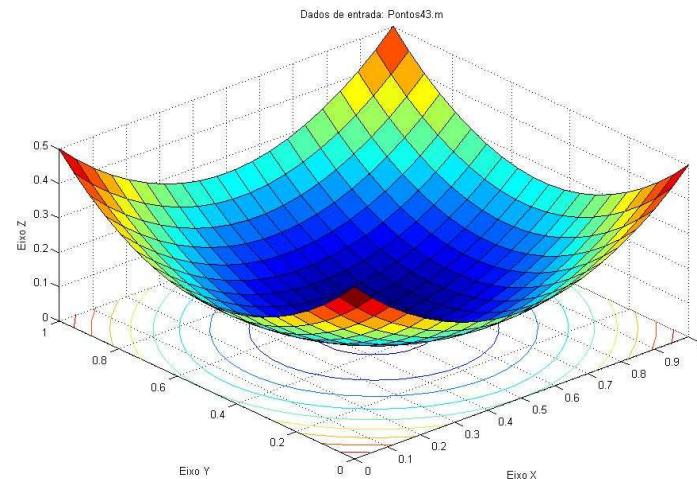


Gráfico 5-18 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos43.m”.

Tabela 5-18 – Resultados para o arquivo “Pontos43.m”.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.181092739	0.179084137	0.179083183	0.179085627
Erro (u.v.)	0.014426072	0.01241747	0.012416516	0.01241896

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$

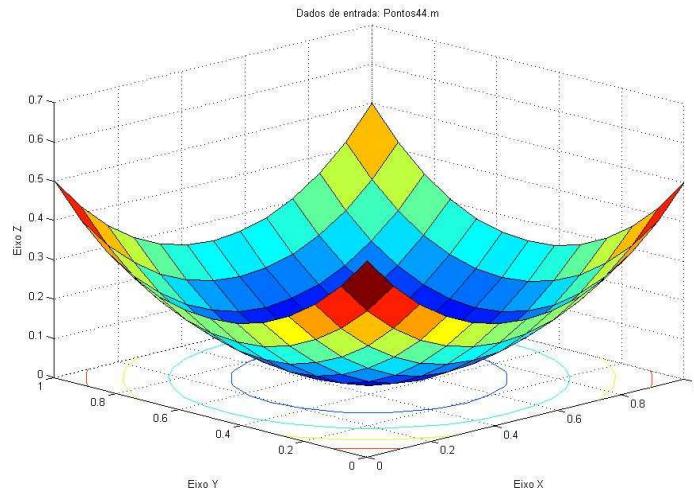


Gráfico 5-19 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos44.m”.

Tabela 5-19 – Resultados para o arquivo “Pontos44.m”.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.166666701	0.165471822	0.165471807	0.165462151
Erro (u.v.)	0.000000034	0.001194844	0.001194859	0.001204515

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$

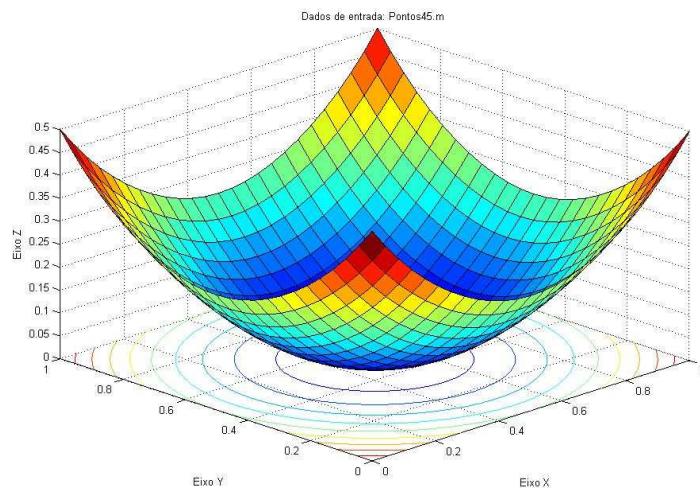


Gráfico 5-20 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos45.m”.

Tabela 5-20 – Resultados para o arquivo “Pontos45.m”.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.166679248	0.166319802	0.166318178	0.166307971
Erro (u.v.)	0.000012581	0.000346864	0.000348488	0.000358695

5.4.5 Conclusão

Com as aproximações, pode-se concluir que a equação que retornou o maior número de resultados mais precisos foi a radial cúbica.

É fácil de perceber que em algumas aproximações houve pontos de inflexão. Isso ocorre porque a função radial e a malha respectiva não aproximam muito bem o campo interpolado, porém pela colocação de pontos internos, a aproximação é forçada a ser exata nos pontos base, gerando as inflexões.

Nas seções seguintes serão mostradas tentativas de melhora da aproximação gerada por funções de base radial.

5.5 TESTES COM A DERIVADA PARCIAL EM RELAÇÃO A X E A Y

Esse teste foi feito desenhando os gráficos das derivadas parciais em relação às direções X e Y das melhores equações em cada uma das malhas mostradas na seção 5.4.

A derivada parcial em uma dada direção em uma superfície mostra como esta função varia em relação à direção adotada em cada ponto, ou seja, se ela é crescente ou decrescente em relação a X e a Y no ponto considerado.

Nas seções seguintes é mostrado o cálculo analítico da derivada das equações radiais usadas anteriormente.

5.5.1 Derivada das funções radiais

$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$ e $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$

As derivadas parciais, tendo em vista a simetria entre as parcelas nas direções X e Y da expressão, tornam-se visualmente semelhantes nessas direções. Porém, pelo conjunto de pontos, numericamente as derivadas em relação a X e Y podem diferir, como será mostrado posteriormente.

Generalizando a expressão, nomeia-se de “grau” o grau da função radial que, no caso, há uma de 1º grau e outra de 3º grau. Essa mudança permite que seja derivada apenas uma equação. Desenvolvendo a derivada parcial em relação à X:

$$\begin{aligned}
 f &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot r^{grau} \\
 f &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{grau/2} \\
 \frac{\partial f}{\partial x} &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \frac{grau}{2} \cdot [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{grau-2/2} \cdot 2(x - x_i) \\
 \frac{\partial f}{\partial x} &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot grau \cdot [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{grau-2/2} \cdot (x - x_i) \\
 \frac{\partial f}{\partial x} &= grau \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot r^{grau-2/2} \cdot (x - x_i)
 \end{aligned}$$

Onde, para a função radial simples:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot r^{-1/2} \cdot (x - x_i)$$

E, para a função radial cúbica:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot r^{1/2} \cdot (x - x_i)$$

Como a função radial é simétrica em relação a X e Y, a derivada parcial em relação a Y para a função radial simples e radial cúbica, respectivamente, é:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot r^{-1/2} \cdot (y - y_i)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3 \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot r_i^{1/2} \cdot (y - y_i)$$

5.5.2 Derivada da função radial $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-r_i}$

Para a exponencial, a derivada parcial em relação à X:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot e^{-r_i} \\ f &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot e^{-\sqrt{[(x_i - x)^2 + (y_i - 1)^2]}} \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-\sqrt{[(x_i - x)^2 + (y_i - 1)^2]}} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= -\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \frac{(x_i - x) \cdot e^{-r_i}}{\sqrt{[(x_i - x)^2 + (y_i - 1)^2]}} \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= -\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \frac{(x_i - x) \cdot e^{-r_i}}{r_i} \end{aligned}$$

E, pela característica simétrica da função radial, a derivada parcial em relação à Y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \frac{(y_i - y) \cdot e^{-r_i}}{r_i}$$

5.5.3 Derivada da função radial $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1 + r_i)^3}$

A derivada parcial em relação à X para essa função radial é:

$$f = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1+r_i)^3}$$

$$f = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\left(1 + \sqrt{[(x_i - x)^2 + (y_i - 1)^2]}\right)^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{\alpha_i}{\left(1 + \sqrt{[(x_i - x)^2 + (y_i - 1)^2]}\right)^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \frac{-3.2 \cdot (x_i - x)}{\left(1 + \sqrt{[(x_i - x)^2 + (y_i - 1)^2]}\right)^2 \cdot \sqrt{[(x_i - x)^2 + (y_i - 1)^2]}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -6 \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \frac{(x_i - x)}{(1+r_i)^3 \cdot r_i}$$

E, pela simetria da função radial, a derivada em relação à Y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -6 \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \frac{(y_i - y)}{(1+r_i)^3 \cdot r_i}$$

5.5.4 Resultados para o campo $z(x, y) = 1$

Derivadas da equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$

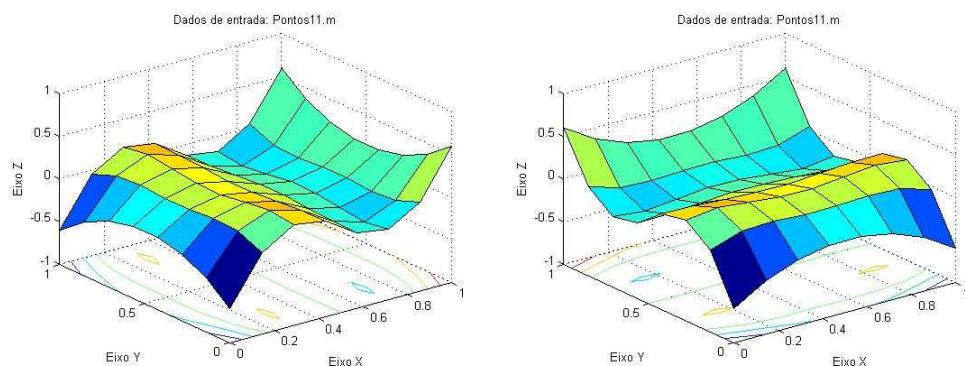


Gráfico 5-21 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos11.m”.

Derivadas da equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-r_i}$

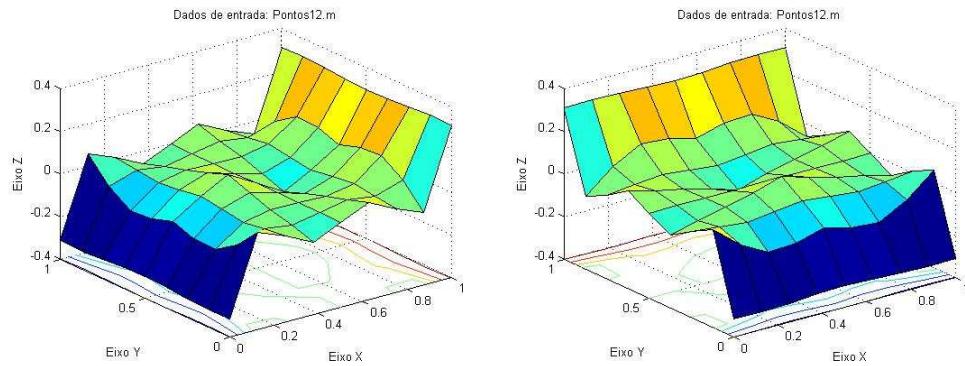


Gráfico 5-22 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos12.m”.

Derivadas da equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$

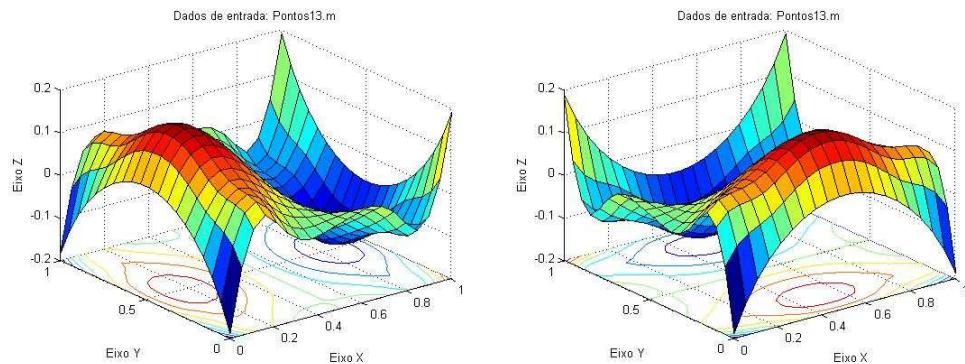


Gráfico 5-23 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos13.m”.

Derivadas da equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$

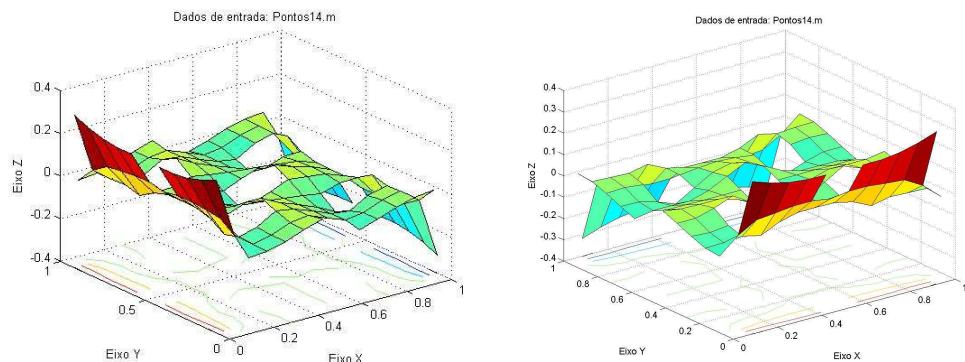


Gráfico 5-24 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos14.m”.

Derivadas da equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1+r_i)^3}$

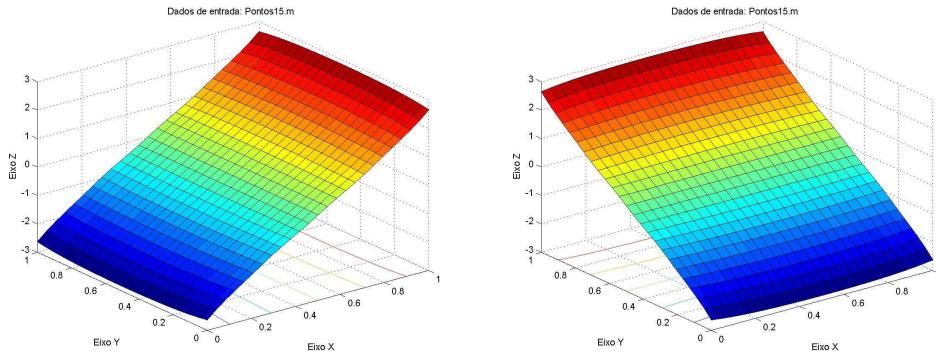


Gráfico 5-25 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos15.m”.

5.5.5 Resultados para o campo $z(x, y) = x$

Derivadas da equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$

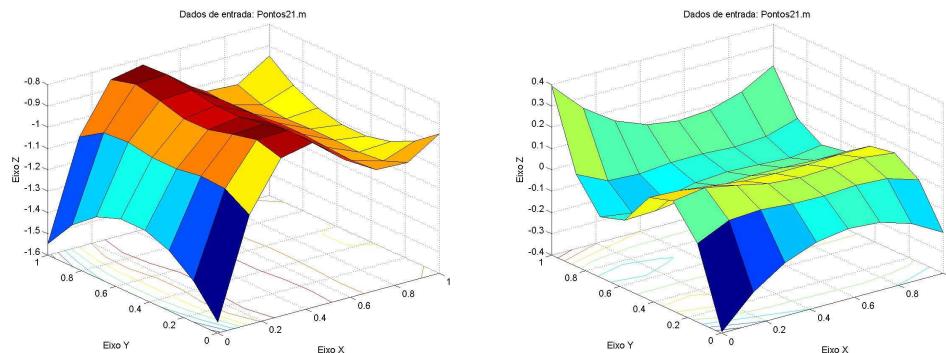


Gráfico 5-26 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos21.m”.

Derivadas da equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-r_i}$

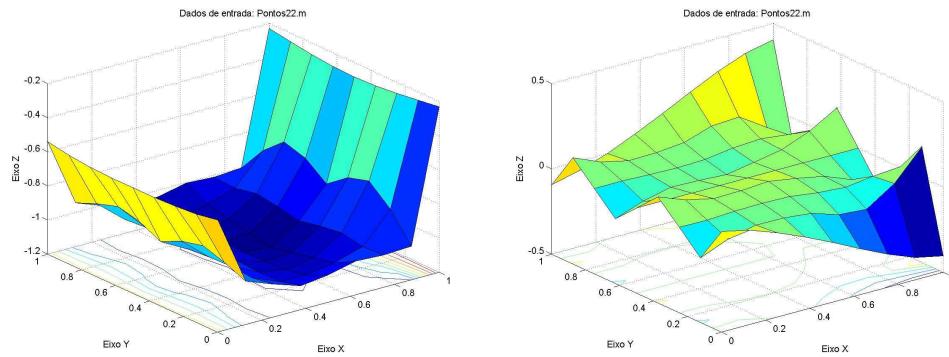


Gráfico 5-27 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos22.m”.

Derivadas da equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1+r_i)^3}$

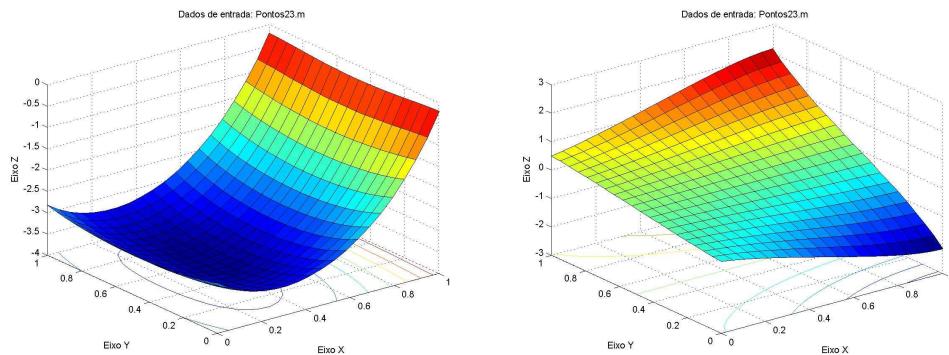


Gráfico 5-28 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos23.m”.

Derivadas da equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-r_i}$

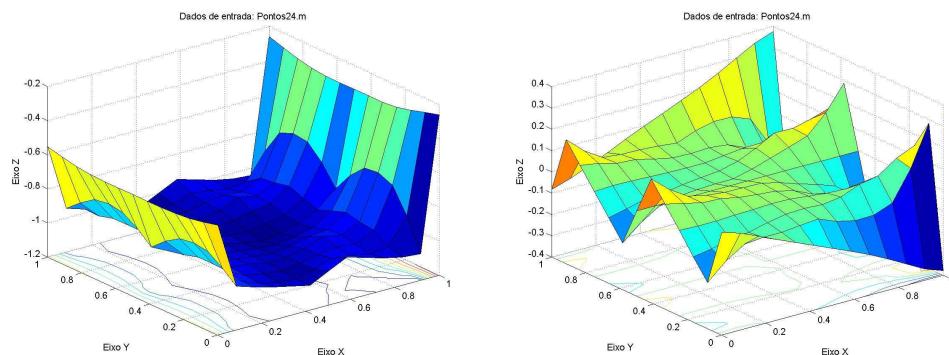


Gráfico 5-29 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos24.m”.

Derivadas da equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$

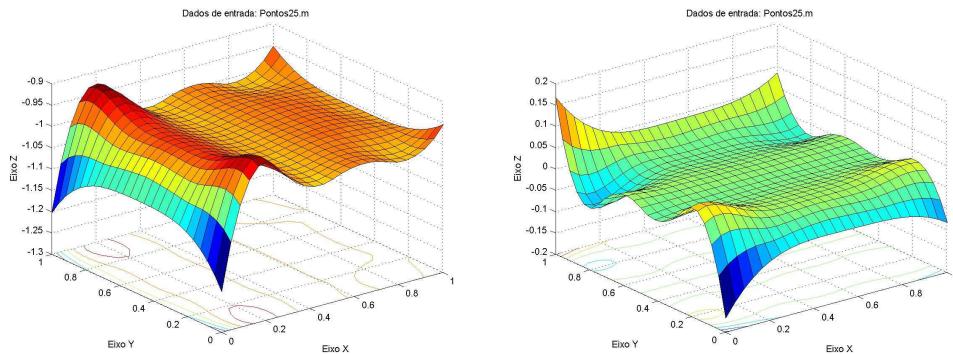


Gráfico 5-30 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos25.m”.

5.5.6 Resultados para o campo $z(x, y) = xy$

Derivadas da equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$

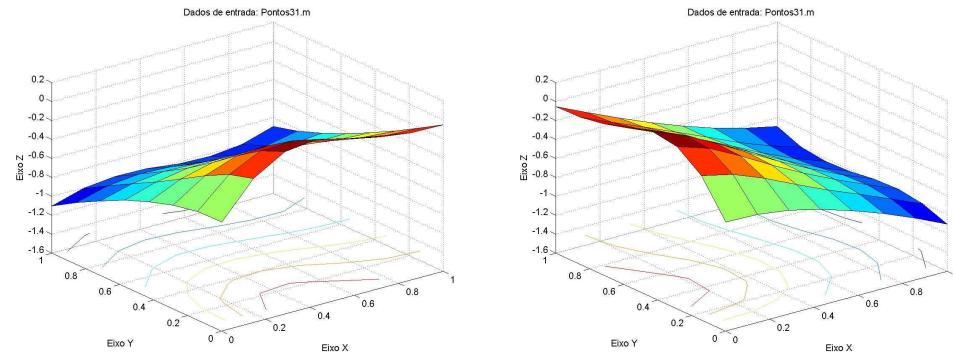


Gráfico 5-31 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos31.m”.

Derivadas da equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-r_i}$

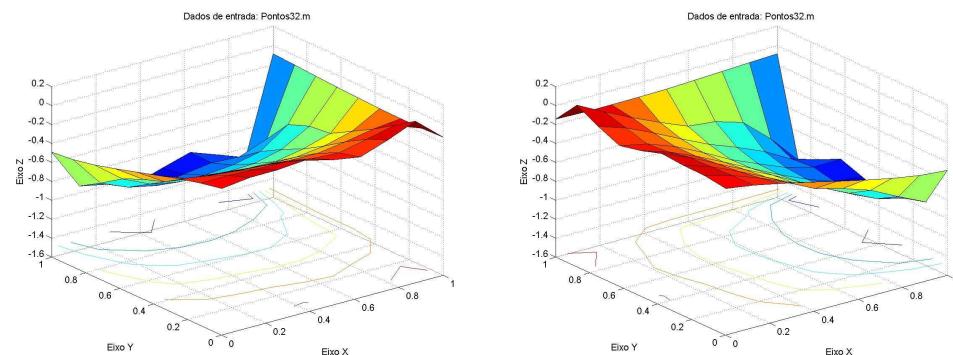


Gráfico 5-32 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos32.m”.

