UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

CENTRO TECNOLÓGICO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ANDRÉ BARBOSA FREITAS

AVALIAÇÃO DO EFEITO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO E DAS SIMPLIFICAÇÕES DA TEORIA UNIDIMENSIONAL DE VIGAS ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

VITÓRIA

2013

ANDRÉ BARBOSA FREITAS

AVALIAÇÃO DO EFEITO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO E DAS SIMPLIFICAÇÕES DA TEORIA UNIDIMENSIONAL DE VIGAS ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Projeto de Conclusão de CUrso apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para a obtenção do título de Engenheiro Mecânico.

Orientador: Prof. D. Sc. Carlos Friedrich Loeffler Neto

VITÓRIA

2013

ANDRÉ BARBOSA FREITAS

AVALIAÇÃO DO EFEITO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO E DAS SIMPLIFICAÇÕES DA TEORIA UNIDIMENSIONAL DE VIGAS ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Projeto de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para a obtenção do título de Engenheiro Mecânico.

Aprovado em ____ de _________ de 2013.

COMISSÃO EXAMINADORA

____

Prof. Carlos Friedrich Loeffler Neto, D.Sc.
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador

____

Prof. Fernando César Meira Menandro, D.Sc.
Universidade Federal do Espírito Santo
Examinador

____

Prof. Antônio Bento Filho, D.Sc.
Universidade Federal do Espírito Santo
Examinador

Agradeço a minha família e amigos pelo apoio emocional. Essa contribuição fez grande diferença e me motivou a continuar a elaboração desse trabalho.

Também agradeço Carlos F.C. e Victor Luiz G. por auxiliarem nas partes teóricas e nas tomadas de decisão.

RESUMO

As vigas estão entre os principais elementos estruturais utilizados na engenharia, sendo amplamente utilizadas na construção civil e na composição do arcabouço de máquinas e equipamentos mecânicos. O modelo matemático mais utilizado para descrever seu comportamento mecânico se baseia numa teoria unidimensional, que é amplamente utilizada no projeto de árvores, longarinas, transversinas e, principalmente, na sustentação de lajes de edificações em geral.

Este trabalho aproveita as potencialidades do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para, através de um modelo numérico bidimensional, avaliar tanto as limitações resultantes das aproximações existentes na teoria unidimensional de vigas, quanto examinar os efeitos das prescrições das condições de contorno, que usualmente são gravemente simplificadas distanciando-se das situações reais.

Exemplos de vigas com carregamentos de diversas formas e diferentes condições de contorno são examinados através da simulação de um modelo de Elementos de Contorno. As simulações foram malhas refinadas com funções de aproximação do campo lineares, cujos resultados tiveram boa concordância com as soluções da Teoria da Elasticidade na solução de problemas de estado plano.

Os casos estudados nesse trabalho são aplicados em várias situações, sendo os mesmo analisados com diferentes configurações das condições de contorno. Os resultados obtidos com o método dos Elementos de Contorno são comparados com a Resistência dos Materiais e a Teoria da Elasticidade.

Lista de figuras

Lista de gráficos

Lista de tabelas

Sumário

Capítulo 1- Introdução

1.1. Métodos Numéricos e as Novas Metodologias de Projeto

A engenharia tem experimentado grandes avanços nas últimas décadas. Grandes mudanças são observadas nos modos de se tratar os diversos problemas na indústria, nas empresas de projeto, na construção civil e mesmo nos segmentos ligados a atividades financeiras e de recursos humanos. A razão mais importante para tal transformação na abordagem dos problemas que desafiam os profissionais de todas as áreas citadas e especialmente os engenheiros de projeto, são as ferramentas computacionais atualmente disponíveis. Problemas que eram muito difíceis de se resolver em décadas passadas hoje são solucionados em questões de segundos, seja a obtenção de um campo térmico de temperaturas numa peça ou a geração de uma folha de pagamento de uma organização com dezenas de milhares de empregados. Conforme se observa no trabalho de CASTRO (2011):

> Para gerar tamanha tecnologia, um enorme esforço matemático foi despendido para dar sustentação, precisão, credibilidade e eficiência às técnicas que compõem os programas usados no processamento das diversas tarefas empregadas em todos os setores da vida moderna.