Derivadas da equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1+r_i)^3}$

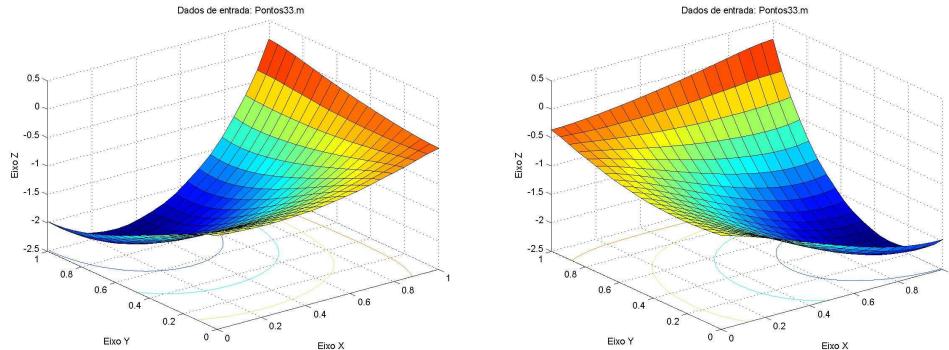


Gráfico 5-33 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos33.m”.

Derivadas da equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-r_i}$

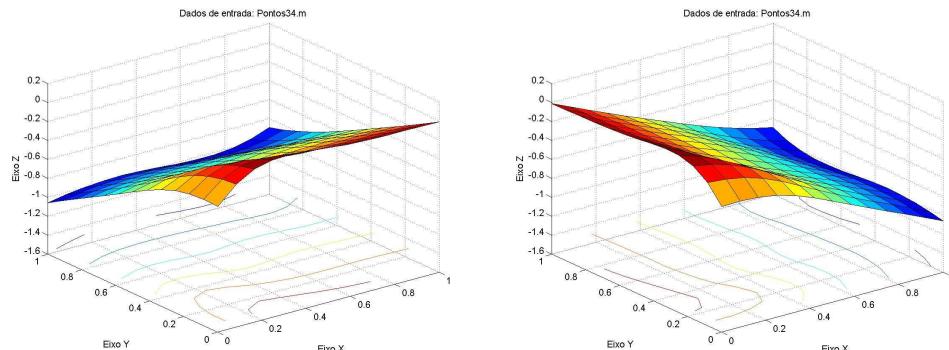


Gráfico 5-34 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos34.m”.

Derivadas da equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$

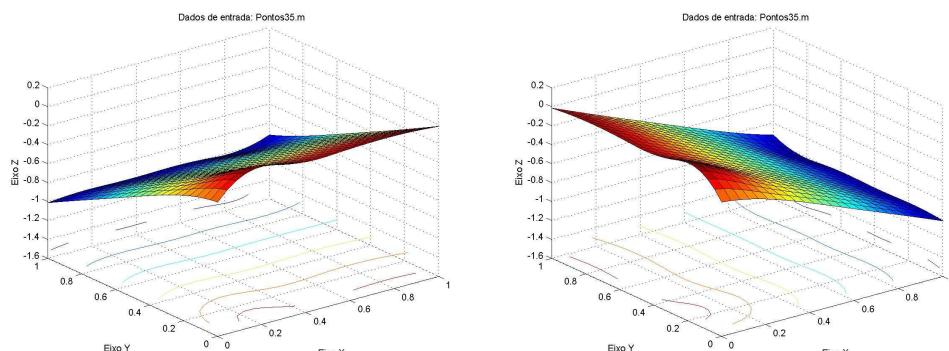


Gráfico 5-35 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos35.m”.

5.5.7 Resultados para o campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$

Derivadas da equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$

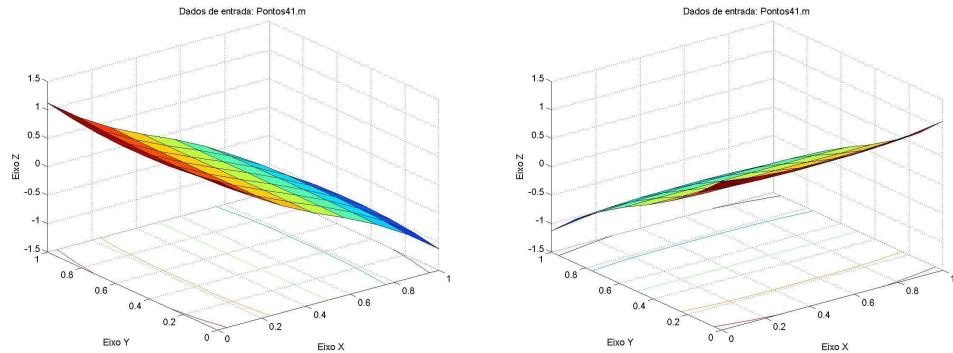


Gráfico 5-36 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos41.m”.

Derivadas da equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$

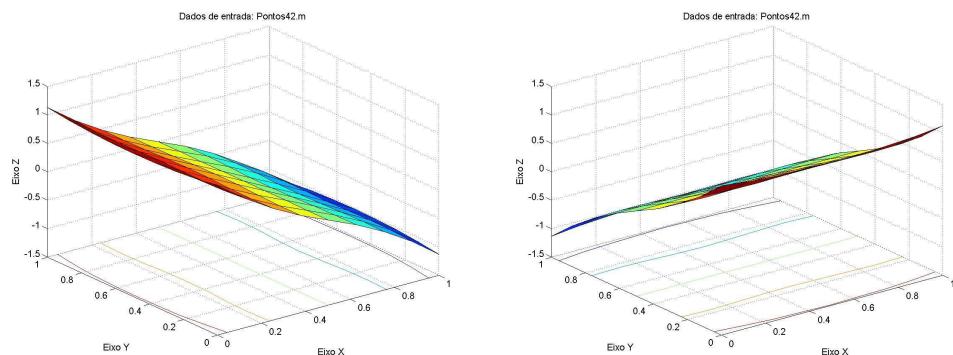


Gráfico 5-37 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos42.m”.

Derivadas da equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$

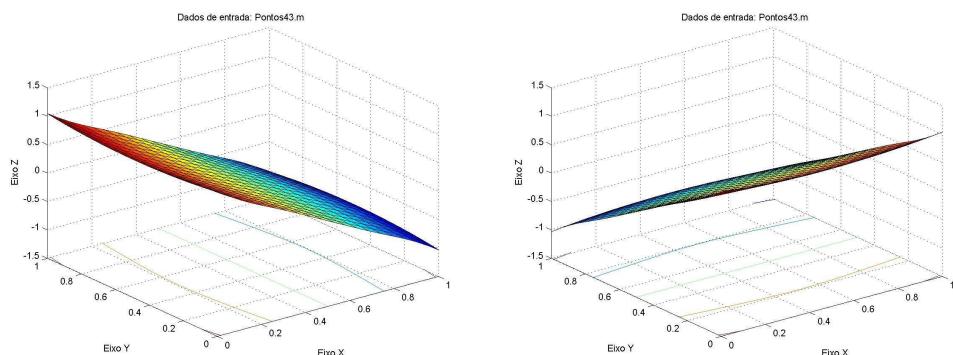


Gráfico 5-38 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos43.m”.

Derivadas da equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$

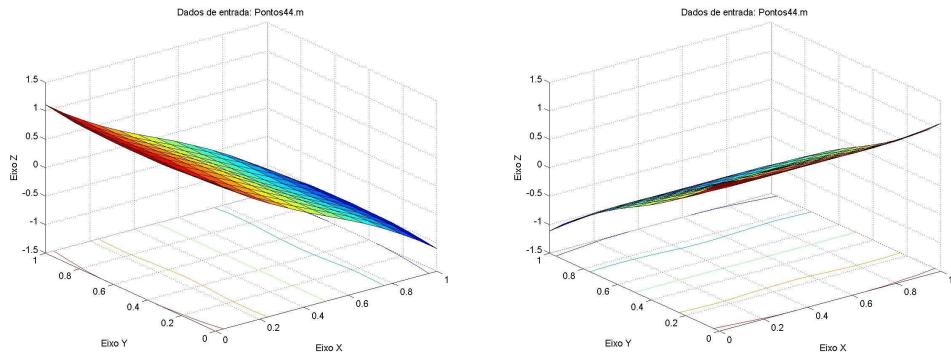


Gráfico 5-39 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos44.m”.

Derivadas da equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$

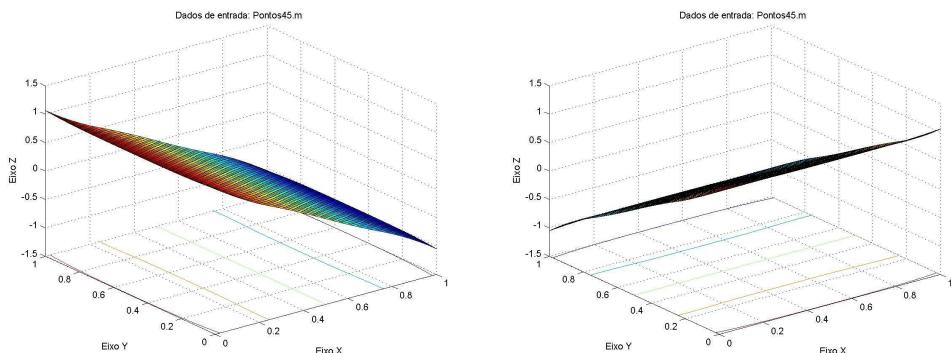


Gráfico 5-40 – Derivada em relação à X e à Y no arquivo “Pontos45.m”.

5.5.8 Conclusões

Pelos gráficos gerados, percebe-se a variação de crescimento das funções. Uma curiosidade é o Gráfico 5-24, que exibe regiões em branco em seu interior. Essas regiões estão localizadas exatamente onde estão os pontos de inflexão da aproximação com a função radial correspondente.

5.6 TESTES COM DIVISÃO DO DOMÍNIO

Este teste foi feito partindo do princípio que deveria haver mais precisão nos resultados se o mesmo fosse fragmentado. Os domínios usados possuem intervalos externos idênticos aos respectivos domínios sem as subdivisões.

Nessa análise houve uma mudança na nomenclatura dos arquivos de entrada, onde agora possui um arquivo que guarda o nome e a quantidade dos outros arquivos que possuem as informações de cada subdivisão do domínio. Cada arquivo que possui seu nome guardado armazena os dados de apenas uma seção dessa divisão.

Os arquivos que armazenam o nome de outros arquivos são chamados de “Pontos(K)6.m”, sendo para o campo $z(x, y) = 1$ “Pontos16.m”, campo $z(x, y) = x$ “Pontos26.m” e para o campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$, “Pontos48.m”.

Para o campo $z(x, y) = 1$, o domínio foi dividido em nove partes, onde cada parte possui quatro pontos no contorno e apenas um ponto no centro. Para o campo $z(x, y) = x$, o domínio foi dividido em quatro, onde cada parte possui quatro pontos no contorno. E para o campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$ é dividido em dezesseis partes, onde cada parte possui cinco pontos, quatro no contorno e um no interior.

5.6.1 Resultados para o campo $z(x, y) = 1$

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-r_i}$

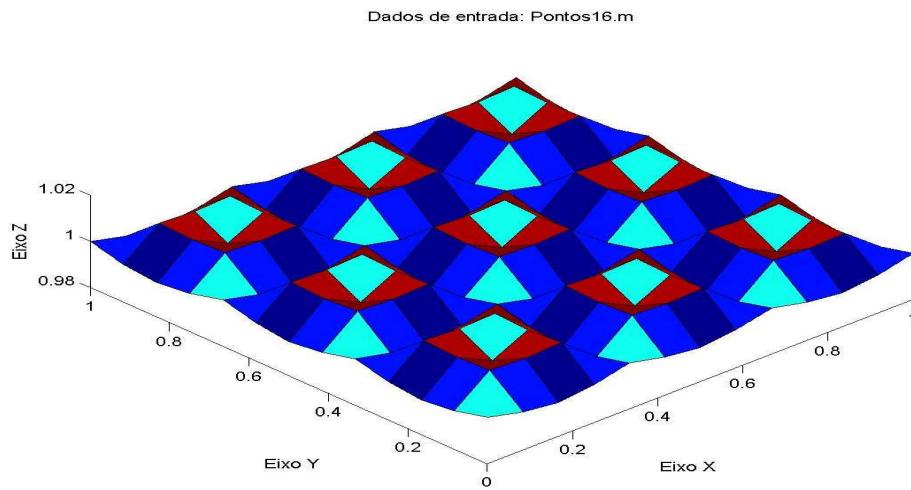


Gráfico 5-41 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos16.m”.

Tabela 5-21 – Resultados para o arquivo “Pontos16.m”.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.997650683	1.00438297	1.00457907	1.05563486
Erro (u.v.)	0.002349317	0.00438297	0.00457907	0.06663486

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-3.r_i}$

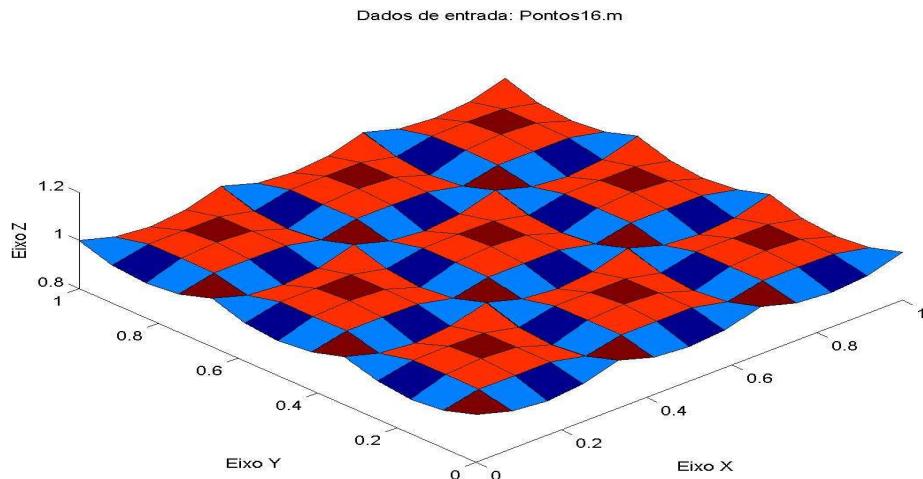


Gráfico 5-42 – Resultados para o arquivo “Pontos16.m”.

Tabela 5-22 – Resultados para o arquivo “Pontos16.m”.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.975264072	0.981693566	0.981693923	1.04402769
Erro (u.v.)	0.024735928	0.018306434	0.018306077	0.04420769

5.6.2 Resultados para o campo $z(x, y) = x$

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-r_i}$

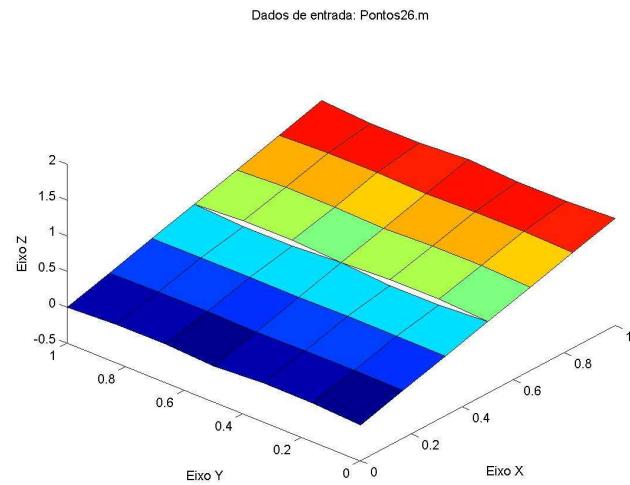


Gráfico 5-43 – Resultados para o arquivo “Pontos26.m”.

Tabela 5-23 – Resultados para o arquivo “Pontos26.m”.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.508017778	0.509313762	0.509309769	0.510416448
$ \text{Erro} $ (u.v.)	0.008017778	0.009313762	0.009309769	0.010416448

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-3.r_i}$

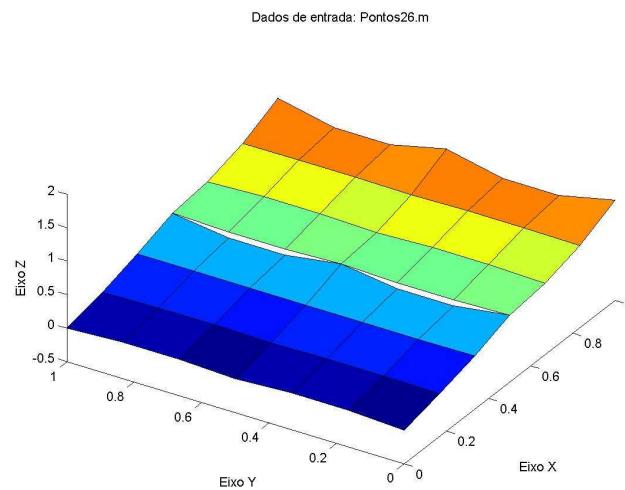


Gráfico 5-44 – Resultados para o arquivo “Pontos26.m”.

Tabela 5-24 – Resultados para o arquivo “Pontos26.m”.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.4391599	0.445351869	0.445358545	0.44509238
Erro (u.v.)	0.0608401	0.054648131	0.054641455	0.05490762

5.6.3 Resultados para o campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-r_i}$

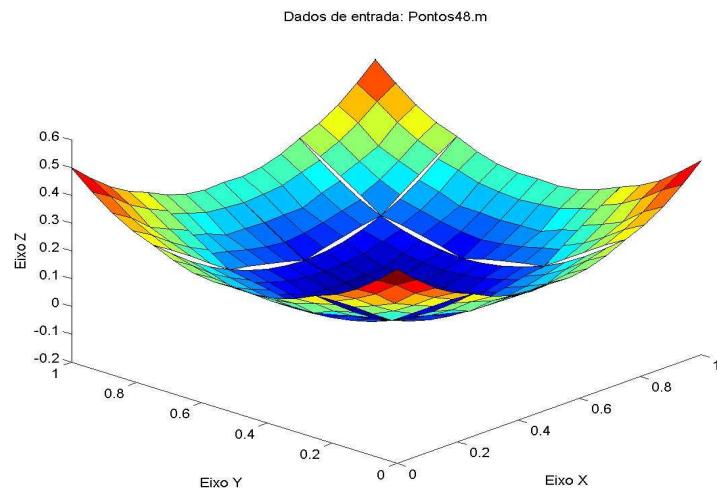


Gráfico 5-45 – Resultados para o arquivo “Pontos48.m”.

Tabela 5-25 – Resultados para o arquivo “Pontos48.m”.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.169359908	0.175189674	0.175191045	0.165936068
Erro (u.v.)	0.002693242	0.008523008	0.008524379	0.000730598

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-3.r_i}$

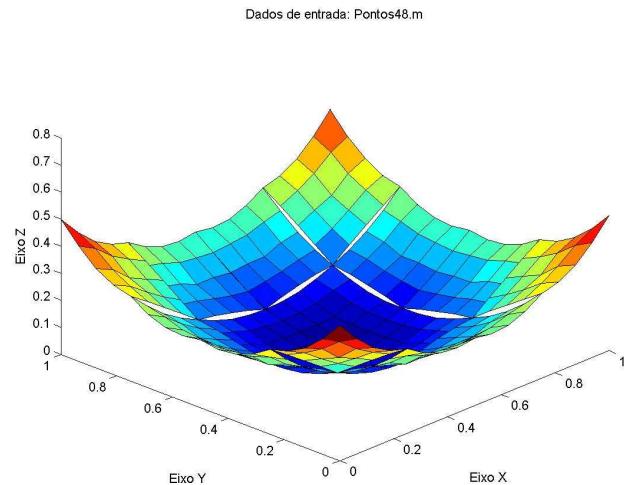


Gráfico 5-46 – Resultados para o arquivo “Pontos48.m”.

Tabela 5-26 – Resultados para o arquivo “Pontos48.m”.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.167145744	0.173808947	0.173809066	0.165936068
Erro (u.v.)	0.000479078	0.007142281	0.0071424	0.000730598

5.6.4 Conclusão

Na Tabela 5-27 e também na

Tabela 5-28 é mostrada a comparação entre os resultados com 1000 divisões para a integração para o domínio dividido contra os resultados do domínio não dividido, que é aquele com o maior número de pontos base, que é armazenado nos arquivos do tipo “Pontos(X)5.m”, representados na Figura 5-7. Na Tabela 5-27 e na

Tabela 5-28 também são mostrados os melhores resultados para os campos testados na seção 5.4, que também são mostrados com 1000 divisões para a integração numérica.

Tabela 5-27 – Comparação para a equação radial $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-r_i}$.

	Domínio dividido	Domínio não dividido	Melhor resultado
Campo $z(x, y) = 1$			
Volume	1.05563486	1.01051092	1.00057256
Erro	0.06663486	0.01051092	0.00057256
Campo $z(x, y) = x$			
Volume	0.510416448	0.502036989	0.497563332
Erro	0.010416448	0.002036989	0.002436668
Campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$			
Volume	0.166608065	0.18238911	0.166307971
Erro	0.000058601	0.015722443	0.000358695

Tabela 5-28 – Comparação para a equação radial $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-3 \cdot r_i}$.

	Domínio dividido	Domínio não dividido	Melhor resultado
Campo $z(x, y) = 1$			
Volume	1.04402769	0.998793304	1.00057256
Erro	0.04420769	0.001206696	0.00057256
Campo $z(x, y) = x$			
Volume	0.44509238	0.496340841	0.497563332
Erro	0.05490762	0.003659159	0.002436668
Campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$			
Volume	0.165936068	0.183801621	0.166307971
Erro	0.000730598	0.017134954	0.000358695

Comparando os resultados, percebe-se que não foram muito bons os resultados obtidos na divisão do domínio em relação aos melhores resultados da seção 5.4.

Os testes realizados não retornaram bons resultados também pelo fato de que os campos gerados possuem descontinuidades no interior. Dependendo da aplicação dessa aproximação, esse tipo de interpolação não pode ser usado.

Um exemplo a ser dado é o caso de integrais de linha por uma superfície. No caminho escolhido para a integração não pode haver descontinuidades, como faz parte de sua definição de cálculo.

Para os testes com o campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$ os resultados foram melhores, porém há o problema da descontinuidade.

5.7 TESTES COM SOMA DE FUNÇÕES RADIAIS

O objetivo desse teste foi aumentar a precisão da aproximação das superfícies, usando para a interpolação a soma da função radial que retornou o menor erro com a função que retornou o segundo menor erro, nos testes realizados na seção 5.4. A interpolação é feita com uma nova equação radial, que é criada com a união das duas funções de maior precisão para cada campo.

Em seguida, é feito a comparação dos valores das duas funções radiais que retornaram o menor erro com a interpolação feita com a soma dessas funções. A comparação é feita usando um número de 1000 subdivisões em X e em Y no cálculo do volume.

5.7.1 Resultados para o campo $z(x, y) = 1$

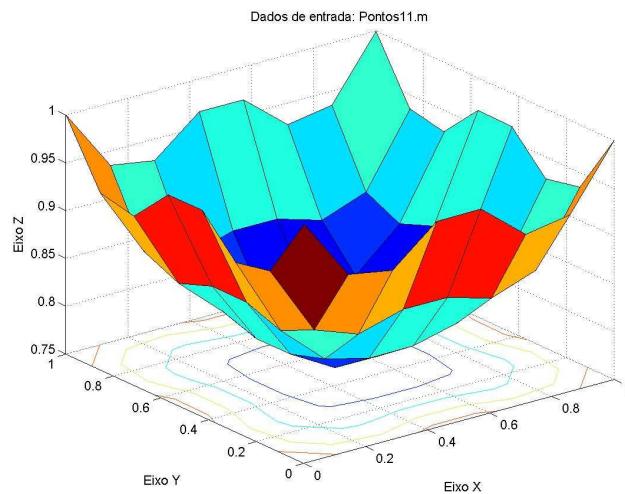


Gráfico 5-47 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos11.m”.

Tabela 5-29 – Resultados para o arquivo “Pontos11.m”.

Melhor Função		Segunda Melhor Função		Soma das Duas Melhores	
Valor	Erro	Valor	Erro	Valor	Erro
1.01997781	0.01997781	1.02183592	0.02183592	0.850880861	0.149119139

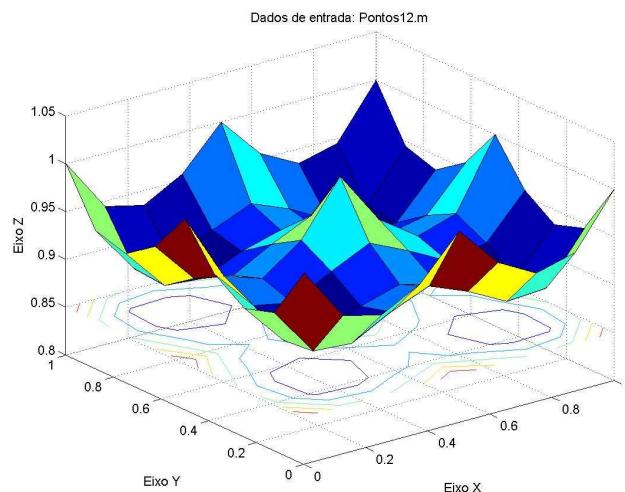


Gráfico 5-48 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos12.m”.

Tabela 5-30 – Resultados para o arquivo “Pontos12.m”.

Melhor Função		Segunda Melhor Função		Soma das Duas Melhores	
Valor	Erro	Valor	Erro	Valor	Erro
1.01042855	0.01042855	1.02939188	0.02939188	0.916718364	0.083281636

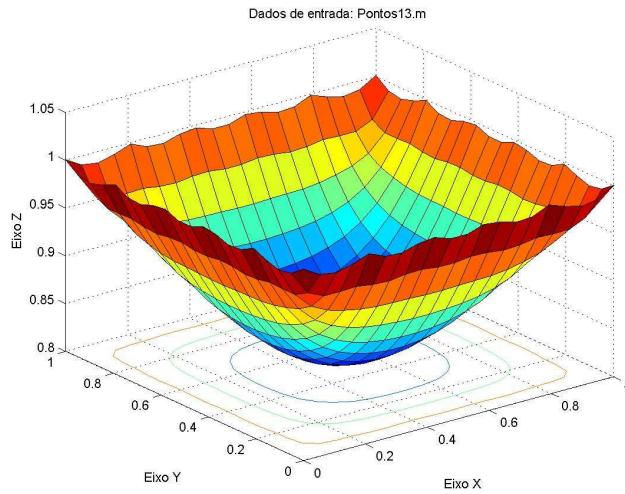


Gráfico 5-49 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos13.m”.

Tabela 5-31 – Resultados para o arquivo “Pontos13.m”.

Melhor Função	Segunda Melhor Função		Soma das Duas Melhores	
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$	$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-r_i}$	$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i (r_i^3 + e^{-r_i})$	Valor	Erro
0.98232168	0.01767832	1.02951622	0.02951622	0.900673568
				0.099326432

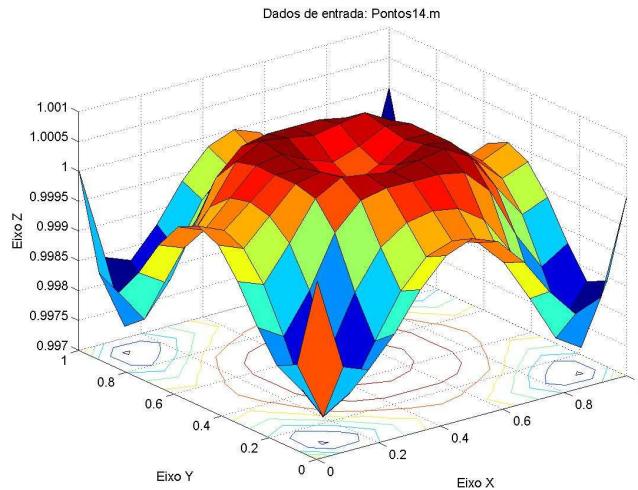


Gráfico 5-50 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos14.m”.

Tabela 5-32 – Resultados para o arquivo “Pontos14.m”.

Melhor Função	Segunda Melhor Função		Soma das Duas Melhores	
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$	$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-r_i}$	$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i (r_i + e^{-r_i})$	Valor	Erro
1.00109017	0.00109017	1.00807893	0.00807893	1.009004
				0.009004

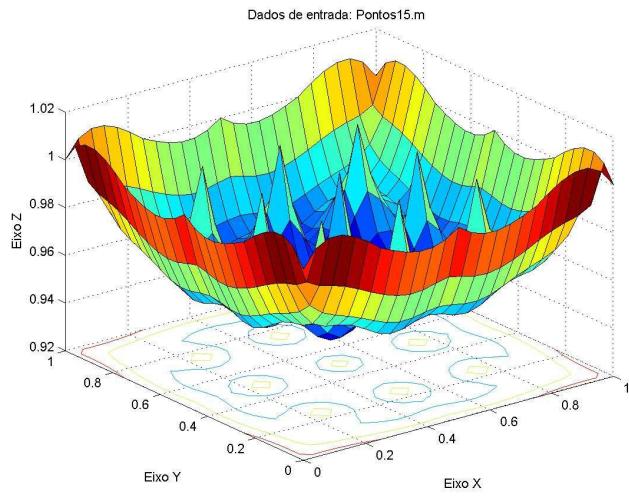


Gráfico 5-51 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos15.m”.

Tabela 5-33 – Resultados para o arquivo “Pontos15.m”.

Melhor Função		Segunda Melhor Função		Soma das Duas Melhores	
Valor	Erro	Valor	Erro	Valor	Erro
1.00057256	0.00057256	1.00113213	0.00113213	0.96467489	0.03532511

5.7.2 Resultados para o campo $z(x, y) = x$

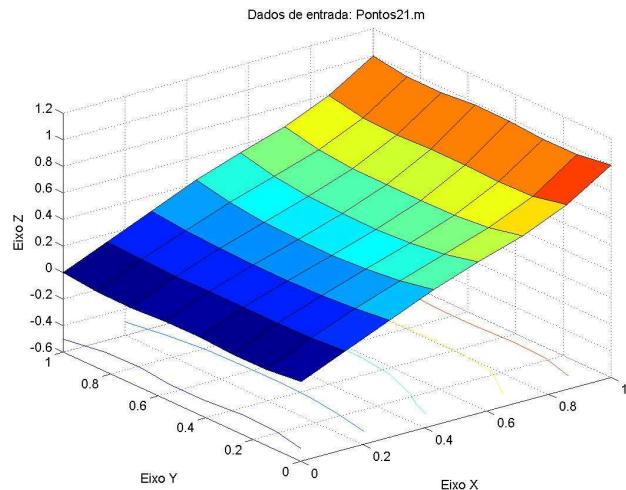


Gráfico 5-52 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos21.m”.

Tabela 5-34 – Resultados para o arquivo “Pontos21.m”.

Melhor Função		Segunda Melhor Função		Soma das Duas Melhores	
Valor	Erro	Valor	Erro	Valor	Erro
0.509190202	0.009190202	0.511760116	0.011760116	0.425990075	0.074009925

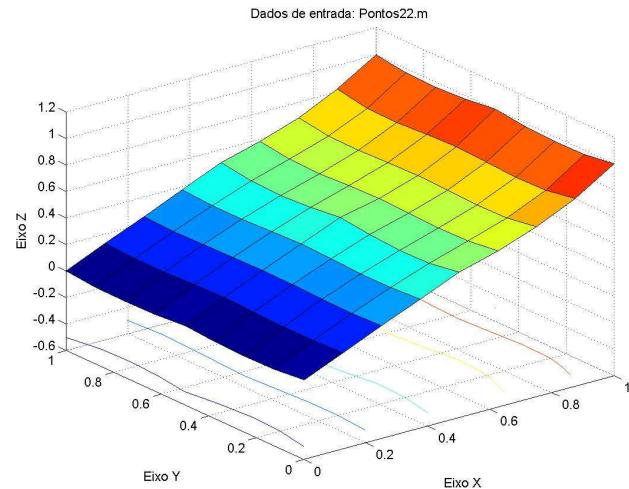


Gráfico 5-53 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos22.m”.

Tabela 5-35 – Resultados para o arquivo “Pontos22.m”.

Melhor Função		Segunda Melhor Função		Soma das Duas Melhores	
Valor	Erro	Valor	Erro	Valor	Erro
0.505132198	0.005132198	0.514234185	0.014234185	0.459287077	0.040712923

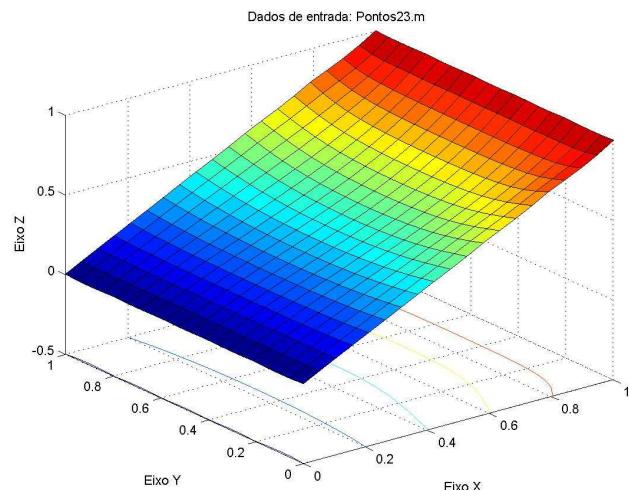


Gráfico 5-54 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos23.m”.

Tabela 5-36 – Resultados para o arquivo “Pontos23.m”.

Melhor Função		Segunda Melhor Função		Soma das Duas Melhores	
Valor	Erro	Valor	Erro	Valor	Erro
0.490157217	0.009842783	0.515769362	0.015769362	0.450371772	0.049628228

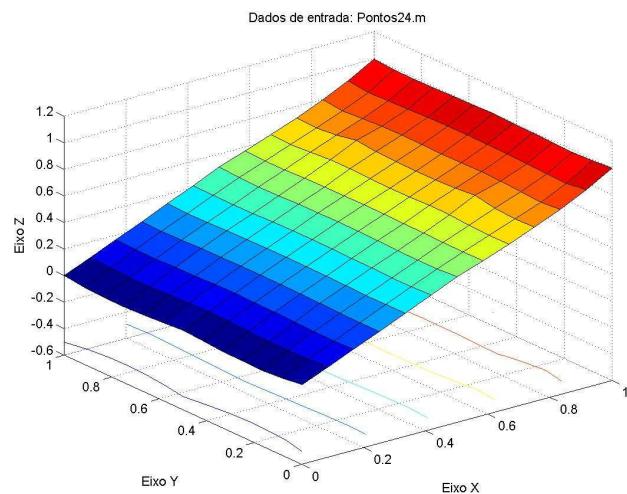


Gráfico 5-55 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos24.m”.

Tabela 5-37 – Resultados para o arquivo “Pontos24.m”.

Melhor Função		Segunda Melhor Função		Soma das Duas Melhores	
Valor	Erro	Valor	Erro	Valor	Erro
0.500774622	0.000774622	0.502830923	0.002830923	0.485588253	0.014411747

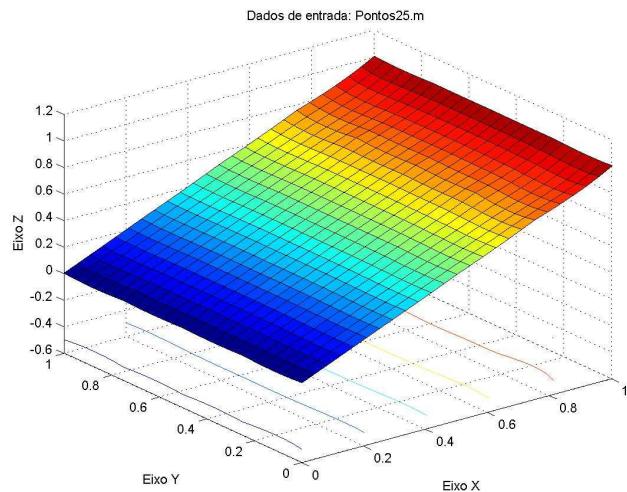


Gráfico 5-56 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos25.m”.

Tabela 5-38 – Resultados para o arquivo “Pontos25.m”.

Melhor Função	Segunda Melhor Função	Soma das Duas Melhores			
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$	$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-r_i}$	$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i (r_i^3 + e^{-r_i})$			
Valor	Erro	Valor	Erro	Valor	Erro
0.50115335	0.00115335	0.502036989	0.002036989	0.492667258	0.007332742

5.7.3 Resultados para o campo $z(x, y) = xy$

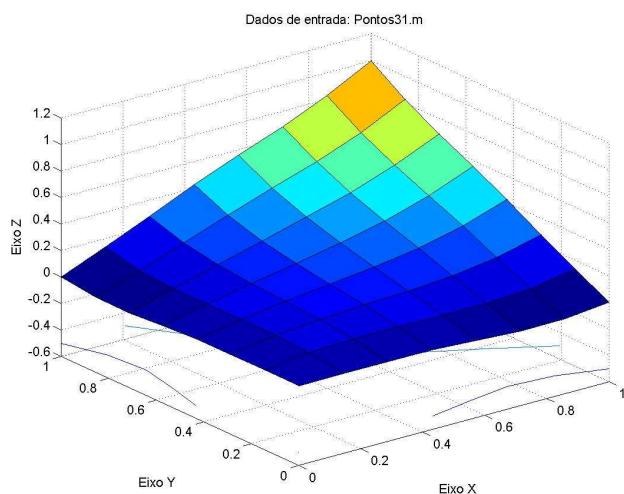


Gráfico 5-57 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos31.m”.

Tabela 5-39 – Resultados para o arquivo “Pontos31.m”.

Melhor Função	Segunda Melhor Função	Soma das Duas Melhores			
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$	$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-r_i}$	$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i (r_i^3 + e^{-r_i})$			
Valor	Erro	Valor	Erro	Valor	Erro
0.254668146	0.004668146	0.255880177	0.005880177	0.213897556	0.036102444

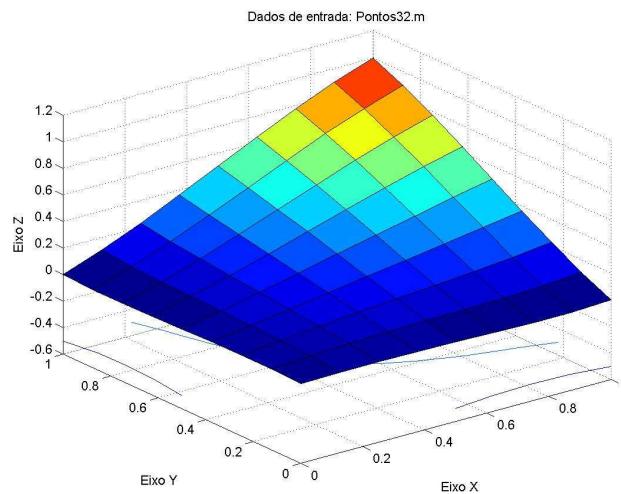


Gráfico 5-58 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos32.m”.

Tabela 5-40 – Resultados para o arquivo “Pontos32.m”.

Melhor Função		Segunda Melhor Função		Soma das Duas Melhores	
Valor	Erro	Valor	Erro	Valor	Erro
0.252566785	0.002566785	0.2428509	0.0071491	0.249503344	0.000496656

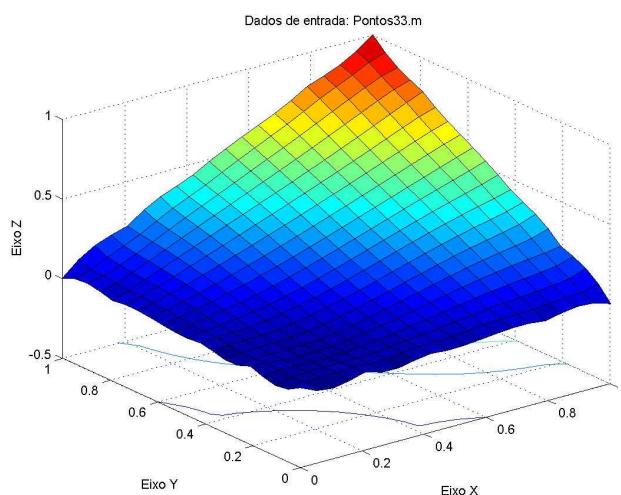


Gráfico 5-59 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos33.m”.

Tabela 5-41 – Resultados para o arquivo “Pontos33.m”.

Melhor Função		Segunda Melhor Função		Soma das Duas Melhores	
Valor	Erro	Valor	Erro	Valor	Erro
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1+r_i)^3}$		$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$		$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\frac{1}{(1+r_i)^3} + r_i \right)$	

0.245822981	0.004177019	0.236442193	0.013557807	0.19269079	0.30730921
-------------	-------------	-------------	-------------	------------	------------

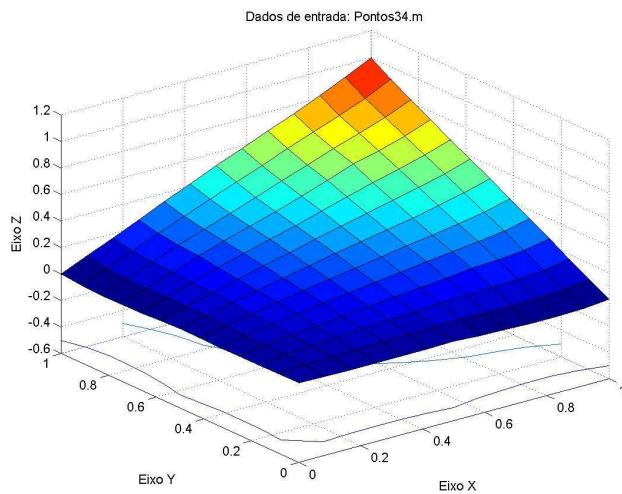


Gráfico 5-60 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos34.m”.

Tabela 5-42 – Resultados para o arquivo “Pontos34.m”.

Melhor Função	Segunda Melhor Função	Soma das Duas Melhores
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-r_i}$	$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$	$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i (e^{-r_i} + r_i^3)$
Valor	Valor	Valor
0.250384718	0.251408994	0.243037254
Erro	Erro	Erro
0.000384718	0.001408994	0.006962746

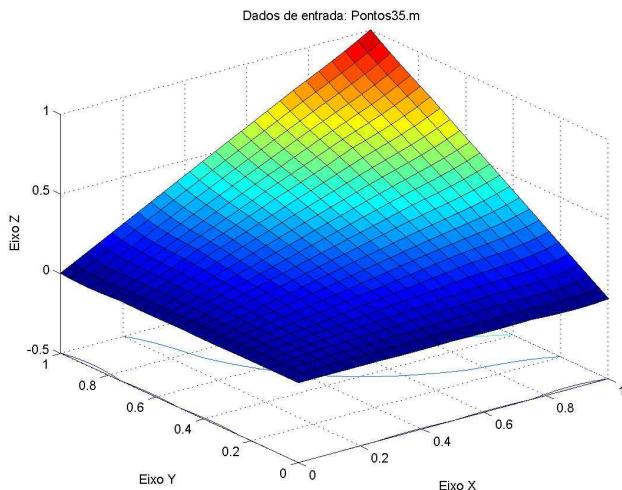


Gráfico 5-61 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos35.m”.

Tabela 5-43 – Resultados para o arquivo “Pontos35.m”.

Melhor Função	Segunda Melhor Função	Soma das Duas Melhores
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$	$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-r_i}$	$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i (r_i^3 + e^{-r_i})$
Valor	Valor	Valor
0.251408994	0.243037254	0.250384718
Erro	Erro	Erro
0.001408994	0.006962746	0.000384718

Valor	Erro	Valor	Erro	Valor	Erro
0.250580281	0.000580281	0.251015127	0.001015127	0.24637194	0.00362806

5.7.4 Resultados para o campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$

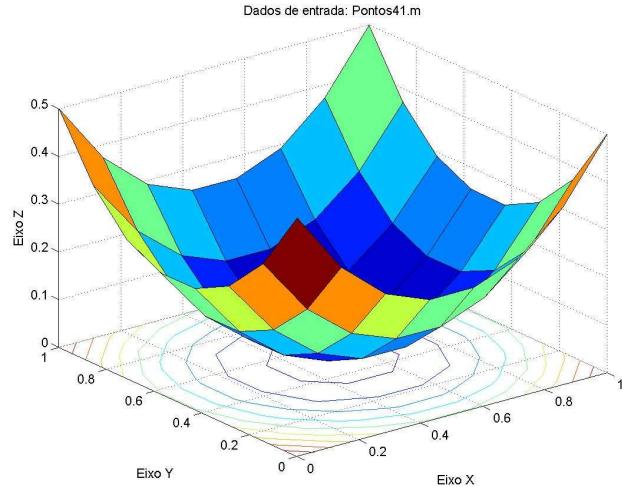


Gráfico 5-62 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos41.m”.

Tabela 5-44 – Resultados para o arquivo “Pontos41.m”.

Melhor Função		Segunda Melhor Função		Soma das Duas Melhores		
Valor	Erro	Valor	Erro	Valor	Erro	
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$	0.171570003	$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 \ln(r_i)$	0.256435692	$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i (r_i^3 + r_i^2 \ln(r_i))$	0.171170965	0.004504298
0.004903336	0.089769025	0.0004504298				

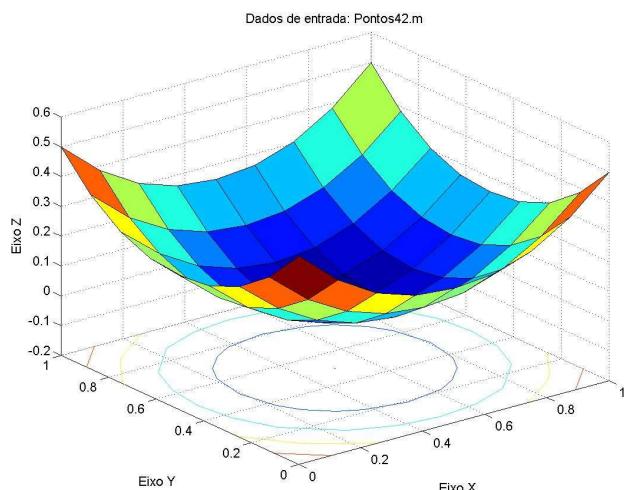


Gráfico 5-63 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos42.m”.

Tabela 5-45 – Resultados para o arquivo “Pontos42.m”.