A utilização dos primeiros computadores como ferramenta de engenharia teve início em meados do século XX, e fez com que algumas áreas de pesquisa que antes eram exclusivas dos matemáticos se difundissem e se tornassem interdisciplinares. Assim, foram criadas as técnicas numéricas de solução, que tornaram possível tratar problemas complexos através de modelagens discretas, que resultam em sistemas de equações que podem ser resolvidos facilmente com uso de modernos métodos computacionais.

> Em função do computador se tornou simples a utilização de métodos e esquemas numéricos, envolvendo muitas vezes sistemas com milhares de equações algébricas. Também a abordagem de problemas complexos cuja solução analítica é impossível, viabilizou-se com o emprego de algoritmos

> computacionais iterativos e incrementais, oferecendo soluções aproximadas com elevado padrão de precisão.(LOEFFLER, 1990)

Se a efetividade das técnicas de solução numérica proporcionou à engenharia de projeto maior confiabilidade, rapidez e economia no que tange ao esforço alocado para a prática do dimensionamento, fabricação e aplicação do objeto em consideração, seja uma estrutura, uma máquina ou um equipamento industrial qualquer, por outro lado teve que corresponder às crescentes necessidades da sociedade moderna, que impôs condições de extremo arrojo, complexidade, versatilidade e multifuncionalidade em todos os segmentos da engenharia.

Assim, uma vez que os problemas de engenharia se tornaram ainda mais difíceis, ampliou-se o distanciamento entre estes e as técnicas mais tradicionais de solução, especialmente as soluções analíticas. Há enorme dificuldade em encontrar soluções analíticas mais consistentes para problemas comuns na engenharia, ou seja, encontrar soluções das complicadas equações diferenciais que governam os problemas. Entre os fatores que agravam esta questão estão a configuração geométrica complexa do meio, as características das condições de contorno e iniciais impostas e as não linearidades intrínsecas aos problemas. Tudo isto obriga a que se recorram às diversas técnicas numéricas de resolução de equações diferenciais parciais, tais como o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

Sobre esta última técnica, pode-se colher do trabalho de Leonardo Caputo De Moura (2010) o seguinte:

> O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é uma dessas modernas ferramentas de simulação numérica. Mostra-se muito vantajosa, pois permite a solução de problemas físicos empregando um reduzido número de variáveis nodais, pois o problema é representado apenas através da discretização do seu contorno. O MEC vem se firmando como uma das técnicas mais precisas e vantajosas, pois se fundamenta em diferentes princípios matemáticos, seja pela Teoria das Equações Integrais ou por formulações de Resíduos Ponderados. Numerosas simulações já ratificaram o alcance do método e sua supremacia em certas classes de problemas, [...]. Estas particularidades do MEC fazem com que este método tenha elevada precisão quando aplicado a problemas eletrostáticos bi e tridimensionais. (CAPUTO DE MOURA, 2010)

Uma questão básica que surge no exame de muitas dessas ferramentas computacionais, especialmente aquelas empregadas na engenharia, onde muitas vezes não há estimativa de resposta é a seguinte: como se afere a precisão dessas técnicas em problemas para os quais não se tem uma previsão segura de seu comportamento?
A resposta naturalmente é complexa e é pertinente aos estudos ligados à metodologia científica. No já citado trabalho de Castro pode-se coletar:

> São muitos os critérios utilizados na aferição de desempenho das técnicas de solução baseadas no emprego de computadores, comumente chamadas de técnicas numéricas ou técnicas aproximadas. A comparação com soluções já conhecidas, especialmente colhidas em problemas de campo, ou simulação com protótipos seria o ideal, mas muitas vezes a viabilidade, o custo desse empreendimento é proibitivo. Usualmente, são comparados os resultados de diversas técnicas correlatas e verifica-se uma melhor concordância com os dados experimentais. Outra tática, bem mais rigorosa, consiste na comparação das soluções numéricas com soluções matemáticas analíticas. Sabe-se da dificuldade em se obter soluções dessa natureza em problemas mais complexos, [...] mas observa-se uma preferência em procurar se avaliar desempenho comparando métodos aproximados entre si.