Melhor Função		Segunda Melhor Função		Soma das Duas Melhores	
Valor	Erro	Valor	Erro	Valor	Erro
0.162209377	0.004457289	0.205082744	0.038416077	0.164152592	0.002514074

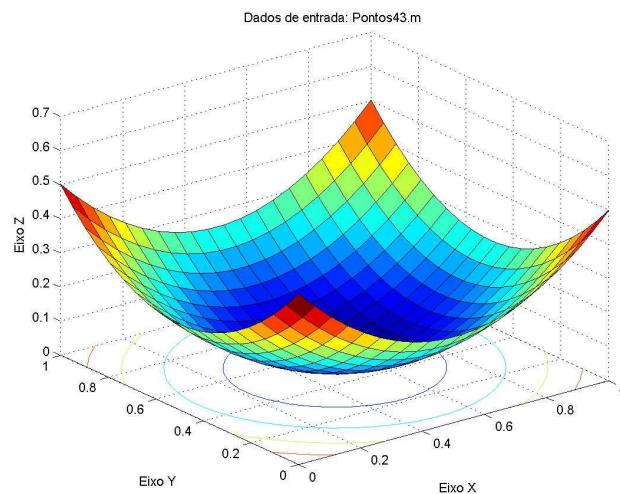


Gráfico 5-64 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos43.m”.

Tabela 5-46 – Resultados para o arquivo “Pontos43.m”.

Melhor Função		Segunda Melhor Função		Soma das Duas Melhores	
Valor	Erro	Valor	Erro	Valor	Erro
0.179085627	0.01241896	0.205080375	0.038413708	0.177600011	0.010933344

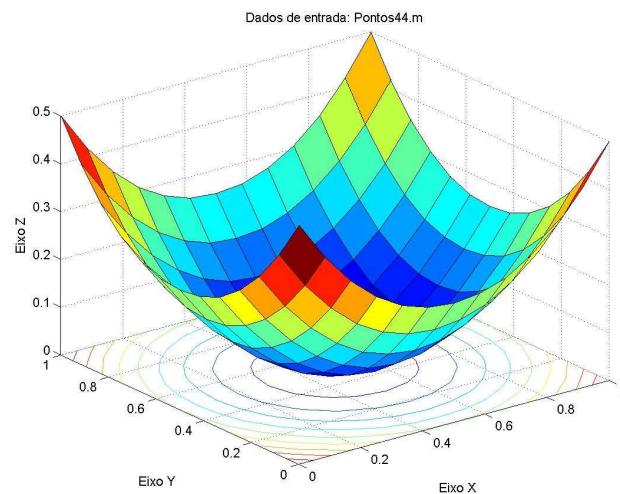


Gráfico 5-65 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos44.m”.

Tabela 5-47 – Resultados para o arquivo “Pontos44.m”.

Melhor Função		Segunda Melhor Função		Soma das Duas Melhores	
Valor	Erro	Valor	Erro	Valor	Erro
0.165462151	0.001204515	0.174398333	0.007731666	0.165765688	0.000900978

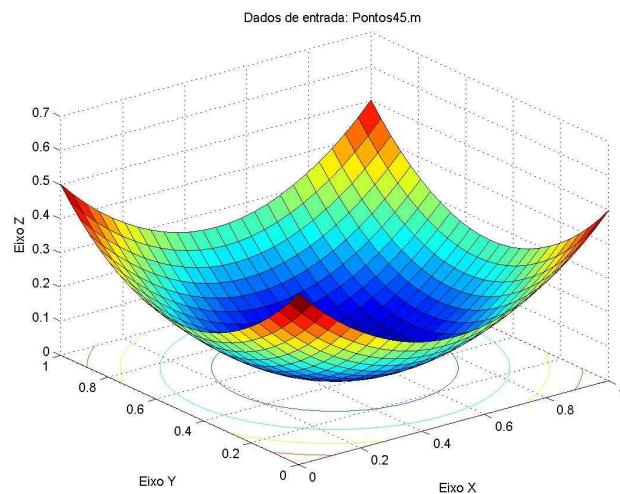


Gráfico 5-66 – Aproximação gerada pelo arquivo “Pontos45.m”.

Tabela 5-48 – Resultados para o arquivo “Pontos45.m”.

Melhor Função		Segunda Melhor Função		Soma das Duas Melhores	
Valor	Erro	Valor	Erro	Valor	Erro
0.166307971	0.000358695	0.170843288	0.004176621	0.166665748	0.000000918

5.7.5 Conclusão

Para o campo $z(x, y) = 1$, o campo $z(x, y) = x$ e o campo $z(x, y) = xy$ os testes retornaram resultados não satisfatórios, o que não foi o caso do campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$, que retornou melhores resultados para todas as malhas. Essa aproximação, na verdade, é feita com uma nova equação radial, que possui características próprias.

Para as aproximações com os três primeiros campos a nova equação usada não possui boas características para a interpolação, enquanto a soma para o último

campo simulado resultou em uma equação com as melhores características das outras duas que haviam retornado os menores erros.

Para uma aproximação geral, sem uma idéia razoável da forma geométrica do campo a ser simulado, essa aproximação pode retornar resultados piores do que se o mesmo campo fosse simulado apenas com equações radiais sem soma.

Esse tipo de simulação não é indicado para simulações gerais, devido aos motivos anteriormente listados.

5.8 TESTES COM EXPANSÃO DO SISTEMA LINEAR SEM PONTOS INTERNOS NO DOMÍNIO

O novo teste com as funções radiais é feito inserindo na matriz F , que é gerada para o cálculo dos coeficientes das equações de aproximação, mais linhas e mais colunas.

Essa expansão na matriz é feita com novas equações que dependem apenas do ponto onde estão sendo consideradas, ou seja, não são funções radiais. Funções essas que dependem do ponto considerado e a distância euclidiana desse ponto até os outros pontos usados na aproximação.

Esse método mescla funções radiais com funções globais, sendo que a precisão dos resultados obtidos é aumentada pela relação entre os dois tipos de função: onde a função radial é fraca, a função global pode ser boa e possuir uma boa precisão e vice-versa.

Esse método possui uma grande vantagem: a grande chance de possuir uma boa precisão para a interpolação de um campo qualquer pela relação dos dois tipos de função.

5.8.1 Expansão com três equações globais

O teste a ser exibido é feito incluindo na matriz do sistema linear de cálculo dos coeficientes três novas colunas e três novas linhas. Na Figura 5-8 é mostrado um desenho esquemático da matriz expandida nesse caso:

	C1	C2	C3	
Matriz original				Expansão
L1				
L2	Expansão			0
L3				

Figura 5-8 – Matriz expandida com três equações globais.

As duas partes expandidas da matriz acima são, na verdade, transpostas: a coluna C1 é igual à linha L1, a coluna C2 à linha L2 e a coluna C3 à linha L3. A interseção das linhas e das colunas é preenchida com zeros.

São incluídos três zeros no vetor solução para que o sistema de equações seja possível de ser resolvido. Essa inclusão só funciona pelo fato do sistema linear resultante ser linearmente independente.

As três equações a serem acrescidas são:

$$Eq1 = 1$$

$$Eq2 = x$$

$$Eq3 = y$$

A $Eq1 = 1$ é usada na L1 e C1, a $Eq2 = x$ na L2 e C2 e a $Eq3 = y$ na L3 e C3.

Foi feita uma modificação no programa de cálculos para que o mesmo interpretasse a instrução de expandir matriz e calcular os coeficientes utilizando esse novo método. Após a implementação das novas rotinas no programa, foram feitos testes usando três dos quatro campos já testados e utilizando também a malha mais rica sem pontos internos.

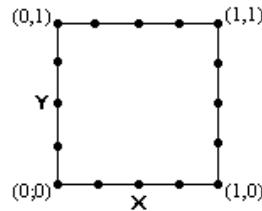


Figura 5-9 – Malha para os testes de expansão.

Os resultados com as funções radiais escolhidas foram comparados com a melhor aproximação para os campos feitos sem o método da expansão da matriz. Os testes foram realizados com equações que já eram utilizadas e as que mostraram ter o melhor desempenho com a matriz não expandida. Os resultados obtidos são mostrados nas três próximas seções (5.8.1.1 a 5.8.1.3).

5.8.1.1 Resultados para o campo $z(x, y) = 1$

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y$

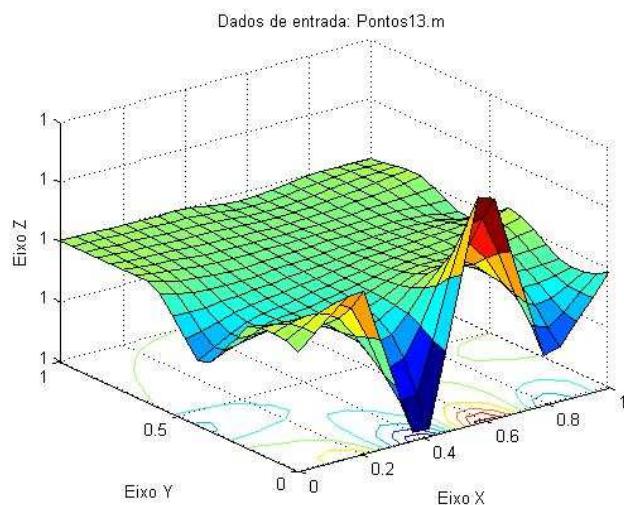


Gráfico 5-67 – Primeiro teste da expansão com três equações.

Tabela 5-49 – Resultados do primeiro teste da expansão com três equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.999999285	0.999998927	1.00005305	1.00903904
$ \text{Erro} $ (u.v.)	0.000000715	0.000001073	0.00005305	0.00903904

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3 + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y$

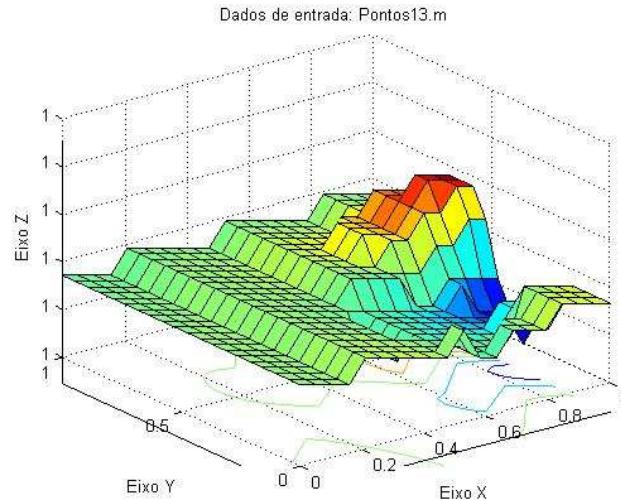


Gráfico 5-68 – Segundo teste da expansão com três equações.

Tabela 5-50 – Resultados do segundo teste da expansão com três equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	1.	0.999999344	1.00005352	1.00903893
Erro (u.v.)	0.	0.000000656	0.00005352	0.00903893

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 \ln(r_i) + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y$

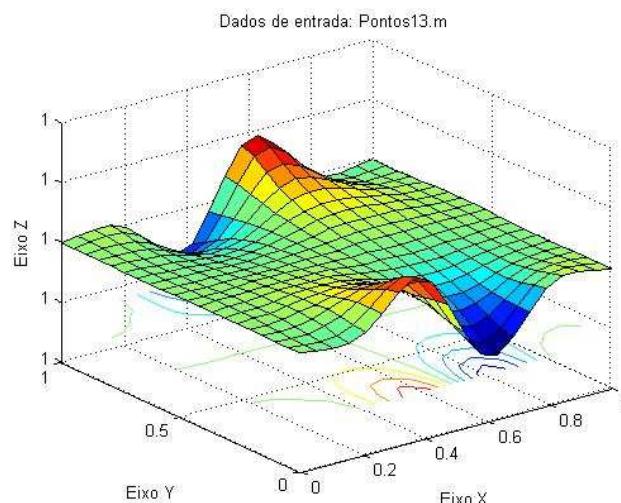


Gráfico 5-69 – Terceiro teste da expansão com três equações.

Tabela 5-51 – Resultados do terceiro teste da expansão com três equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	1.	0.999999464	1.00005329	1.00903893
Erro (u.v.)	0.	0.000000536	0.00005329	0.00903893

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-3r_i} + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y$

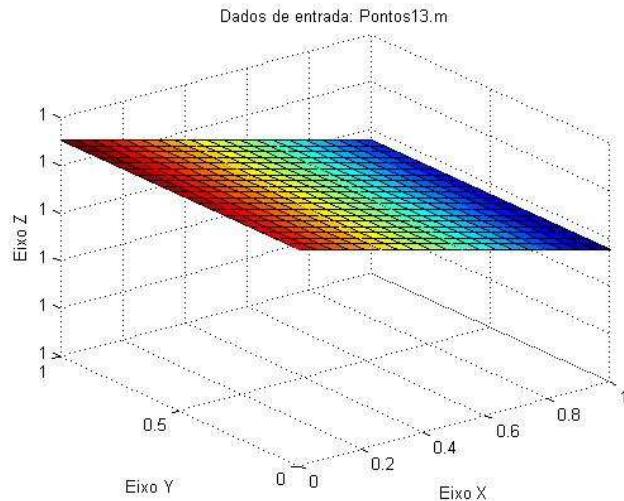


Gráfico 5-70 – Quarto teste da expansão com três equações.

Tabela 5-52 – Resultados do quarto teste da expansão com três equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	1.	0.999999344	1.00005352	1.00903893
Erro (u.v.)	0.	0.000000656	0.00005352	0.00903893

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1+r_i)^3} + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y$

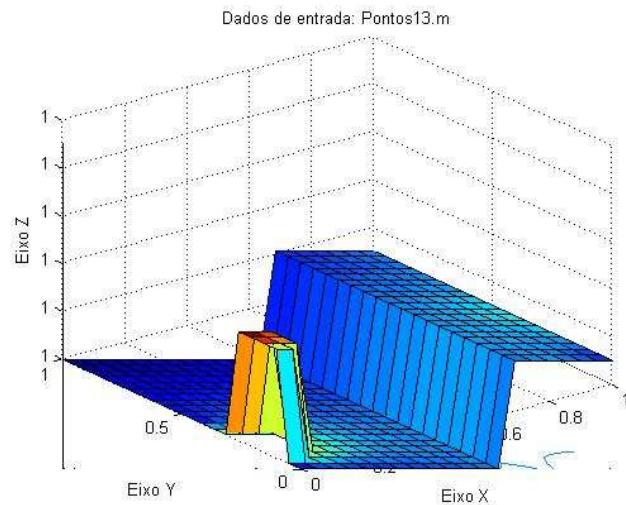


Gráfico 5-71 – Quinto teste da expansão com três equações.

Tabela 5-53 – Resultados do quinto teste da expansão com três equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	1.	0.999999344	1.00005352	1.00903893
Erro (u.v.)	0.	0.000000656	0.00005352	0.00903893

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 e^{-r_i} + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y$

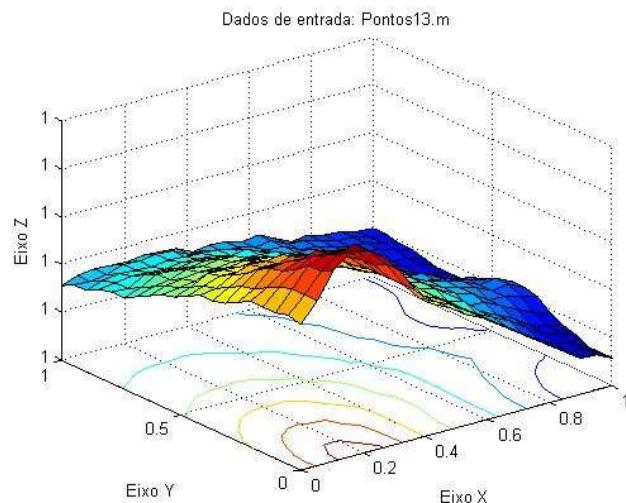


Gráfico 5-72 – Sexto teste da expansão com três equações.

Tabela 5-54 – Resultados do sexto teste da expansão com três equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	1.00000107	1.00000024	1.00005364	1.00903893
Erro (u.v.)	0.00000107	0.00000027	0.00005364	0.00903893

5.8.1.2 Resultados para o campo $z(x, y) = x$

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y$

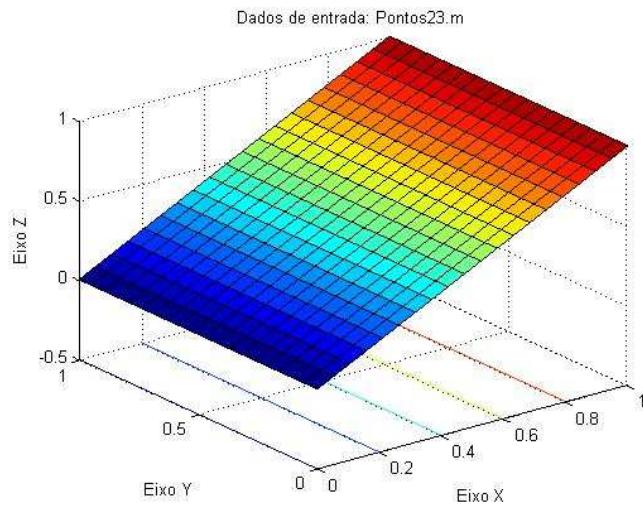


Gráfico 5-73 – Sétimo teste da expansão com três equações.

Tabela 5-55 – Resultados do sétimo teste da expansão com três equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.5	0.50000006	0.499999642	0.499922961
Erro (u.v.)	0.0	0.00000006	0.000000358	0.000077039

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3 + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y$

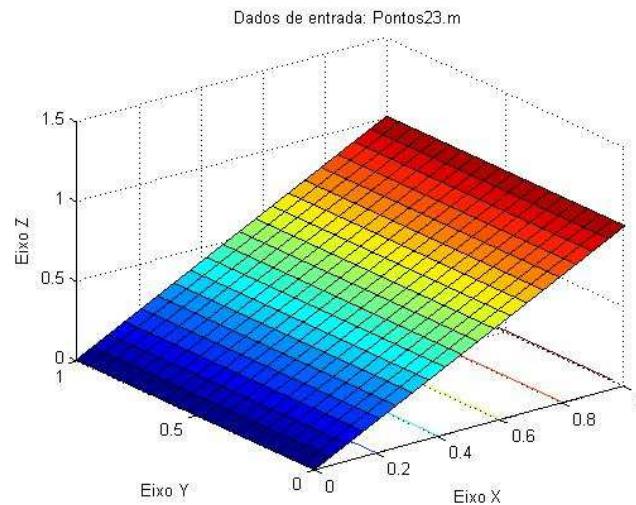


Gráfico 5-74 – Oitavo teste da expansão com três equações.

Tabela 5-56 – Resultados do oitavo teste da expansão com três equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.5	0.50000006	0.499999642	0.499922961
Erro (u.v.)	0.0	0.00000006	0.000000358	0.000077039

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 \ln(r_i) + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y$

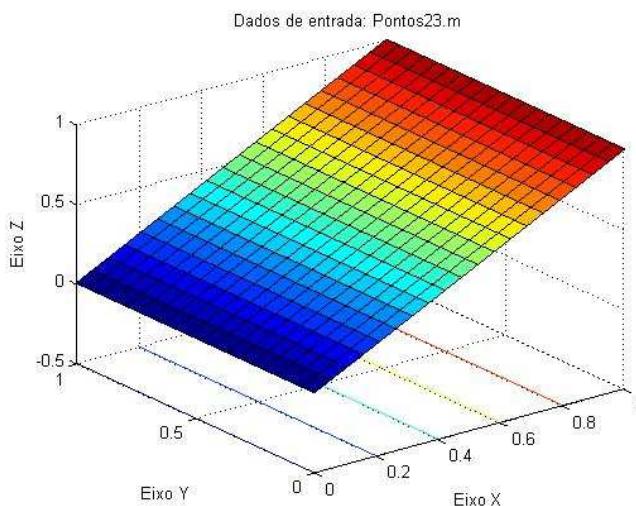


Gráfico 5-75 – Nono teste da expansão com três equações.

Tabela 5-57 – Resultados do nono teste da expansão com três equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.5	0.50000006	0.499999642	0.499922961
Erro (u.v.)	0.0	0.00000006	0.000000358	0.000077039

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-3r_i} + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y$

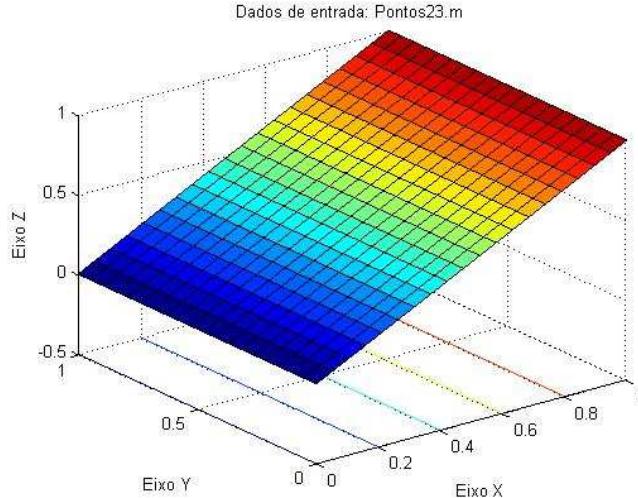


Gráfico 5-76 – Décimo teste da expansão com três equações.

Tabela 5-58 – Resultados do décimo teste da expansão com três equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.5	0.50000006	0.499999642	0.499922961
Erro (u.v.)	0.0	0.00000006	0.000000358	0.000077039

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1+r_i)^3} + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y$

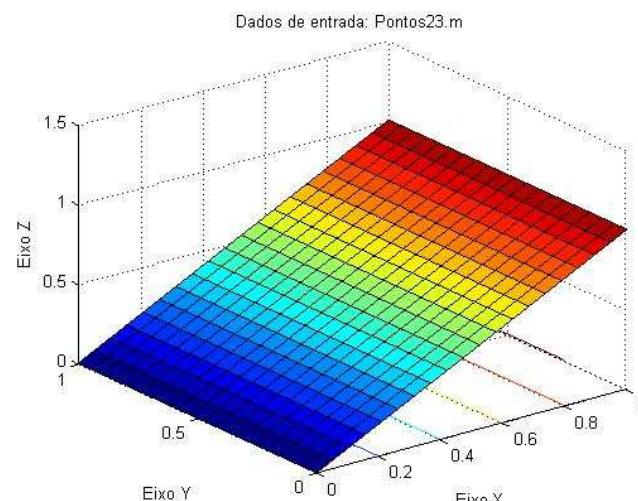


Gráfico 5-77 – Décimo primeiro teste da expansão com três equações.

Tabela 5-59 – Resultados do décimo primeiro teste da expansão com três equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.5	0.50000006	0.499999642	0.499922961
Erro (u.v.)	0.0	0.00000006	0.000000358	0.000077039

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 e^{-r_i} + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y$

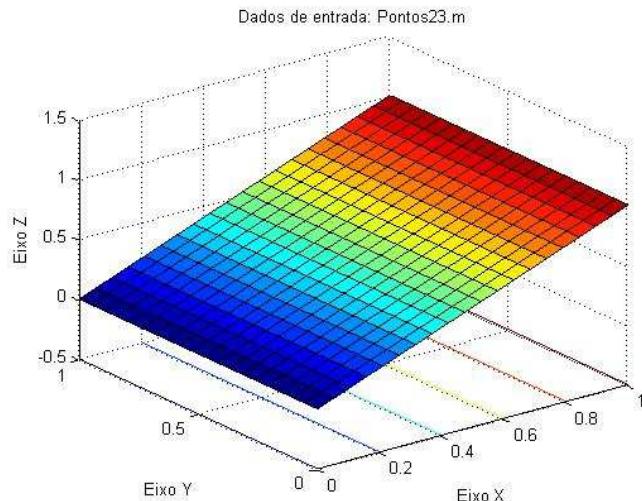


Gráfico 5-78 – Décimo segundo teste da expansão com três equações.

Tabela 5-60 – Resultados do décimo segundo teste da expansão com três equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.499976993	0.49998495	0.49998498	0.499919266
Erro (u.v.)	0.000023007	0.00001505	0.00001502	0.000080734

5.8.1.3 Resultados para o campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y$

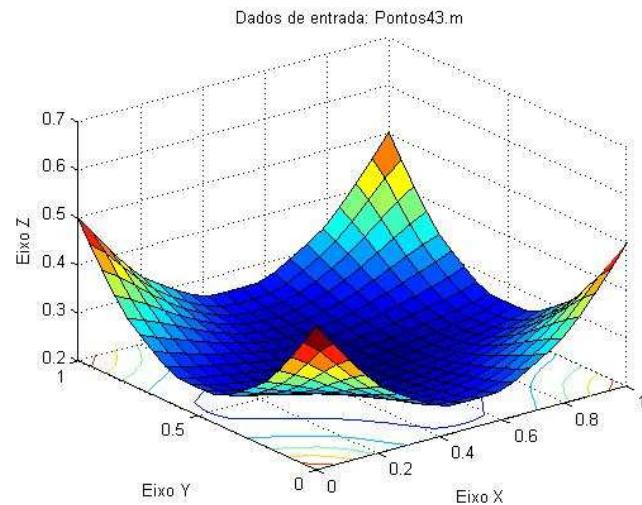


Gráfico 5-79 – Décimo terceiro teste da expansão com três equações.

Tabela 5-61 – Resultados do décimo terceiro teste da expansão com três equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.264283329	0.268125981	0.268118501	0.268069208
Erro (u.v.)	0.097616662	0.101459314	0.101451834	0.101402541

$$\text{Equação de interpolação: } \bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3 + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y$$

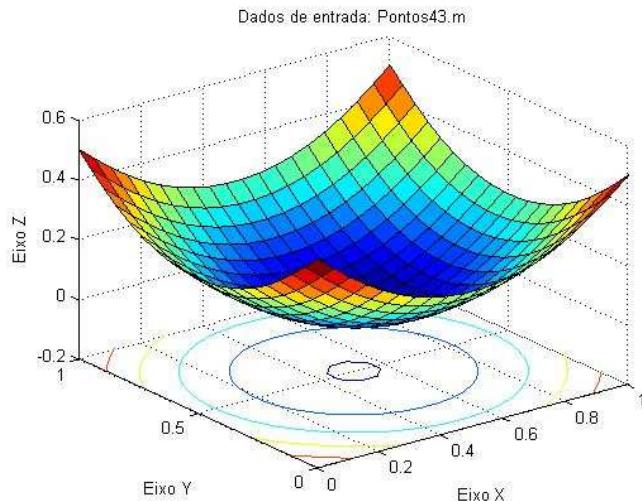


Gráfico 5-80 – Décimo quarto teste da expansão com três equações.

Tabela 5-62 – Resultados do décimo quarto teste da expansão com três equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.164220467	0.166500017	0.166601136	0.166588634
Erro (u.v.)	0.002446199	0.000166649	0.00006553	0.000078032

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 \ln(r_i) + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y$

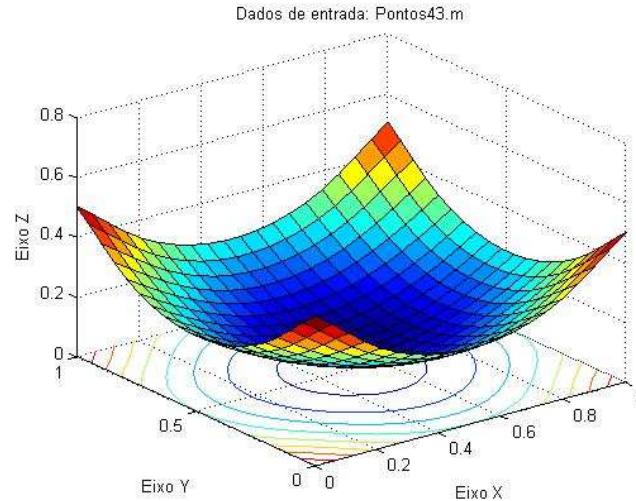


Gráfico 5-81 – Décimo quinto teste da expansão com três equações.

Tabela 5-63 – Resultados do décimo quinto teste da expansão com três equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.198608384	0.202429518	0.202429146	0.202441394
Erro (u.v.)	0.031941717	0.035762851	0.035762479	0.035774727

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-3r_i} + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y$

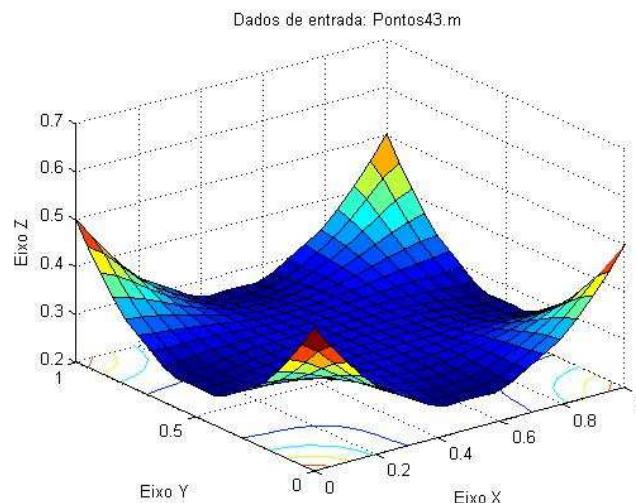


Gráfico 5-82 – Décimo sexto teste da expansão com três equações.

Tabela 5-64 – Resultados do décimo sexto teste da expansão com três equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.297813445	0.299744427	0.299732476	0.300240517
Erro (u.v.)	0.131146778	0.13307776	0.133065809	0.13357385

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1+r_i)^3} + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y$

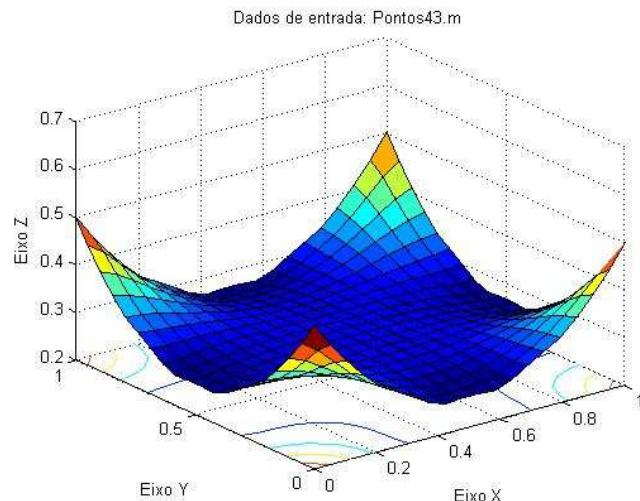


Gráfico 5-83 – Décimo sétimo teste da expansão com três equações.

Tabela 5-65 – Resultados do décimo sétimo teste da expansão com três equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.299825758	0.301584452	0.301572055	0.30147627
Erro (u.v.)	0.133159091	0.134917785	0.134905388	0.134809603

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 e^{-r_i} + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y$

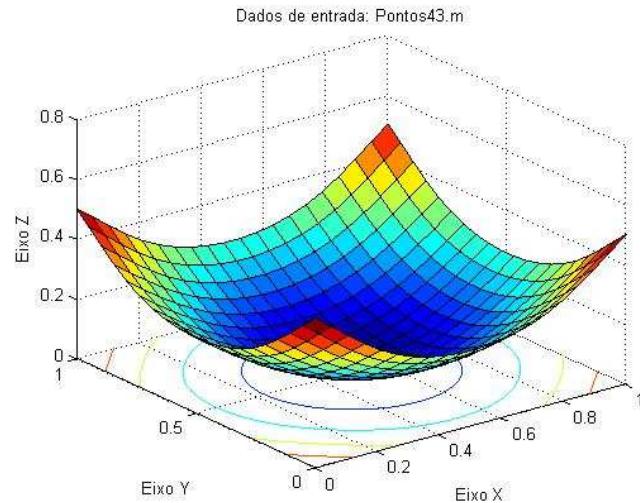


Gráfico 5-84 – Décimo oitavo teste da expansão com três equações.

Tabela 5-66 – Resultados do décimo oitavo teste da expansão com três equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.177686736	0.181416303	0.181416869	0.181414142
Erro (u.v.)	0.011020069	0.0147496636	0.014750202	0.014747475

5.8.1.4 Conclusão

A Tabela 5-67, Tabela 5-68 e Tabela 5-69 mostra o comparativo entre os resultados para 1000 subdivisões no domínio entre os testes com a matriz expandida e a não expandida para a mesma malha e a mesma equação de interpolação radial, para os três campo interpolados. Por serem equações extensas, é mostrada nas tabelas, apenas, a parcela radial das equações de interpolação.

Tabela 5-67 – Comparaçāo dos resultados para o campo $z(x, y) = 1$.

Função radial	Tipo de teste	Volume	Erro
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$	Matriz expandida	1.00903904	0.00903904
	Matriz não expandida	0.945179045	0.054820955
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$	Matriz expandida	1.00903893	0.00903893
	Matriz não expandida	0.98232168	0.01767832
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 \ln(r_i)$	Matriz expandida	1.00903893	0.00903893
	Matriz não expandida	1.07371211	0.07371211

$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-3r_i}$	Matriz expandida	1.00903893	0.00903893
	Matriz não expandida	0.958306432	0.041693568
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1+r_i)^3}$	Matriz expandida	1.00903893	0.00903893
	Matriz não expandida	0.985475123	0.014524877
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 e^{-r_i}$	Matriz expandida	1.00903893	0.00903893
	Matriz não expandida	0.987229645	0.012770355

Tabela 5-68 – Comparação dos resultados para o campo $z(x, y) = x$.

Função radial	Tipo de teste	Volume	Erro
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$	Matriz expandida	0.499922961	0.000077039
	Matriz não expandida	0.472809702	0.027190298
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$	Matriz expandida	0.499922961	0.000077039
	Matriz não expandida	0.490157217	0.009842783
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 \ln(r_i)$	Matriz expandida	0.499922961	0.000077039
	Matriz não expandida	0.53555721	0.03555721
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-3r_i}$	Matriz expandida	0.499922961	0.000077039
	Matriz não expandida	0.478484571	0.021515429
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1+r_i)^3}$	Matriz expandida	0.499922961	0.000077039
	Matriz não expandida	0.491634101	0.008365899
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 e^{-r_i}$	Matriz expandida	0.499919266	0.000080734
	Matriz não expandida	0.492676973	0.007323027

Tabela 5-69 – Comparação dos resultados para o campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$.

Função radial	Tipo de teste	Volume	Erro
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$	Matriz expandida	0.268069208	0.101402541
	Matriz não expandida	0.236528903	0.069862236
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$	Matriz expandida	0.166588634	0.000078032
	Matriz não expandida	0.179085627	0.01241896
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 \ln(r_i)$	Matriz expandida	0.202441394	0.035774727
	Matriz não expandida	0.205080375	0.038413708
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-3r_i}$	Matriz expandida	0.300240517	0.13357385
	Matriz não expandida	0.284123778	0.117457111

$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1+r_i)^3}$	Matriz expandida	0.30147627	0.134809603
	Matriz não expandida	0.295464128	0.128797461
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 e^{-r_i}$	Matriz expandida	0.181414142	0.014747475
	Matriz não expandida	0.170786589	0.004119922

Nota-se claramente a melhora nas aproximações, principalmente do campo constante. Isso é provocado pela influência que as funções globais exercem na aproximação com as funções radiais, exercendo uma melhora onde elas possuem uma melhor precisão.

Uma observação importante a ser feita é sobre os testes com o campo constante: como o campo é constante e uma das equações de expansão da matriz é apenas o valor 1, o programa zerou todos os outros coeficientes.

O que se observou foi que o programa “percebeu” que o campo a ser interpolado era constante e ele utilizou então para a aproximação apenas a equação constante.

O ideal era para o programa zerar o resto dos coeficientes, deixando apenas a equação que interessava na aproximação, porém, há erros de truncamento nos cálculos executados, o que permitiu que as outras equações influenciassem o resultado final.

Por esse motivo, houve pequenas variações nos gráficos e resultados para o campo constante, onde, pela lógica acima descrita, deveria ter retornado gráficos e resultados idênticos para todas as seis equações utilizadas para a interpolação.

Houve um resultado semelhante no caso da interpolação do campo $z(x, y) = x$. Como uma das equações de expansão é justamente o x , a tendência é que todos os outros coeficientes associados às outras equações de interpolação fossem zerados.

Um exemplo a ser mostrado é justamente o caso da interpolação do campo $z(x, y) = x$. Os coeficientes da interpolação com as funções radiais expandidas

$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$, $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 \ln(r_i)$ e $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 e^{-r_i}$ são mostrados na tabela abaixo:

Tabela 5-70 – Coeficientes da aproximação.

Função associada aos coeficientes	Coeficientes da interpolação		
	$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$	$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 \ln(r_i)$	$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 e^{-r_i}$
Função radial	0.	0.	-0.000609415583
	0.	0.	0.00291453395
	0.	0.	-0.00726035424
	0.	0.	0.0098295277
	0.	0.	-0.00692093465
	0.	0.	0.00198890269
	0.	0.	0.000183958764
	0.	0.	-0.00018850241
	0.	0.	2.82244073E-005
	0.	0.	5.89216397E-005
	0.	0.	-0.000810904894
	0.	0.	0.00415050425
	0.	0.	-0.0105199441
	0.	0.	0.0141159296
	0.	0.	-0.00977534428
	0.	0.	0.00271380809
	0.	0.	0.000312108139
	0.	0.	-0.000306524482
	0.	0.	7.79812181E-005
	0.	0.	1.75245877E-005
1	0.	0.	-2.13126477E-005
x	1.	1.	1.00000834
y	-1.00667027E-013	-7.27311589E-009	-3.33592379E-006

Percebe-se a tendência ao zeramento dos coeficientes das funções diferentes de X,

porém, no caso da equação $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 e^{-r_i}$, isso não ocorreu. O motivo pode ser a

configuração matemática da função, que fez o sistema linear “perceber” que essa função radial teria o poder de aumentar a precisão da aproximação.

Essa suspeita pode ser confirmada pelo fato da precisão da aproximação do campo com essa função radial ser muito próxima às outras funções que tiveram suas partes radiais zeradas.

5.8.2 Expansão com seis equações globais

Para a verificação das conclusões obtidas anteriormente, foram incluídos novas funções globais, que possuem as características do campo parabolóide. Na Figura 5-10 é mostrado um desenho esquemático da nova expansão obtida.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6
Matriz original						
L1						
L2						
L3						
L4						
L5						
L6						
Expansão						0

Figura 5-10 – Matriz expandida com seis equações globais.

A lógica dessa expansão é idêntica à anterior, variando apenas o número de equações globais.

As novas equações são mostradas abaixo:

$$Eq4 = x^2$$

$$Eq5 = y^2$$

$$Eq6 = x.y$$

Após a implementação das novas rotinas no programa foi feito testes usando o campo constante e parabolóide. A malha usada foi a mesma que a dos testes anteriores. Nas seções 5.8.2.1 e 5.8.2.2 são mostrados os resultados obtidos

5.8.2.1 Resultados para o campo $z(x, y) = 1$

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y + \alpha_{n+4}x^2 + \alpha_{n+5}y^2 + \alpha_{n+6}xy$

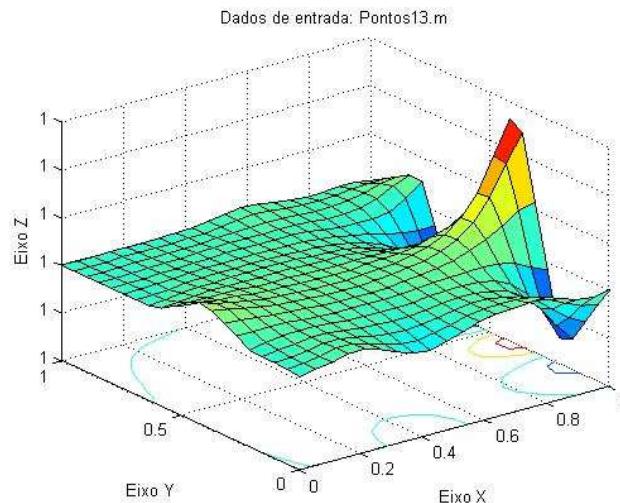


Gráfico 5-85 – Primeiro teste da expansão com seis equações.

Tabela 5-71 – Resultados do primeiro teste da expansão com seis equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	1.00000072	1.00000012	1.00005352	1.00903893
$ \text{Erro} $ (u.v.)	0.00000072	0.00000012	0.00005352	0.00903893

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3 + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y + \alpha_{n+4}x^2 + \alpha_{n+5}y^2 + \alpha_{n+6}xy$

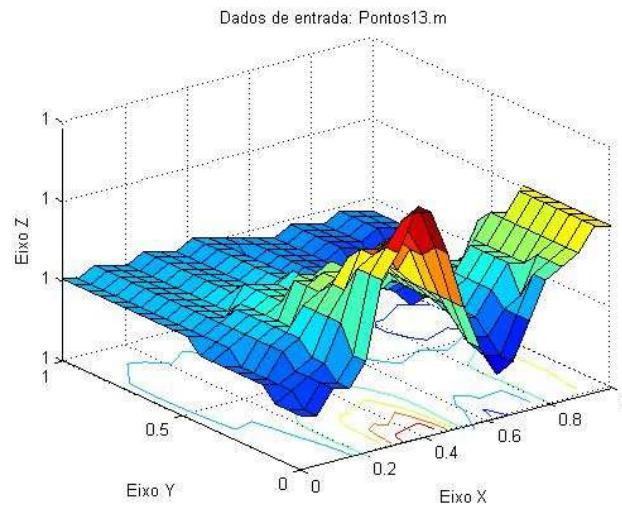


Gráfico 5-86 – Segundo teste da expansão com seis equações.

Tabela 5-72 – Resultados do segundo teste da expansão com seis equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	1.00000012	0.999999404	1.00005352	1.00903893
Erro (u.v.)	0.00000012	0.000000596	0.00005352	0.00903893

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-3r_i} + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y + \alpha_{n+4}x^2 + \alpha_{n+5}y^2 + \alpha_{n+6}xy$

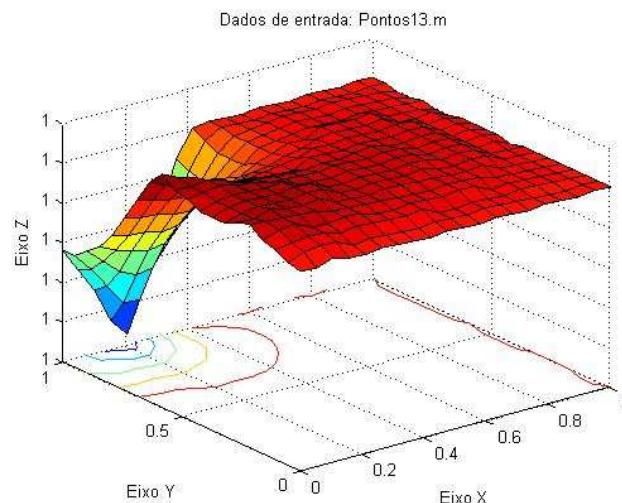


Gráfico 5-87 – Terceiro teste da expansão com seis equações.

Tabela 5-73 – Resultados do terceiro teste da expansão com seis equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	1.00000024	0.999999464	1.00005352	1.00903893
Erro (u.v.)	0.00000024	0.000000536	0.00005352	0.00903893

Equação de interpolação:

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1+r_i)^3} + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y + \alpha_{n+4}x^2 + \alpha_{n+5}y^2 + \alpha_{n+6}xy$$

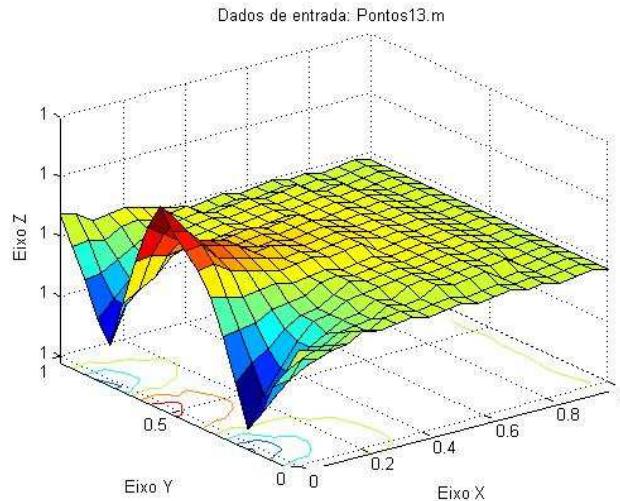


Gráfico 5-88 – Quarto teste da expansão com seis equações.

Tabela 5-74 – Resultados do quarto teste da expansão com seis equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	1.00000024	0.999999344	1.00005352	1.00903893
Erro (u.v.)	0.00000024	0.000000656	0.00005352	0.00903893

5.8.2.2 Resultados para o campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y + \alpha_{n+4}x^2 + \alpha_{n+5}y^2 + \alpha_{n+6}xy$

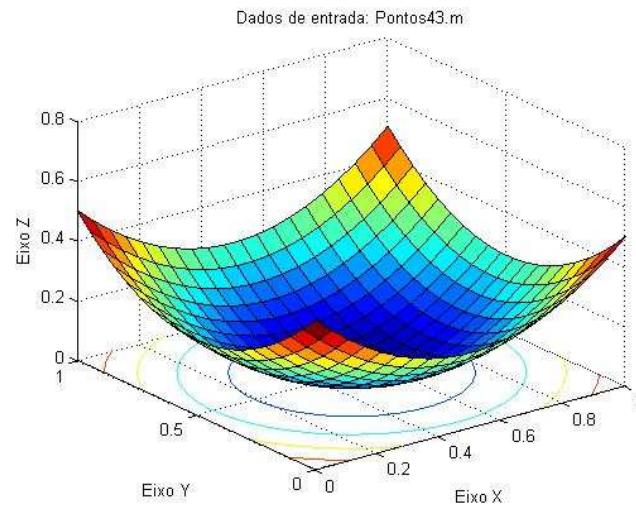


Gráfico 5-89 – Quinto teste da expansão com seis equações.