Para os problemas mais clássicos da engenharia estrutural, as principais técnicas numéricas, citadas anteriormente, já foram testadas ostensivamente em diversas aplicações, apresentando enorme êxito. O efetivo desempenho de todas, por já estar consolidado, já foram registrados nos diversos livros que compõem a bibliografia básica do estudo destes métodos (BATHE (1982) e REDDY (2006) para os elementos finitos, MALISKA (2004) para os volumes finitos e BREBBIA (1984) para o elemento de Contorno). No que interessa a este trabalho, os resultados estão relacionados às simulações estacionárias nas quais problemas elásticos lineares, governados pela Equação de Navier, foram efetivamente resolvidos.

1.2. As Metodologias Simplificadas de Projeto

O fato de haver atualmente uma enorme demanda de tecnologia envolvendo projetos sofisticados não significa que não exista uma grande quantidade de problemas simples para os quais não justifica o investimento de uma abordagem mais sofisticada, por diversos fatores.

O primeiro deles é o pleno domínio das condições que cercam aquele projeto específico, pela quantidade inumerável de dimensionamentos similares já realizados, grande parte deles realizado com o auxílio de fórmulas e procedimentos analíticos ou experimentais, de reconhecida eficiência. Isto não acontece apenas em edificações de pequeno porte, que é o exemplo mais comum. Muitas vezes tais procedimentos simples estão consolidados ao ponto de figurarem em normas e outros procedimentos similares, que regulam a forma de projetar, como acontece em tubulações industriais mais simples.

Assim, considerando que a configuração geométrica das peças seja simples e o carregamento aplicado também o seja, é possível empregar as teorias simplificadas de projeto estrutural que figuram na disciplina denominada Resistência dos Materiais.

O propósito desta disciplina é oferecer soluções simples de problemas estruturais compostos por elementos de barras ou vigas. Estes compõem apreciável montante na totalidade da arquitetura de certas máquinas e edificações mais comuns.

Na Engenharia Mecânica, o estudo do dimensionamento dos elementos de Máquinas está repleto de exemplos desta natureza. Dentes de engrenagens são considerados como vigas engastadas, enquanto molas planas são tomadas como vigas largas bi apoiadas. Chavetas são barras retilíneas sujeitas ao cisalhamento e molas são barras curvas submetidas simplificadamente à torção. Outros exemplos ainda poderiam ser citados.

Atualmente, diante do surgimento e da acessibilidade das já mencionadas técnicas de solução numéricas, muitos destes procedimentos analíticos simplificados, são considerados como estimativas preliminares de projeto, que das necessidades de melhor desenvolvimento, tem seu cálculo ratificado ou refeito com o emprego dos citados métodos.

1.3. Objetivo deste Trabalho

Neste texto, os resultados de modelos discretos gerados com o MEC para estado plano de tensão, de modo tal que correspondam a problemas de vigas, são comparados com os resultados de teorias simplificadas baseadas nos estudos da disciplina de Resistência dos Materiais. O propósito é avaliar o alcance destas teorias mais simples diante da introdução de alguma complexidade no carregamento e, particularmente, da modificação das condições de contorno impostas.

A teoria simplificada de vigas é em sua essência unidimensional e mesmo com algumas alterações que normalmente são impostas nos modelos mais comuns o fazem no sentido de estabelecer apenas um campo de tensões mais realístico, de natureza bidimensional, contemplando uma melhor distribuição das tensões cisalhantes. No que concerne a melhor representação das condições de contorno, nada é efetivamente considerado.

Assim, este trabalho avalia o efeito das condições de contorno vistas sob o ponto de vista bidimensional. O Método dos Elementos de Contorno é usado para a simulação dos problemas em duas dimensões obtendo soluções de referência, uma vez que mesmo as técnicas bidimensionais da Teoria da Elasticidade são ineficazes na simulação precisa de condições de contorno envolvendo deslocamentos.