Tabela 5-75 – Resultados do quinto teste da expansão com seis equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.166664213	0.166667223	0.16666694	0.166655838
Erro (u.v.)	0.000002453	0.000000556	0.000000273	0.000010828

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3 + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y + \alpha_{n+4}x^2 + \alpha_{n+5}y^2 + \alpha_{n+6}xy$

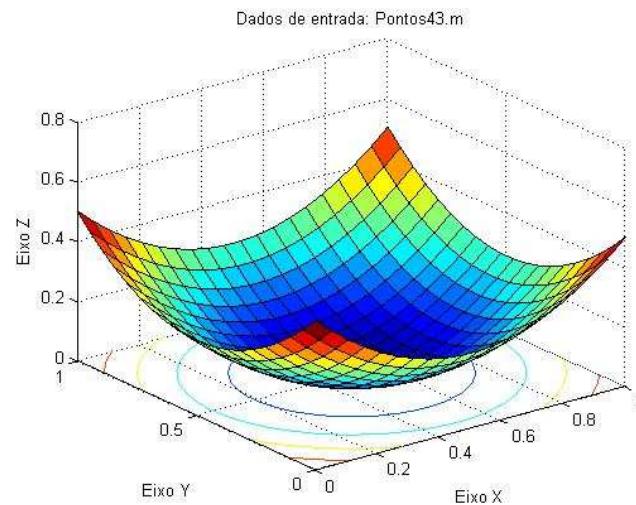


Gráfico 5-90 – Sexto teste da expansão com seis equações.

Tabela 5-76 – Resultados do sexto teste da expansão com seis equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.166666582	0.166666716	0.16666615	0.166655153
Erro (u.v.)	0.000000084	0.000000049	0.000000516	0.000011513

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-3r_i} + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y + \alpha_{n+4}x^2 + \alpha_{n+5}y^2 + \alpha_{n+6}xy$

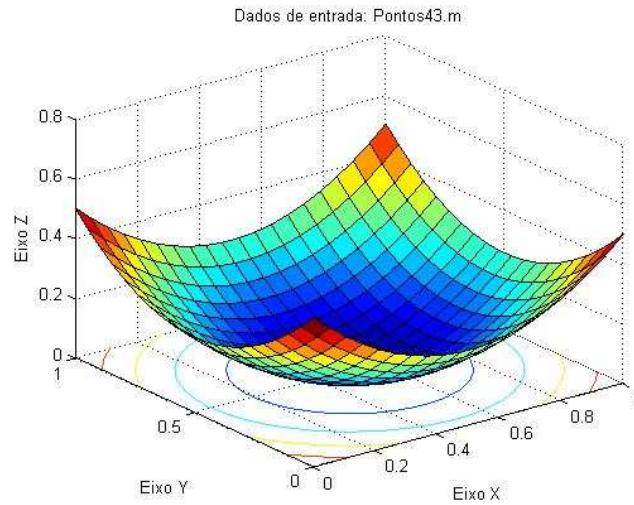


Gráfico 5-91 – Sétimo teste da expansão com seis equações.

Tabela 5-77 – Resultados do sétimo teste da expansão com seis equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.166666776	0.16666697	0.166666567	0.16665566
Erro (u.v.)	0.000000109	0.000000303	0.000000099	0.000011006

Equação de interpolação:

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1+r_i)^3} + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y + \alpha_{n+4}x^2 + \alpha_{n+5}y^2 + \alpha_{n+6}xy$$

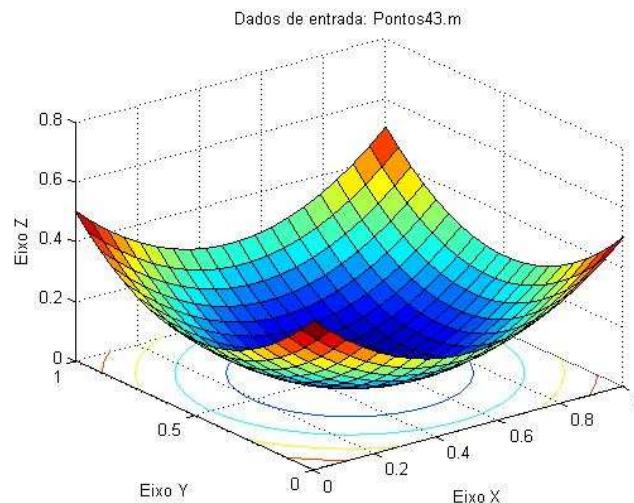


Gráfico 5-92 – Oitavo teste da expansão com seis equações.

Tabela 5-78 – Resultados do oitavo teste da expansão com seis equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.166665941	0.166665956	0.166665688	0.166654482
Erro (u.v.)	0.000000725	0.00000071	0.000000978	0.000012184

5.8.2.3 Conclusão

Compara-se os resultados obtidos com os realizados sem a expansão de matriz, que são mostrados na Tabela 5-79 e Tabela 5-80. Como as equações são grandes para serem representadas nas tabelas de comparação, são exibidas apenas as parcelas radiais das mesmas.

Tabela 5-79 – Comparação dos resultados para o campo $z(x, y) = 1$.

Função radial	Tipo de teste	Volume	Erro
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$	Matriz expandida	1.00903893	0.00903893
	Matriz não expandida	0.945179045	0.054820955
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$	Matriz expandida	1.00903893	0.00903893
	Matriz não expandida	0.98232168	0.01767832
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-3r_i}$	Matriz expandida	1.00903893	0.00903893
	Matriz não expandida	0.958306432	0.041693568
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1 + r_i)^3}$	Matriz expandida	1.00903893	0.00903893
	Matriz não expandida	0.985475123	0.014524877

Tabela 5-80 – Comparação dos resultados para o campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$.

Função radial	Tipo de teste	Volume	Erro
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$	Matriz expandida	0.166655838	0.000010828
	Matriz não expandida	0.236528903	0.069862236
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$	Matriz expandida	0.166655153	0.000011513
	Matriz não expandida	0.179085627	0.01241896
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-3r_i}$	Matriz expandida	0.16665566	0.000011006

	Matriz não expandida	0.284123778	0.117457111
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1+r_i)^3}$	Matriz expandida	0.166654482	0.000012184
	Matriz não expandida	0.295464128	0.128797461

De acordo com os resultados, as parcelas da equação de aproximação que não retornariam resultados precisos tiveram seus coeficientes zerados, como já era esperado. Na Tabela 5-81 é mostrado uma comparação entre os coeficientes da

interpolação do campo parabólico com as função $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$, $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-3r_i}$ e

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1+r_i)^3}.$$

Tabela 5-81 – Coeficientes da aproximação.

Função associada aos coeficientes	Coeficientes da interpolação		
	$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$	$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-3r_i}$	$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1+r_i)^3}$
Função radial	-2.4405701E-005	-1.28788442E-005	1.24470944E-006
	-2.31593981E-006	-3.59732644E-006	2.0245011E-007
	2.06293971E-005	-2.31911883E-007	-2.35559028E-007
	9.13215772E-005	5.71188536E-007	-2.89456551E-007
	-0.00014622591	4.0176306E-007	-7.04929164E-007
	0.000112375164	-7.6985242E-007	-1.03600883E-006
	-0.000124594182	4.78970776E-007	8.78922492E-007
	2.67288651E-005	5.65853675E-008	1.00807085E-006
	9.51827678E-005	5.8117746E-007	8.38240567E-007
	-6.56655393E-005	9.80529862E-008	9.05017259E-007
	1.34319725E-005	-1.66633254E-006	-7.24699078E-007
	-9.00972464E-006	2.12906244E-007	-5.38568372E-007
	1.70973217E-005	6.89722924E-007	-5.61644072E-007
	-1.2391728E-005	2.04864091E-006	-1.02628758E-006
	-1.92526204E-006	-1.27302508E-006	3.08926275E-007
	-1.03860498E-006	1.97837994E-006	-7.27800114E-007
	3.25663814E-006	-4.1409503E-006	1.41914006E-006
	6.54653877E-006	-8.89769581E-006	7.87014358E-007

	-7.51295738E-006	8.88589238E-006	-7.6863904E-007
	8.69560699E-006	2.29280595E-005	-2.1214621E-006
1	0.499997675	0.500001252	0.50000006
x	-1.00000036	-1.00000763	-0.999998152
y	-0.999979079	-1.00000691	-1.0000062
x^2	1.00000393	1.00000632	0.999998748
y^2	0.999983609	1.00000525	1.00000679
$x.y$	-3.12343241E-006	2.56448538E-006	-7.80174219E-007

Percebe-se a tendência dos coeficientes serem iguais nos três casos mostrados. No caso dos coeficientes da função $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$, há três coeficientes que possuem uma ordem de grandeza de 10^{-4} . Essa foi a causa da pequena variação da resposta para essa função de interpolação.

O teste das funções eq1 e $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 e^{-r_i}$ não foram mostrados. Pelos testes, quando é criado o sistema linear com a expansão com seis funções globais a matriz do sistema pode possuir linhas linearmente dependentes, o que torna o sistema com infinitas soluções.

A possível dependência linear da matriz do sistema linear pode ter sido causada pelo fato das duas equações em que houve problemas possuir o termo r_i^2 . Esse termo pode sofrer alguma influência das funções de expansão x^2 e y^2 , pelo fato delas serem quadráticas.

5.9 TESTES COM EXPANSÃO DO SISTEMA LINEAR COM PONTOS INTERNOS NO DOMÍNIO

O objetivo desse teste é comparar a precisão dos resultados obtidos com o domínio não possuindo pontos internos com o domínio possuindo pontos internos.

A estrutura de apresentação dos resultados e execução dos testes foi a mesma dos testes apresentados na seção 5.8, diferindo apenas a malha usada, que é representada na Figura 5-11.

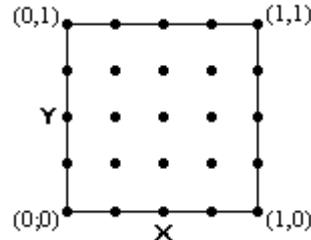


Figura 5-11 – Malha para os testes de expansão.

5.9.1 Expansão com três equações globais

Nas seções seguintes são apresentados os testes realizados com domínio com pontos internos e expandindo o sistema linear com três equações globais.

5.9.1.1 Resultados para o campo $z(x, y) = 1$

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y$

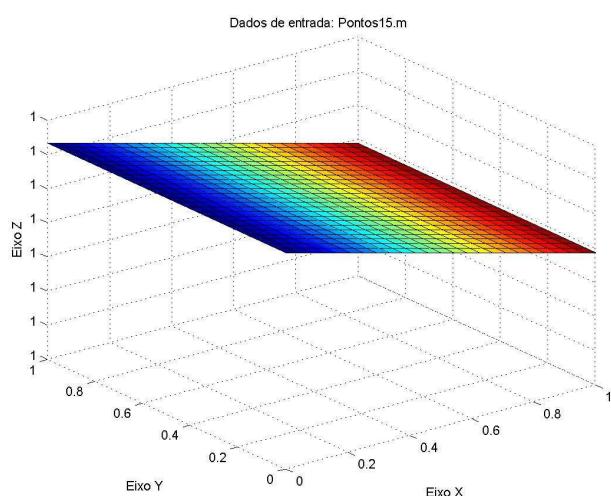


Gráfico 5-93 – Primeiro teste da expansão com três equações.

Tabela 5-82 – Resultados do primeiro teste da expansão com três equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	1.	0.999999344	1.00005352	1.00903893
Erro (u.v.)	0.	0.000000656	0.00005352	0.00903893

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3 + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y$

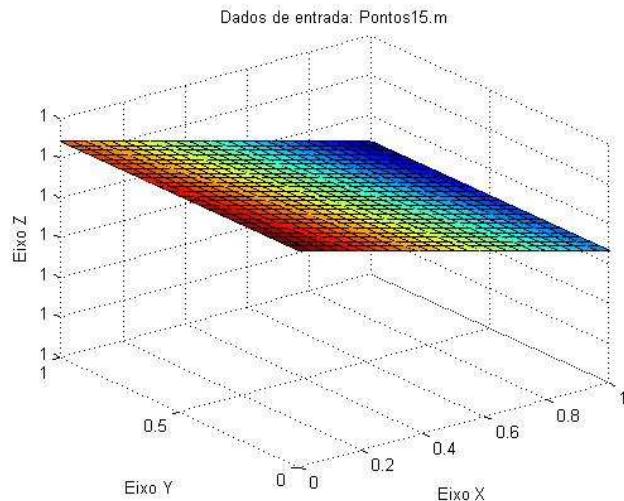


Gráfico 5-94 – Segundo teste da expansão com três equações.

Tabela 5-83 – Resultados do segundo teste da expansão com três equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	1.	0.999999344	1.00005352	1.00903893
Erro (u.v.)	0.	0.000000656	0.00005352	0.00903893

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 \ln(r_i) + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y$

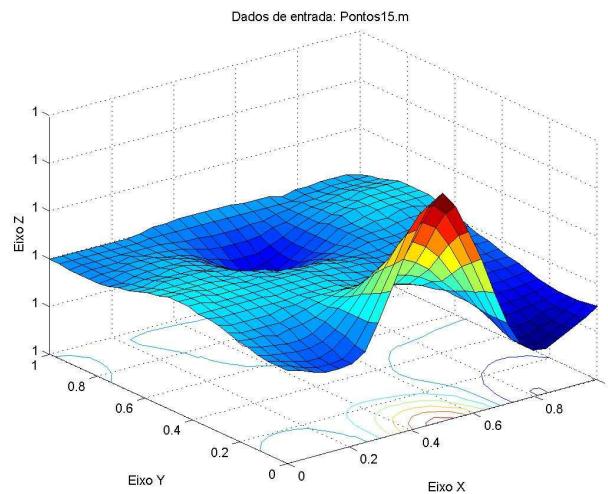


Gráfico 5-95 – Terceiro teste da expansão com três equações.

Tabela 5-84 – Resultados do terceiro teste da expansão com três equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	1.00000083	0.999999464	1.00005341	1.00903893
Erro (u.v.)	0.00000083	0.000000536	0.00005341	0.00903893

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-3r_i} + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y$

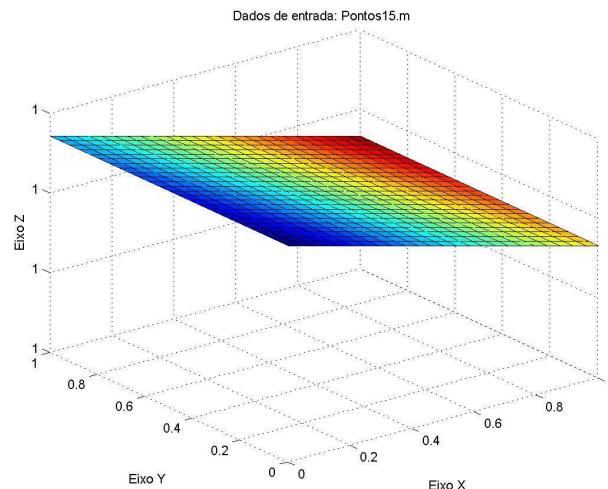


Gráfico 5-96 – Quarto teste da expansão com três equações.

Tabela 5-85 – Resultados do quarto teste da expansão com três equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	1.	0.999999344	1.00005352	1.00903893
Erro (u.v.)	0.	0.000000656	0.00005352	0.00903893

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1+r_i)^3} + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y$

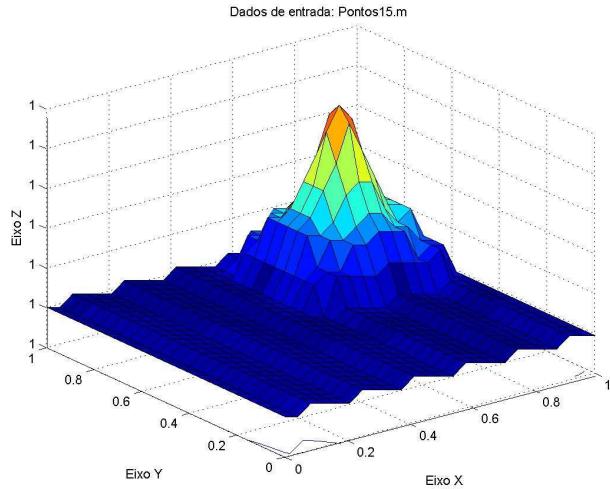


Gráfico 5-97 – Quinto teste da expansão com três equações.

Tabela 5-86 – Resultados do quinto teste da expansão com três equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	1.	0.999999344	1.000005352	1.00903893
Erro (u.v.)	0.	0.000000656	0.00005352	0.00903893

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 e^{-r_i} + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y$

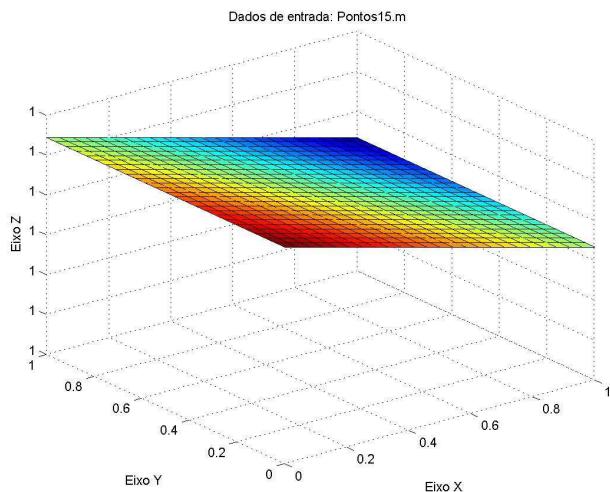


Gráfico 5-98 – Sexto teste da expansão com três equações.

Tabela 5-87 – Resultados do sexto teste da expansão com três equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	1.	0.999999344	1.00005352	1.00903893
Erro (u.v.)	0.	0.000000656	0.00005352	0.00903893

5.9.1.2 Resultados para o campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y$

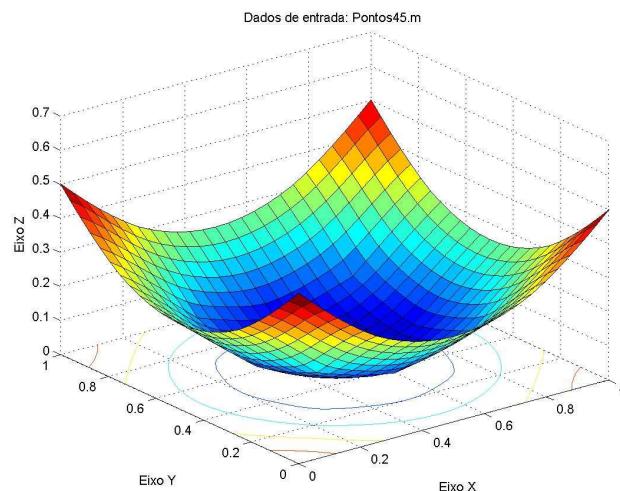


Gráfico 5-99 – Sétimo teste da expansão com três equações.

Tabela 5-88 – Resultados do sétimo teste da expansão com três equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.166670829	0.178941607	0.179039329	0.179036841
Erro (u.v.)	0.000004162	0.01227494	0.012372662	0.012370174

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3 + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y$

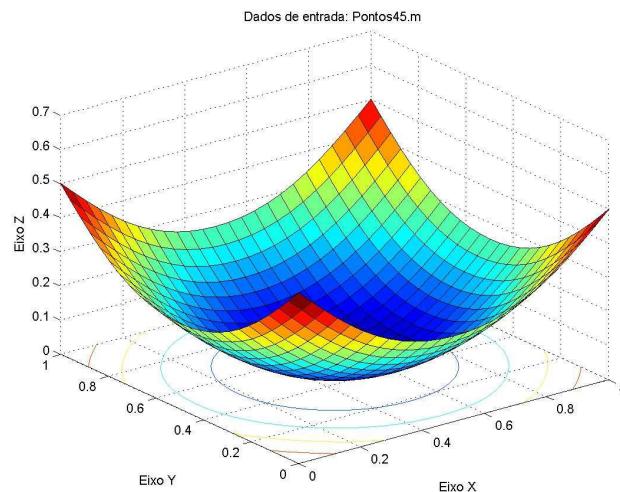


Gráfico 5-100 – Oitavo teste da expansão com três equações.

Tabela 5-89 – Resultados do oitavo teste da expansão com três equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.166666508	0.167757004	0.167756394	0.167745546
Erro (u.v.)	0.000000158	0.001090337	0.001089727	0.001078879

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 \ln(r_i) + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y$

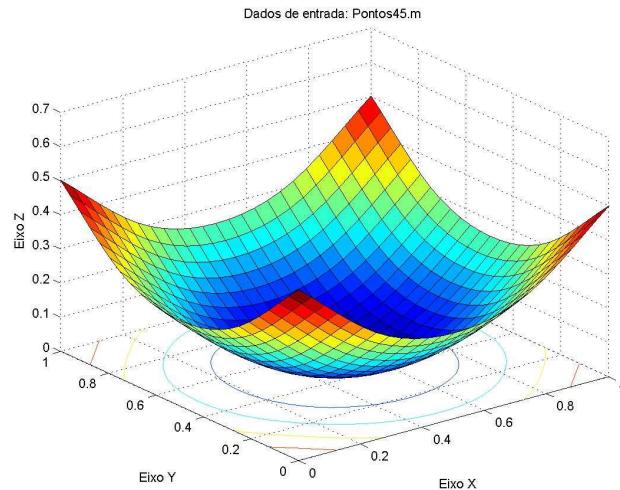


Gráfico 5-101 – Nono teste da expansão com três equações.

Tabela 5-90 – Resultados do nono teste da expansão com três equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.166667521	0.170558453	0.170563728	0.170553803
Erro (u.v.)	0.000000854	0.003891786	0.003897061	0.003887136

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-3r_i} + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y$

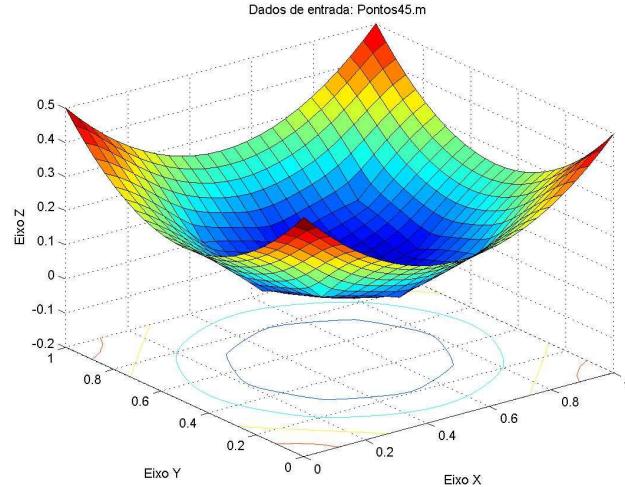


Gráfico 5-102 – Décimo teste da expansão com três equações.

Tabela 5-91 – Resultados do décimo teste da expansão com três equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.166666672	0.186259955	0.18642576	0.186423615
Erro (u.v.)	0.000000005	0.015593288	0.019759093	0.019756948

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1+r_i)^3} + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y$

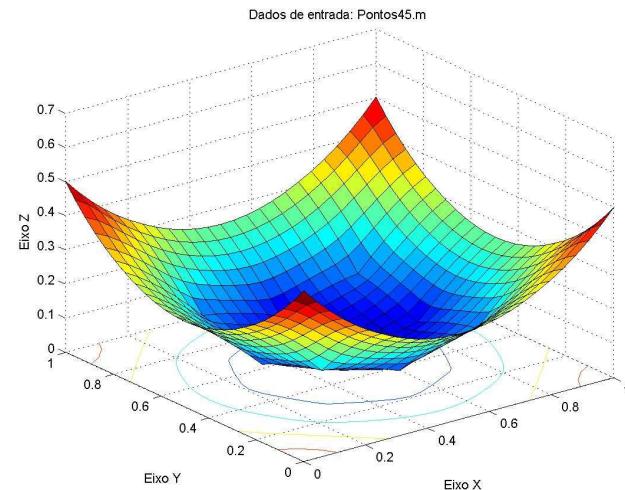


Gráfico 5-103 – Décimo primeiro teste da expansão com três equações.

Tabela 5-92 – Resultados do décimo primeiro teste da expansão com três equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.166666687	0.187446207	0.187628284	0.187624484
Erro (u.v.)	0.00000002	0.02077954	0.020961617	0.020957817

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 e^{-r_i} + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y$

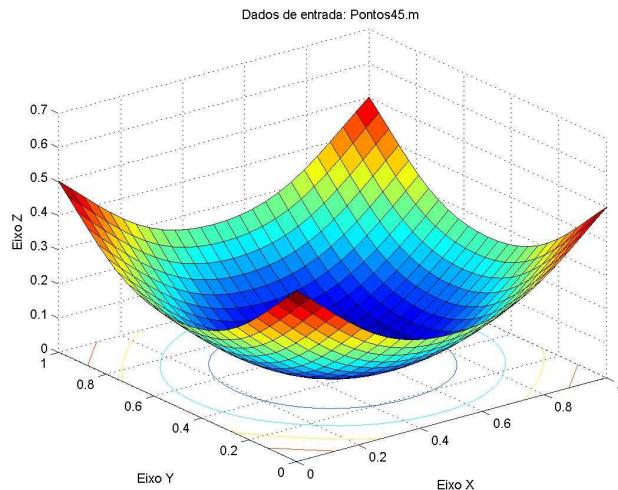


Gráfico 5-104 – Décimo segundo teste da expansão com três equações.

Tabela 5-93 – Resultados do décimo segundo teste da expansão com três equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.16666837	0.169504851	0.169506297	0.169495732
Erro (u.v.)	0.000001703	0.002838184	0.00283963	0.002829065

5.9.1.3 Conclusão

A Tabela 5-94 e a Tabela 5-95 mostram o comparativo entre os resultados para 1000 subdivisões no domínio entre os testes com a matriz expandida usando domínios com pontos internos e com domínios sem pontos internos.

Tabela 5-94 – Comparaçāo dos resultados para o campo $z(x, y) = 1$.

Função radial	Tipo de domínio	Volume	Erro
$\bar{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 e^{-r_i}$	Com ponto interno	1.00903893	0.00903893

	Sem ponto interno	1.00903904	0.00903904
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$	Com ponto interno	1.00903893	0.00903893
	Sem ponto interno	1.00903893	0.00903893
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 \ln(r_i)$	Com ponto interno	1.00903893	0.00903893
	Sem ponto interno	1.00903893	0.00903893
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-3r_i}$	Com ponto interno	1.00903893	0.00903893
	Sem ponto interno	1.00903893	0.00903893
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1+r_i)^3}$	Com ponto interno	1.00903893	0.00903893
	Sem ponto interno	1.00903893	0.00903893
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 e^{-r_i}$	Com ponto interno	1.00903893	0.00903893
	Sem ponto interno	1.00903893	0.00903893

Tabela 5-95 – Comparaçāo dos resultados para o campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$.

Função radial	Tipo de teste	Volume	Erro
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$	Com ponto interno	0.179036841	0.012370174
	Sem ponto interno	0.268069208	0.101402541
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$	Com ponto interno	0.167745546	0.001078879
	Sem ponto interno	0.166588634	0.000078032
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 \ln(r_i)$	Com ponto interno	0.170553803	0.003887136
	Sem ponto interno	0.202441394	0.035774727
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-3r_i}$	Com ponto interno	0.186423615	0.019756948
	Sem ponto interno	0.300240517	0.13357385
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1+r_i)^3}$	Com ponto interno	0.187624484	0.020957817
	Sem ponto interno	0.30147627	0.134809603
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 e^{-r_i}$	Com ponto interno	0.169495732	0.002829065
	Sem ponto interno	0.181414142	0.014747475

Pelos resultados apresentados, percebe-se uma tímida melhora dos resultados na inclusão de pontos internos na aproximação. No caso do campo $z(x, y) = 1$, os resultados foram os mesmos nos dois testes já que uma das equações globais utilizadas era uma função constante. No caso do campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$, houve uma pequena melhora, exceto para a função radial cúbica. Um dos fatores que podem ter influenciado nessa exceção foi o fato da função radial cúbica possuir um comportamento geométrico semelhante ao campo parabólico.

Como curiosidade, na Tabela 5-96 é apresentada os coeficientes das interpolações do campo $z(x, y) = 1$ com as funções radiais $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$, $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 \ln(r_i)$ e $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 e^{-r_i}$. Como são equações com muitos termos, é mostrado nas tabelas de comparação apenas a parcela radial da equação de aproximação.

Tabela 5-96 – Coeficientes da aproximação.

Função associada aos coeficientes	Coeficientes da interpolação		
	$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$	$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 \ln(r_i)$	$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 e^{-r_i}$
Função radial	0.	8.4607309E-006	0.
	0.	-5.41996415E-005	0.
	0.	0.000101297112	0.
	0.	-6.46185363E-005	0.
	0.	1.52114771E-005	0.
	0.	4.8096399E-007	0.
	0.	-3.06548668E-006	0.
	0.	3.96580435E-006	0.
	0.	-3.06409106E-006	0.
	0.	-4.48806304E-006	0.
	0.	1.37491897E-005	0.
	0.	-3.83139923E-006	0.
	0.	1.3656404E-006	0.
	0.	-7.71553186E-006	0.
	0.	4.78298307E-006	0.
	0.	1.63677703E-006	0.

	0.	4.19473736E-006	0.
	0.	-2.87567636E-005	0.
	0.	4.95484892E-006	0.
	0.	3.70274279E-007	0.
	0.	1.75669102E-005	0.
	0.	6.0204502E-007	0.
	0.	1.25768156E-005	0.
	0.	-3.40798288E-005	0.
	0.	1.26030336E-005	0.
1	1.	1.00000036	1.
x	6.05909745E-013	-9.80846264E-013	-3.28572169E-011
y	1.53436228E-015	-5.39644986E-007	-3.34851313E-011

Na tabela acima nota-se a tendência esperada nos coeficientes das parcelas que não representam bem o campo, que é o zeramento. As parcelas que são bem representativas são ajustadas inclusive para eliminar algum resquício de erro gerado pelo não zeramento das outras parcelas.

5.9.2 Expansão com seis equações globais

Esse teste é semelhante ao realizado na seção 5.9.1, porém comparando os resultados dos campos $z(x, y) = 1$ e $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$ com e sem pontos internos no domínio utilizando seis equações globais na expansão do sistema linear.

5.9.2.1 Resultados para o campo $z(x, y) = 1$

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y + \alpha_{n+4}x^2 + \alpha_{n+5}y^2 + \alpha_{n+6}xy$

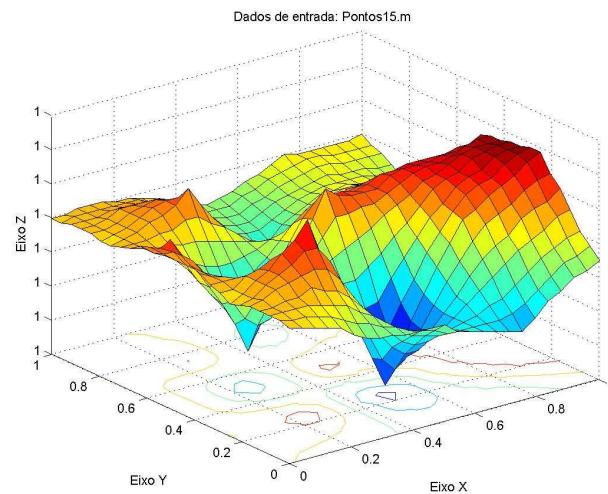


Gráfico 5-105 – Primeiro teste da expansão com seis equações.

Tabela 5-97 – Resultados do primeiro teste da expansão com seis equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	1.00000072	0.999999404	1.00005341	1.00903893
Erro (u.v.)	0.00000072	0.000000596	0.00005341	0.00903893

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3 + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y + \alpha_{n+4}x^2 + \alpha_{n+5}y^2 + \alpha_{n+6}xy$

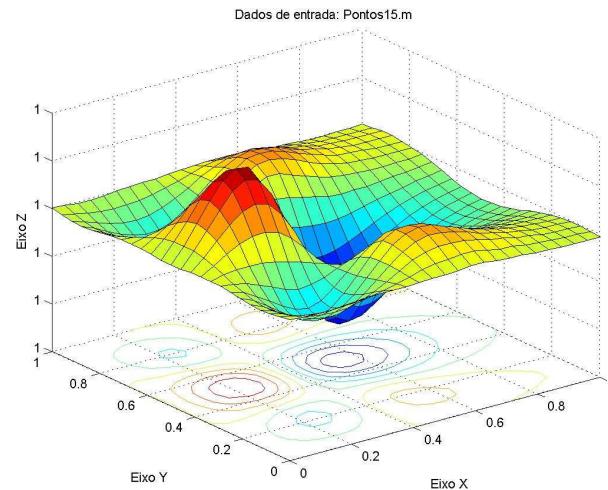


Gráfico 5-106 – Segundo teste da expansão com seis equações.

Tabela 5-98 – Resultados do segundo teste da expansão com seis equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.999995112	0.999998868	1.00005352	1.00903893
Erro (u.v.)	0.000004888	0.000001132	0.00005352	0.00903893

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-3r_i} + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y + \alpha_{n+4}x^2 + \alpha_{n+5}y^2 + \alpha_{n+6}xy$

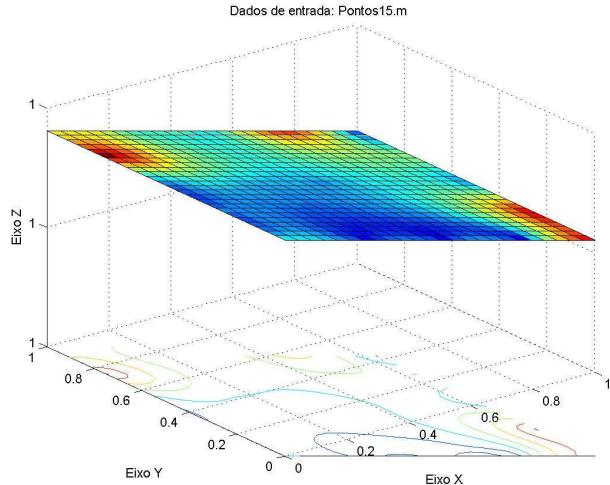


Gráfico 5-107 – Terceiro teste da expansão com seis equações.

Tabela 5-99 – Resultados do terceiro teste da expansão com seis equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	1.	0.999999344	1.00005352	1.00903893
Erro (u.v.)	0.	0.000000656	0.00005352	0.00903893

Equação de interpolação:

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1+r_i)^3} + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y + \alpha_{n+4}x^2 + \alpha_{n+5}y^2 + \alpha_{n+6}xy$$

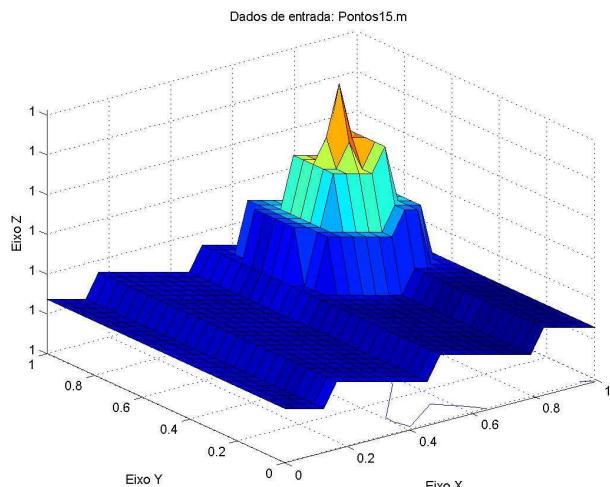


Gráfico 5-108 – Quarto teste da expansão com seis equações.

Tabela 5-100 – Resultados do quarto teste da expansão com seis equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	1.	0.999999344	1.00005352	1.00903893
Erro (u.v.)	0.	0.000000656	0.00005352	0.00903893

5.9.2.2 Resultados para o campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y + \alpha_{n+4}x^2 + \alpha_{n+5}y^2 + \alpha_{n+6}xy$

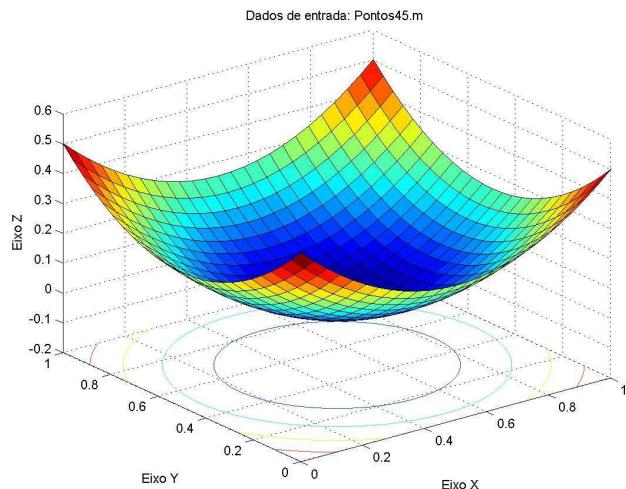


Gráfico 5-109 – Quinto teste da expansão com seis equações.

Tabela 5-101 – Resultados do quinto teste da expansão com seis equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.166665331	0.166665748	0.166665345	0.166654244
Erro (u.v.)	0.000001335	0.000000918	0.000001321	0.000012422

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3 + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y + \alpha_{n+4}x^2 + \alpha_{n+5}y^2 + \alpha_{n+6}xy$

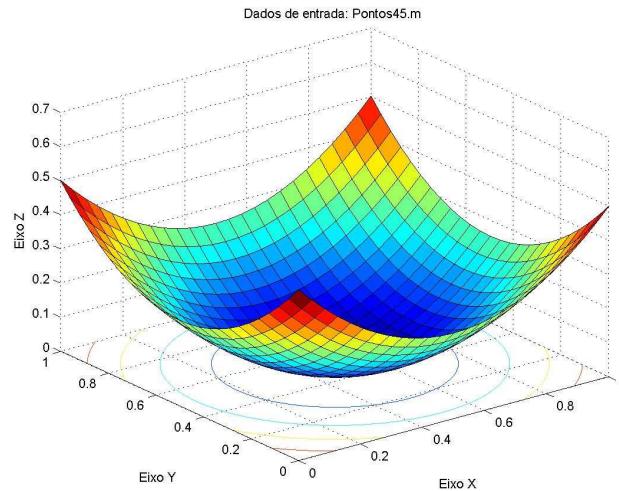


Gráfico 5-110 – Sexto teste da expansão com seis equações.

Tabela 5-102 – Resultados do sexto teste da expansão com seis equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.166667968	0.166667074	0.166666344	0.166655749
Erro (u.v.)	0.000001301	0.000000407	0.000000322	0.000010917

Equação de interpolação: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-3r_i} + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y + \alpha_{n+4}x^2 + \alpha_{n+5}y^2 + \alpha_{n+6}xy$

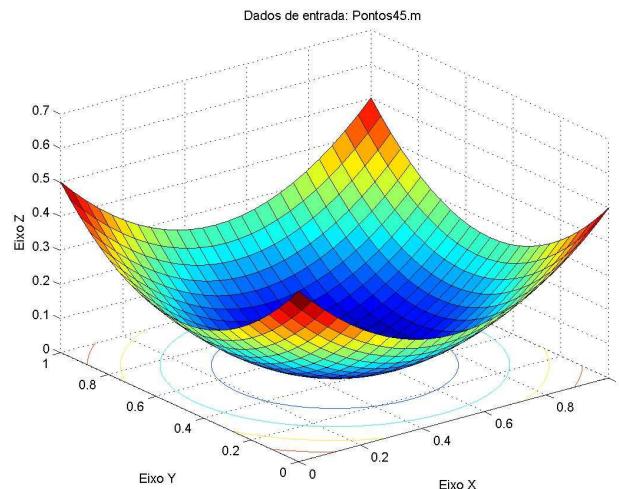


Gráfico 5-111 – Sétimo teste da expansão com seis equações.

Tabela 5-103 – Resultados do sétimo teste da expansão com seis equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.166666687	0.166667014	0.166666433	0.166655436
Erro (u.v.)	0.00000002	0.000000347	0.000000233	0.000012306

Equação de interpolação:

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1+r_i)^3} + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}x + \alpha_{n+3}y + \alpha_{n+4}x^2 + \alpha_{n+5}y^2 + \alpha_{n+6}xy$$

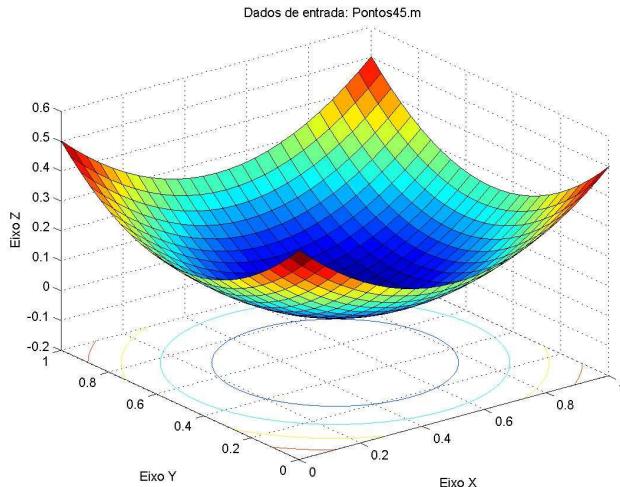


Gráfico 5-112 – Oitavo teste da expansão com seis equações.

Tabela 5-104 – Resultados do oitavo teste da expansão com seis equações.

Nº de subdivisões	1	10	100	1000
Volume (u.v.)	0.166666657	0.166666508	0.166665986	0.166654974
Erro (u.v.)	0.000000009	0.000000158	0.00000068	0.000011692

5.9.2.3 Conclusão

Na Tabela 5-105 e na Tabela 5-106 são mostrados os resultados dos testes, sendo os mesmos comparados com os resultados para domínios sem pontos internos. Pelos motivos já citados anteriormente, só será exibido a parcela radial das equações de aproximação nas tabelas de comparação.

Tabela 5-105 – Comparação dos resultados para o campo $z(x, y) = 1$.

Função radial	Tipo de teste	Volume	Erro
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$	Com ponto interno	1.00903893	0.00903893
	Sem ponto interno	1.00903893	0.00903893
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$	Com ponto interno	1.00903893	0.00903893
	Sem ponto interno	1.00903893	0.00903893

$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-3r_i}$	Com ponto interno	1.00903893	0.00903893
	Sem ponto interno	1.00903893	0.00903893
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1+r_i)^3}$	Com ponto interno	1.00903893	0.00903893
	Sem ponto interno	1.00903893	0.00903893

Tabela 5-106 – Comparação dos resultados para o campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$.

Função radial	Tipo de teste	Volume	Erro
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$	Com ponto interno	0.166654244	0.000012422
	Sem ponto interno	0.166655838	0.000010828
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^3$	Com ponto interno	0.166655749	0.000010917
	Sem ponto interno	0.166655153	0.000011513
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-3r_i}$	Com ponto interno	0.166655436	0.000012306
	Sem ponto interno	0.16665566	0.000011006
$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1+r_i)^3}$	Com ponto interno	0.166654974	0.000011692
	Sem ponto interno	0.166654482	0.000012184

Pela comparação, não houve diferença na aproximação com pontos no interior do domínio e com pontos apenas no contorno do domínio para o campo $z(x, y) = 1$.

Para o campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$, os resultados para o domínio com pontos internos oscilaram entre melhores e piores com os resultados com pontos apenas no contorno.

Na Tabela 5-107 é mostrado a comparação entre os coeficientes da interpolação do

campo $z(x, y) = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$ com as função $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$, $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-3r_i}$ e

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1+r_i)^3}.$$

Tabela 5-107 – Coeficientes da aproximação.

Função associada aos coeficientes	Coeficientes da interpolação		
	$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$	$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-3r_i}$	$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1+r_i)^3}$
Função radial	3.57662316E-006	9.70860924E-007	2.03246664E-008
	-1.3339888E-005	-4.63523577E-007	1.24429647E-007

	2.46898708E-006	-5.19894058E-007	1.45069947E-007
	2.35489279E-005	-7.18905255E-007	-1.01441202E-007
	1.7193539E-005	6.98633755E-008	-1.98052518E-007
	-4.07401676E-005	2.44054633E-007	-3.37227647E-007
	-2.73991063E-005	2.19321606E-007	1.16037803E-007
	1.81785672E-005	-1.25400015E-006	1.38886935E-006
	7.05362299E-006	4.43880083E-007	4.87982447E-007
	-7.27771123E-007	-1.97193981E-006	1.57568218E-006
	-1.43504485E-006	-6.37936012E-007	3.11356416E-007
	9.10567394E-007	-3.40902375E-007	1.1961076E-007
	2.42980855E-006	4.99760631E-007	-3.1416613E-007
	-2.17291881E-006	6.27363363E-007	-1.18641395E-007
	5.57317935E-006	6.5779642E-007	-3.60474246E-007
	1.98688826E-006	6.85627697E-007	-2.24145467E-007
	-2.25234908E-005	-3.31820786E-007	3.48241187E-008
	1.95403463E-005	-3.78631491E-008	2.26248034E-008
	9.63817911E-006	-1.08861464E-007	-1.09005882E-007
	9.53613926E-006	-6.71797622E-008	-2.91894997E-009
	4.91342371E-006	-5.32058095E-007	2.83752939E-007
	-6.00968633E-006	-1.77738605E-006	1.38071039E-006
	-7.71724353E-006	-2.69442126E-007	-1.23880838E-007
	-7.52726555E-006	-1.85641306E-006	1.62464232E-006
	2.46485206E-006	6.61439935E-006	-6.70288455E-006
1	0.500000775	0.499999166	0.500000179
x	-1.00001359	-0.99999404	-1.0000006
y	-1.00000572	-1.00000036	-0.999998927
x^2	1.00000966	0.999995232	1.00000095
y^2	1.00000334	1.00000083	0.999999166
$x.y$	3.36651328E-006	-1.11817826E-006	-8.315846E-007

Comparando os coeficientes apresentados, nota-se a tendência dos coeficientes se tornarem parecidos, confirmando as conclusões anteriores. As variações observadas é que fazem os valores das aproximações diferirem. Isso não ocorre para o campo $z(x, y) = 1$, pois os coeficientes são muito parecidos.

No fim, não houve grande diferença entre os testes com seis equações. As características da aproximação com tantas equações globais diferentes garantem uma boa aproximação em uma gama de campos, com diferentes geometrias.

6 TESTES DE INTEGRAÇÃO DE LINHA

Esse teste consistiu em avaliar a precisão do cálculo da área debaixo de uma curva que segue por uma superfície interpolada por funções radiais. A precisão desse método foi inferida pela diferença entre o valor analítico e o valor computacional, semelhante aos testes com volume.