Capítulo 2- A Resistência dos Materiais

O conceito dado a esta disciplina, segundo HIBBELER (2003), é o seguinte:

> A resistência dos materiais é um ramo da mecânica que estuda as relações entre cargas externas aplicadas a um corpo deformável e a intensidade das forças internas que atuam dentro do corpo. Esse assunto abrange também o cálculo da deformação do corpo e o estudo da sua estabilidade, quando ele está submetido a forças externas.

Para que seja possível obter os valores de tensões internas, deve ser estabelecido um vínculo causal entre estas e as forças externas às quais o elemento está submetido. Também é necessário correlacionar os deslocamentos observados pelo corpo com as deformações sentidas pelo mesmo. Finalmente, um equacionamento constitutivo deve ser usado para associar as deformações observadas com as tensões presentes no objeto em análise.

É assumido que o corpo em estudo consiste de pequenas partículas por onde as forças externas agem. Num fluido, a constituição do meio por moléculas é bastante compatível; num sólido, em geral, despreza-se a irregularidade dos grãos que encerram as redes cristalinas para que esta hipótese possa ser imposta. Assim, considerando as pequenas partículas como moléculas, as forças moleculares resistem as mudanças de forma que esses esforços tendem a produzir, de maneira que cada uma delas é deslocada um pouco, até que se atinja o equilíbrio (TIMOSHENKO, 1940, p. 1). Logo, observa-se um esforço interno em cada ligação química. Devido à natureza imprevisível da organização química do material, muitas hipóteses são aplicadas com o objetivo de permitir a descrição matemática do seu comportamento. As mais importantes são aquelas que permitem expressar as equações diferenciais de governo numa forma linear. Algumas idealizações ocorrem para concepção deste modelo simplificado, mas não muito distante do que ocorre em boa parte dos casos práticos abordados pela engenharia:

- Considerar que as deformações e seus deslocamentos correspondentes sejam pequenos, de modo que pequenas variações nas dimensões do corpo e os pequenos deslocamentos dos pontos de aplicação das forças externas sejam desprezados. Assim sendo, ação das forças externas não se altera e as equações de equilíbrio do corpo estarão sempre relacionadas à configuração inicial do carregamento no corpo. O princípio de superposição de carregamentos e alternância da ordem de aplicação destes poderá ser, então, utilizado.

- Como cada esforço interno pode variar com sua localização, faz-se necessário o uso de um pequeno elemento deste corpo. Porém, um elemento muito pequeno não será verossímil com a realidade, pois sabe-se que um material não é uniformemente constituído dos mesmos átomo se esses estão ligados de maneiras diversas. No entanto, essa heterogenia pode ser desconsiderada se o elemento de análise for suficientemente grande ao ponto de se comportar como um elemento homogêneo.
- Considerar que os corpos são compostos de materiais perfeitamente elásticos, isto é, retornam ao seu estado original quando a ação das forças aplicadas é interrompida, sem qualquer perda de energia ou produção de deformação permanente. Nestas condições, inexiste qualquer forma de amortecimento estrutural ou viscoso, e o modelo enquadra-se na categoria de problemas de campo conservativo.
- Quando nosso elemento infinitesimal mudar de direção, as propriedades materiais não receberão mudanças de valor. Esta característica é observada em materiais isotrópicos e será aplicada nos estudos deste trabalho.

2.1. Equações diferenciais do equilíbrio

Que seja suposto o equilíbrio de um elemento infinitesimal que engloba um conjunto de moléculas. Admita também que o elemento está submetido ao campo gravitacional, no qual gera forças de corpo. A sua direção não é conhecida, mas sabe-se que esta pode ser traduzida em um ângulo qualquer em relação à horizontal, caso se supuser que está inserida num plano. Também se observa contato do elemento com os seus vizinhos. Para que cada face não se desloque para cima ou para baixo, nem para um lado, nem para o outro, tensões devem ser impostas. Tensões normais impedem que cada face se desloque na direção longitudinal, e tensões cisalhantes impedem que cada face se desloque na direção transversal. Com essas considerações, pode-se estabelecer um equacionamento visando o equilíbrio.

Segundo Timoshenko e Goodier (1970), considera-se um pequeno elemento de estudo com dimensões h por k. Esse elemento está submetido a um carregamento conforme figura 2-1.

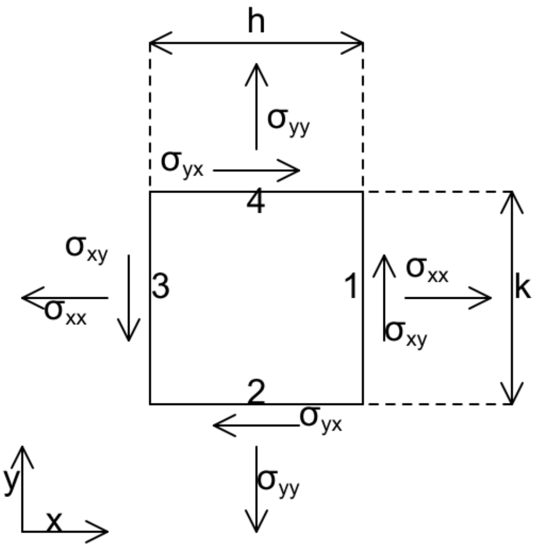

Figura 2-1:Paralelepípedo infinitesimal no plano x-y.

Admite-se que há forças de corpo de valores *X* (horizontal) e *Y* (vertical). Para que haja equilíbrio na horizontal:

$$(\sigma_{xx})_1 k - (\sigma_{xx})_3 k + \left(\sigma_{xy}\right)_2 h - \left(\sigma_{xy}\right)_4 h + Xhk = 0$$

$$\frac{(\sigma_{xx})_1 - (\sigma_{xx})_3}{h} + \frac{\left(\sigma_{xy}\right)_2 - \left(\sigma_{xy}\right)_4}{k} + X = 0$$

Quando esse retângulo se tornar cada vez menor ($h \to 0$ e $k \to 0$) concluí-se:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + X = 0 \qquad \text{Equação (2-1)}$$

O equilíbrio na vertical é resolvido de maneira análoga a horizontal, chegando ao seguinte resultado:

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + Y = 0 \qquad \text{Equação (2-2)}$$

As equações 2-1 e 2-2 traduzem um equilíbrio infinitesimal. Caso o elemento apresente um acréscimo de tensões normais em *x* ao longo da direção x, as tensões cisalhantes que estão na direção *x* receberão um decréscimo ao longo da direção *y* para manter o equilíbrio, caso não haja forças de corpo *X* ou caso os seus valores possam ser desprezados. O mesmo também é válido se considerarmos o equilíbrio de forças na direção *y*.

2.2. Equações diferenciais da compatibilidade

No início da seção 2 foi mencionado que as moléculas do material produzem deslocamentos que geram as forças internas necessárias para se preservar o equilíbrio. Mas devido aos diferentes esforços que cada conjunto contínuo de moléculas recebe, diferentes deslocamentos deverão ser observados.

Supõe-se que cada face do elemento pode ser deslocada de uma maneira diferente, observando-se uma variação ao longo da direção observada. Também é feita a hipótese de que essas faces podem girar, respeitando a conexão existente em suas extremidades. É feita a análise das deformações sofridas pelo elemento, que serão divididas em normais (seção 2.2.1) e cisalhantes (seção 2.2.2).

2.2.1. Deformações normais ou alongamentos

Considera-se um elemento do sistema que recebe deslocamentos com ausência de rotação em suas faces. Esses deslocamentos não precisam ser necessariamente idênticos, sendo observada uma variação ao longo da direção perpendicular dos mesmos. A situação descrita está ilustrada na figura 2-2.