No caso estudado, foi alterado o programa em FORTRAN que, dado um campo genérico, calcula a integral através de um caminho qualquer, sendo a escolha do caminho dada através de opções no programa ou em um arquivo que possui os pontos x e y que o caminho escolhido percorre no domínio do campo considerado. O cálculo analítico de área é feito por meio de integrais de linhas ou integrais curvilíneas, apresentadas na seção 6.1.

O teste é realizado no campo $z(x, y) = e^{x+y}$, que terá seu arquivo de entrada no programa chamado de “Pontos51.m”. Os caminhos a serem usados no teste são uma reta, um polinômio de 2º grau, um polinômio de 5º grau e um caminho não suave, mas suave em partes, que usa duas retas para ligar o ponto inicial e o ponto final da integração.

O resultado numérico foi obtido realizando 1000 subdivisões no caminho testado e somando cada área calculada nesses intervalos para a composição do intervalo final.

Foram feitos testes com dois conjuntos de pontos, o que segue $(0;0) \rightarrow (1;1)$ e o que segue $(0;0) \rightarrow (0,5;0,5)$.

Para os testes, as equações radiais usadas na interpolação foram $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$,

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 \ln(r_i), \quad \bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-3r_i}, \quad \bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-3r_i^2}, \quad \bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i / (1 + r_i)^3, \quad \text{e} \quad \bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i^2 e^{-r_i}.$$

6.1 INTEGRAL DE LINHA OU CURVILÍNEA

Para o cálculo da área, pode-se considerar uma curva S , que une dois pontos (1 e 2) e uma função $f = f(x, y)$ contínua em um intervalo que contém a curva C . O valor da função f varia ao longo da curva C .

Para o cálculo da área sob uma curva suave que segue uma superfície qualquer é utilizado a integral de linha, que é definida como segue:

$$A = \int_a^b f(x, y) ds$$

Porém, para o cálculo da área, é necessário fazer uma parametrização do caminho escolhido, que será armazenado em um vetor $\vec{r}(t)$. Com essa parametrização, é necessário realizar a troca de variáveis na integral acima, que segue a relação $ds = \left| \vec{r}' \right| dt$, ou seja, ds é proporcional à dt , sendo que a proporção é dada pelo módulo da derivada do vetor $\vec{r}(t)$, que é $\left| \vec{r}'(t) \right| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$.

6.2 TESTES DA ORIGEM ATÉ O PONTO (1;1)

6.2.1 Resultados para o caminho reto

6.2.1.1 Cálculo analítico

A equação deste caminho é $y = x$, onde é adotado, para a parametrização, $x = t$ e, consequentemente, $y = t$. O vetor da parametrização se torna $\vec{r}(t) = (t; t)$ e sua derivada $\vec{r}'(t) = (1; 1)$, logo, o módulo de \vec{r}' é $\sqrt{2}$, sendo $ds = \sqrt{2}dt$. Considerando $x = t$, a integral é calculada de 0 até 1.

Calculando a integral da área:

$$A = \int e^{x+y} ds$$

$$A = \int_0^1 e^{t+t} \sqrt{2} dt$$

$$A = \sqrt{2} \int_0^1 e^{2t} dt$$

Substituído 2t por u:

$$2t = u$$

$$2dt = du$$

$$dt = \frac{du}{2}$$

$$u(0) = 0$$

$$u(1) = 2$$

$$A = \sqrt{2} \int_0^2 e^u \frac{du}{2}$$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^2 e^u du$$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} [e^u]_0^2$$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} (e^2 - 1) \approx 4,5178$$

6.2.1.2 Resultados numéricos

Simulado pelo programa, para o caminho que segue por uma reta, os resultados obtidos estão na Tabela 6-1. Os resultados mostram a comparação entre o resultado analítico e o numérico, através do erro.

Tabela 6-1 – Resultados para o caminho por uma reta.

Equação	Numérico	Erro
$f(x, y) = r$	4,52646875	0,008723857
$f(x, y) = r^2 \ln(r)$	4,60509825	0,087353357
$f(x, y) = e^{-3r}$	4,54421616	0,026471267

$f(x, y) = e^{-3r^2}$	4,54152775	0,023782857
$f(x, y) = \frac{1}{(1+r)^3}$	4,5201869	0,002442007
$f(x, y) = r^2 e^{-r}$	4,52875614	0,011011247

6.2.2 Resultados para o caminho parabólico de 2º grau

6.2.2.1 Cálculo analítico

A equação deste caminho é $y = x^2$, onde é adotado para a parametrização $x = t$ e, consequentemente, $y = t^2$. O vetor da parametrização se torna $\vec{r}(t) = (t; t^2)$ e sua derivada $\vec{r}'(t) = (1; 2t)$, logo, o módulo de \vec{r}' é $\sqrt{1+4t^2}$, sendo $ds = \sqrt{1+4t^2} dt$.

Substituindo, a integral de linha é:

$$A = \int_0^1 e^{t+t^2} \sqrt{1+4t^2} dt$$

Como o cálculo dessa integral é muito complicado analiticamente, ela foi calculada numericamente com a quadratura de Gauss. Usando 10 pontos de Gauss (20 pontos, mas só considerando os positivos, pois a função vai de $(0;0) \rightarrow (1;1)$):

$$A = \int_0^1 e^{t+t^2} \sqrt{1+4t^2} dt$$

$$A = 4,680682126$$

6.2.2.2 Resultados numéricos

Na Tabela 6-2 são mostrados os resultados dessa aproximação. Na tabela é mostrado o resultado numérico e o erro gerado.

Tabela 6-2 – Resultados para o caminho por uma parábola de segundo grau.

Equação	Numérico	Erro
$f(x, y) = r$	4,68592834	0,005246214
$f(x, y) = r^2 \ln(r)$	4,75682163	0,076139504
$f(x, y) = e^{-3r}$	4,70758343	0,026901304
$f(x, y) = e^{-3r^2}$	4,70535851	0,024676384
$f(x, y) = \frac{1}{(1+r)^3}$	4,68198347	0,001301344
$f(x, y) = r^2 e^{-r}$	4,69122314	0,010541014

6.2.3 Resultados para o caminho parabólico de 5º grau

6.2.3.1 Cálculo analítico

Nesse caso, a equação deste caminho é $y = x^5$, onde, para a parametrização, $x = t$ e $y = t^5$. O vetor da parametrização se torna $\vec{r}(t) = (t; t^5)$ e sua derivada $\vec{r}'(t) = (1; 5t^4)$. O módulo de \vec{r}' é $\sqrt{1 + 25t^8}$, com $ds = \sqrt{1 + 25t^8} dt$.

A integral de linha é:

$$A = \int_0^1 e^{t+t^5} \sqrt{1+25t^8} dt$$

Esse cálculo é muito complicado analiticamente, por isso ela foi calculada numericamente com a quadratura de Gauss, exatamente da mesma forma que foi feito na seção 6.2.1.1. Usando 10 pontos de Gauss:

$$A = \int_0^1 e^{t+t^5} \sqrt{1+25t^8} dt$$

$$A = 5,165600433$$

6.2.3.2 Resultados numéricos

Na Tabela 6-3 são mostrados os resultados para esse teste com as funções radiais usadas para os testes com integrais de linha.

Tabela 6-3 – Resultados para o caminho por uma parábola de quinto grau.

Equação	Numérico	Erro
$f(x, y) = r$	5,17823982	0,012639387
$f(x, y) = r^2 \ln(r)$	5,22230482	0,056704387
$f(x, y) = e^{-3r}$	5,17517042	0,009569987
$f(x, y) = e^{-3r^2}$	5,19808006	0,032479627
$f(x, y) = \frac{1}{(1+r)^3}$	5,18351603	0,017915597
$f(x, y) = r^2 e^{-r}$	5,17610502	0,010504587

6.2.4 Resultados para o caminho não suave

6.2.4.1 Cálculo analítico

O caminho utilizado aqui não é suave, mas é suave em duas partes. Com isso pode-se desdobrar a integral em linha em duas e calcular a área normalmente. O caminho utilizado vai do ponto $(0;0)$ até $(1;0)$, depois sai de $(1;0)$ e chega em $(1;1)$ utilizando duas retas.

A primeira parte do caminho possui a equação paramétrica $x=t$ e $y=0$, o que torna o vetor da parametrização $\vec{r}(t) = (t; 0)$ e sua derivada $\vec{r}'(t) = (1; 0)$. Com isso o módulo de \vec{r}' é $\sqrt{1}$, sendo por sua vez $ds = dt$. A integral desse caminho será calculado de 0 até 1.

A segunda parte do caminho possui a equação paramétrica $y=t$ e $x=1$, o que torna o vetor da parametrização $\vec{r}(t) = (1; t)$ e sua derivada $\vec{r}'(t) = (0; 1)$. Logo o módulo de \vec{r}' é $\sqrt{1}$ e $ds = dt$. A integral desse caminho será calculado de 0 até 1.

Calculando a integral da área:

$$A = \int e^{x+y} ds$$

$$A = \int_0^1 e^t dt + \int_0^1 e^{t+1} dt$$

Substituído $t+1$ por u :

$$t + 1 = u$$

$$dt = du$$

$$u(0) = 1$$

$$u(1) = 2$$

$$A = \int_0^1 e^t dt + \int_0^1 e^{t+1} dt$$

$$A = \int_0^1 e^t dt + \int_1^2 e^u du$$

$$A = (e^1 - 1) + (e^2 - e^1)$$

$$A = e^2 - 1 \approx 6,3891$$

6.2.4.2 Resultados numéricos

Os resultados obtidos nesse teste são mostrados na Tabela 6-4.

Tabela 6-4 – Resultados para o caminho por um caminho não suave.

Equação	Numérico	Erro
$f(x, y) = r$	6,40613174	0,017075641
$f(x, y) = r^2 \ln(r)$	6,4538784	0,064822301
$f(x, y) = e^{-3r}$	6,21266747	0,176388629
$f(x, y) = e^{-3r^2}$	6,39893532	0,009879221
$f(x, y) = \frac{1}{(1+r)^3}$	6,25003624	0,139019859
$f(x, y) = r^2 e^{-r}$	6,38880444	0,000251659

6.2.5 Conclusões

Nota-se que os erros não foram da mesma magnitude que os dos testes com volumes, principalmente os da seção 5.4, 5.8 e 5.9.

Percebe-se que houve uma variação grande na precisão de alguns valores, sendo mais precisos nos casos onde a equação de interpolação é exponencial.

A equação que retornou mais resultados precisos foi a equação $f(x, y) = \frac{1}{(1+r)^3}$.

6.3 TESTES DA ORIGEM ATÉ O PONTO (0,5;0,5)

6.3.1 Resultados para o caminho reto

6.3.1.1 Cálculo analítico

Seguindo da origem e indo até o ponto (0,5;0,5), o resultado analítico da área debaixo de um caminho reto é:

$$A = \int e^{x+y} ds$$

$$A = \int_0^{0.5} e^{t+t} \sqrt{2} dt$$

$$A = \sqrt{2} \int_0^{0.5} e^{2t} dt$$

Substituído $2t$ por u :

$$\begin{aligned}
 2t &= u \\
 2dt &= du \\
 \frac{dt}{2} &= \frac{du}{2} \\
 u(0) &= 0 \\
 u(0,5) &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt{2} \int_0^1 e^u \frac{du}{2} \\
 A &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 e^u du \\
 A &= \frac{\sqrt{2}}{2} [e^u]_0^1 \\
 A &= \frac{\sqrt{2}}{2} (e^1 - 1) \approx 1,215008733
 \end{aligned}$$

6.3.1.2 Resultados numéricos

Os resultados obtidos para essa aproximação são mostrados na Tabela 6-5.

Tabela 6-5 – Resultados para o caminho por uma reta.

Equação	Numérico	Erro
$f(x, y) = r$	1,19374681	0,021261923
$f(x, y) = r^2 \ln(r)$	1,28139567	0,066386937
$f(x, y) = e^{-3r}$	1,20727873	0,007730003
$f(x, y) = e^{-3r^2}$	1,2154783	0,000469567
$f(x, y) = \frac{1}{(1+r)^3}$	1,21448839	0,000520343
$f(x, y) = r^2 e^{-r}$	1,20198643	0,013022303

6.3.2 Resultados para o caminho parabólico de 2º grau

6.3.2.1 Cálculo analítico

Para esse caminho a parábola é da forma $y = ax^2 + b$. Para determinar os termos a e b, é utilizado os pontos inicial e final do caminho.

Para o ponto (0;0):

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + b \\ 0 &= a \cdot 0^2 + b \\ b &= 0 \end{aligned}$$

E para o ponto (0,5;0,5):

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + 0 \\ 0,5 &= a \cdot 0,5^2 + 0 \\ a &= \frac{0,5}{0,25} \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Com isso, a parábola fica:

$$y = 2x^2$$

Como a equação deste caminho é $y = 2x^2$, é adotado para a parametrização $x = t$ e $y = 2t^2$. O vetor da parametrização se torna $\vec{r}(t) = (t; 2t^2)$ e sua derivada $\vec{r}'(t) = (1; 4t)$. Assim, o módulo de \vec{r}' é $\sqrt{1+16t^2}$, sendo $ds = \sqrt{1+16t^2} dt$.

Sendo a integral de linha:

$$A = \int_0^1 e^{t+2t^2} \sqrt{1+16t^2} dt$$

Como o cálculo dessa integral analítico dessa integral é complicado, ela foi calculada numericamente usando a regra do trapézio com 10000 subdivisões pela facilidade de implementação:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{0,5} e^{t+2t^2} \sqrt{1+16t^2} dt \\ A &= 1,11739873 \end{aligned}$$

6.3.2.2 Resultados numéricos

Para a parábola de segundo grau, os testes numéricos retornaram os resultados mostrados na Tabela 6-6.

Tabela 6-6 – Resultados para o caminho por uma parábola de segundo grau.

Equação	Numérico	Erro
$f(x, y) = r$	1,24037361	0,12297488
$f(x, y) = r^2 \ln(r)$	1,32084215	0,20344342
$f(x, y) = e^{-3r}$	1,2528832	0,13548447
$f(x, y) = e^{-3r^2}$	1,2631861	0,14578737
$f(x, y) = \frac{1}{(1+r)^3}$	1,26186121	0,14446248
$f(x, y) = r^2 e^{-r}$	1,25107348	0,13367475

6.3.3 Resultados para o caminho parabólico de 5º grau

6.3.3.1 Cálculo analítico

Esse caminho possui a parábola da forma $y = ax^5 + b$. Para a determinação dos termos a e b, é utilizado os pontos inicial e final do caminho.

Para o ponto (0;0):

$$\begin{aligned} y &= ax^5 + b \\ 0 &= a \cdot 0^5 + b \\ b &= 0 \end{aligned}$$

E para o ponto (0,5;0,5):

$$\begin{aligned}
 y &= ax^5 + 0 \\
 0,5 &= a \cdot 0,5^5 + 0 \\
 a &= \frac{0,5}{0,03125} \\
 a &= 16
 \end{aligned}$$

Com isso, a parábola fica:

$$y = 16x^5$$

Com o resultado acima, a equação deste caminho é $y = 16x^5$, onde, para a parametrização, $x = t$ e $y = 16t^5$. O vetor da parametrização se torna $\vec{r}(t) = (t; 16t^5)$ e sua derivada $\vec{r}'(t) = (1; 80t^4)$. O módulo de \vec{r}' é $\sqrt{1 + 6400t^8}$, com $ds = \sqrt{1 + 6400t^8} dt$.

Onde a integral de linha é:

$$A = \int_0^1 e^{t+16t^5} \sqrt{1 + 6400t^8} dt$$

Pela complexidade da integral, o cálculo da integral é feito numericamente. Usando a regra 1/3 de Simpson com $h=0,025$, a área é:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{0,5} e^{t+t^2} \sqrt{1 + 6400t^8} dt \\
 A &= 1,394765201
 \end{aligned}$$

6.3.3.2 Resultados numéricos

Os resultados para esse teste são mostrados na Tabela 6-7. Os resultados serão discutidos na seção 6.3.5.

Tabela 6-7 – Resultados para o caminho por uma parábola de quinto grau.

Equação	Numérico	Erro
$f(x, y) = r$	1,37711716	0,017648041
$f(x, y) = r^2 \ln(r)$	1,43462539	0,039860189
$f(x, y) = e^{-3r}$	1,38286066	0,011904541

$f(x, y) = e^{-3r^2}$	1,39558864	0,000823439
$f(x, y) = \frac{1}{(1+r)^3}$	1,39727569	0,002510489
$f(x, y) = r^2 e^{-r}$	1,38641047	0,008354731

6.3.4 Resultados para o caminho não suave

6.3.4.1 Cálculo analítico

Da mesma forma que na seção 6.2.4, o caminho seguindo uma “quina” não é suave, mas é suave em duas partes, podendo-se desdobrar a integral de linha em duas e calcular a área. O caminho utilizado vai do ponto (0;0) até (0,5;0), depois sai de (0,5;0) e chega em (0,5;0,5) utilizando duas retas.

$$A = \int e^{x+y} ds$$

$$A = \int_0^{0,5} e^t dt + \int_0^{0,5} e^{t+0,5} dt$$

Substituído $t+1$ por u :

$$t + 0,5 = u$$

$$dt = du$$

$$u(0) = 0,5$$

$$u(0,5) = 1$$

$$A = \int_0^{0,5} e^t dt + \int_0^{0,5} e^{t+1} dt$$

$$A = \int_0^{0,5} e^t dt + \int_{0,5}^1 e^u du$$

$$A = (e^{0,5} - 1) + (e^1 - e^{0,5})$$

$$A = (e^1 - 1) \approx 1,718281828$$

6.3.4.2 Resultados numéricos

Para o caminho não suave os resultados obtidos são exibidos na Tabela 6-8.

Tabela 6-8 – Resultados para o caminho por um caminho não suave.

Equação	Numérico	Erro
$f(x, y) = r$	1,70734513	0,010936698
$f(x, y) = r^2 \ln(r)$	1,75202024	0,033738412
$f(x, y) = e^{-3r}$	1,70325148	0,015030348
$f(x, y) = e^{-3r^2}$	1,71760404	0,000677788
$f(x, y) = \frac{1}{(1+r)^3}$	1,72139132	0,003109492
$f(x, y) = r^2 e^{-r}$	1,710567	0,007714828

6.3.5 Conclusões

Analisando os resultados, a função de base radial que retornou os melhores resultados para o caso da aproximação com caminhos indo da origem até o ponto central do domínio adotado foi a $f(x, y) = e^{-3r^2}$.

As equações exponenciais já retornaram resultados bons no teste da seção 6.2 e, aqui, foi representada pela equação que retornou os melhores resultados no geral.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em termos gerais, pode-se concluir que as funções de base radial apresentaram-se como uma ferramenta eficiente para interpolação de campos bidimensionais, pois os resultados obtidos mostraram elevada precisão na representação das superfícies escolhidas para os testes. Verificou-se a boa aproximação das curvas calculando os volumes gerados pelas superfícies interpoladas e comparando-os com os valores analíticos disponíveis.

Dentre as funções radiais escolhidas, a função radial cúbica apresentou melhores resultados, em termos médios. Destaca-se também o bom desempenho da função hiperbólica, utilizada no contexto do método dos elementos de contorno com dupla reciprocidade, na simulação problemas com domínios infinitos.

O procedimento de particionamento do domínio bidimensional em setores não foi bem sucedido, pois o mesmo apresentou problemas significativos de descontinuidade das superfícies geradas entre todos os setores. Embora essa descontinuidade não comprometa seriamente o cálculo de volumes, pode impedir a realização eficiente de outras operações matemáticas, como, por exemplo, integrações de linha ao longo de todo o domínio interpolado.

No caso dos testes com soma de funções, os resultados também não foram satisfatórios. Isso porque os resultados para três dos quatro campos analisados não produziram os resultados esperados, pois os testes foram executados utilizando as duas funções que tiveram o melhor desempenho para os testes simples; assim, era esperado que a aproximação com a soma das funções retornasse resultados ainda melhores.

Ainda no que diz respeito ao teste com soma de funções, em termos gerais os resultados foram imprecisos, exceto para o caso do campo parabólico. Para esse campo, a associação das duas melhores equações (a função radial cúbica e a função radial exponencial) formou uma nova função com

características ideais para a aproximação desse campo. Com essa função composta pela soma de outras duas, os resultados obtidos para os testes com o campo parabólico retornaram excelentes resultados.

O esquema de acréscimo de funções globais mostrou-se muito eficiente, privilegiando de modo natural os coeficientes das funções que maior afinidade guarda com as funções a serem interpoladas. Isto ocorre porque o procedimento de interpolação proposto é equivalente à aplicação de uma sentença do método dos mínimos quadrados na aproximação de uma função por um conjunto de pontos disponíveis. Uma minimização inerente ao método prioriza os coeficientes afins, anulando ou reduzindo a participação dos coeficientes das funções que não estão estreitamente ligadas à forma da superfície a ser interpolada.

Nos testes com áreas foram realizados dois testes, um com ida da origem até uma das pontas do domínio e outra que ia da origem até o centro do domínio.

Para os testes que iam da origem até um dos extremos do domínio, houve grandes variações na precisão dos resultados de algumas funções testadas. A equação que retornou os melhores resultados, em média, foi a

$$f(x, y) = \frac{1}{(1+r)^3}. \quad \text{Também pode ser destacada a seguinte observação:}$$

excetuando-se esta última função, os melhores resultados foram obtidos por funções radiais exponenciais.

Para os testes que iam da origem até o centro do domínio, a equação que retornou os melhores resultados foi a $f(x, y) = e^{-3r^2}$. Não se pode afirmar que houve essa precisão pelo fato do campo usado e a função radial serem exponenciais porque no teste anterior a função radial de interpolação não era exponencial e retornou os melhores resultados para aquele caso; entretanto, não se pode descartar que a afinidade entre a função e o campo pode ter propiciado melhores condições para a família de funções radiais exponenciais.

BIBLIOGRAFIA

ALMEIDA, Eliana Silva de. **Uma Introdução ao MATLAB**. Maceió: 2001. Disponível em: <http://www.ctec.ufal.br/professor/enl/metnum/Bibliografia/Uma_Introducao_ao_MATLAB.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2008.

CHAPMAN, Stephen J. **MATLAB Programming for Engineers**. 2nd Ed. [S.I.]: Brooks Cole, 2001.

ETTER, Delores M. **Structured Fortran 77 for Engineers and Scientists**. 5th. Ed. Menlo Park: Addison-Wesley, 1997.

FARRER, Harry. et al. **Fortran Estruturado**. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1992.

FRANCO, Neide Maria Bertoldi. **Cálculo Numérico**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

INVOKE MATLAB Compiler. Disponível em: <<http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/toolbox/compiler/mcc.html>>. Acesso em: 15 abr. 2008.

MARCHAND, Patrick. **Graphics and GUIs with MATLAB**. 2nd. Ed. Boca Raton: CRC Press, 1999.

SPERANDIO, Décio; MENDES, João Teixeira; SILVA, Luiz Henry Monken e. **Cálculo Numérico: Características Matemáticas e Computacionais dos Métodos Numéricos**. 1^a reimp. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003.