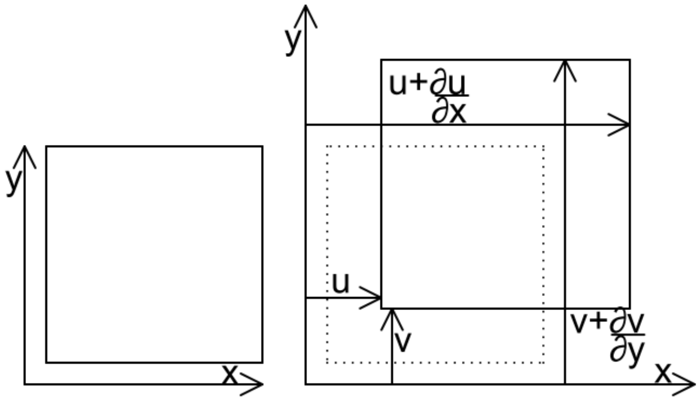

Figura 2-2:Elemento diferencial submetido a deslocamentos de translação

A deformação sofrida pelo elemento será definida como a razão entre o novo valor de comprimento que o elemento possui e o antigo valor de comprimento que o elemento possuía. Assim:

$$\varepsilon_x = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial x}\partial x - u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{Equação (2-3)}$$

O mesmo pode ser realizado na direção y:

$$\varepsilon_y = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial y}\partial y - v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{Equação (2-4)}$$

Logo, para a deformação sofrida pela translação do elemento, basta determinar o quanto que o deslocamento sofrido entre as faces varia com aquela direção.

2.2.2. Deformações cisalhantes ou distorções

Além de admitir que as face de um elemento podem transladar de maneiras distintas entre si, será suposto que essas mesmas faces poderão girar na direção perpendicular ao plano de referência. A maneira como essas faces giram é feito de uma maneira tal que não será observado contração ou alongamento da área do elemento de estudo.

Essa afirmação irá implicar que as faces que antes estavam na mesma direção passam agora a girar simultaneamente um mesmo ângulo de rotação. Isso garante que nosso retângulo passará a ser um paralelepípedo com área igual ao valor inicial.Também será imposto que as faces paralelas permanecem paralelas após serem giradas. A situação apresentada nesse parágrafo está apresentado na figura 2-3.

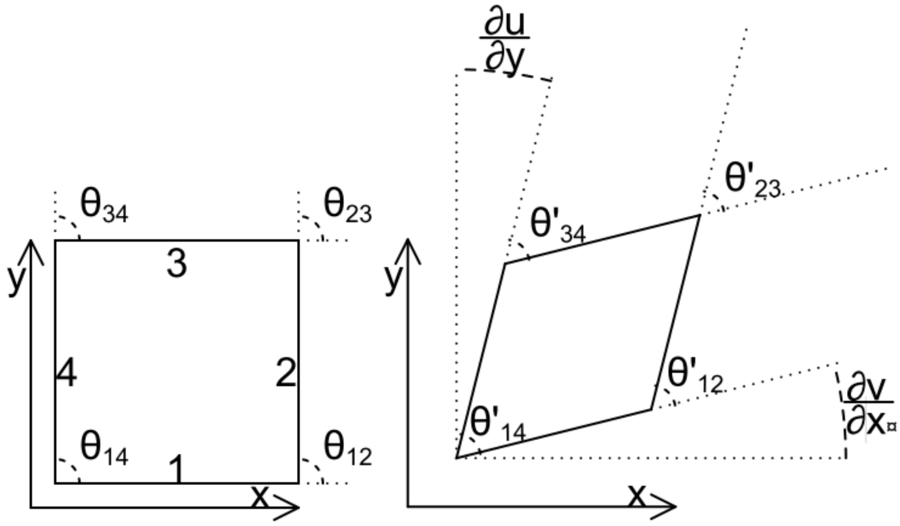

Figura 2-3:Elemento de análise submetido a rotação sem mudança de área.

Uma das consequências de se impor o elemento retilíneo é observada nas derivadas de ordem superior que poderiam estar presentes nos deslocamentos da faces, mas são desprezadas.

Define-se como deformação cisalhante (γ) a mudança de ângulo ocorrida entre duas faces originalmente perpendiculares entre si. Para efetuar a análise, os ângulos são medidos no sentido horário e a partir da fase que apresenta menor número (i<j). Logo, para cada interseção de faces é observado:

$$\gamma_{ij} = \theta_{ij} - \theta'_{ij} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Onde i e j representam faces distintas. O que pode ser concluído com isso é que em todas as interseções entre faces observa-se a mesma deformação cisalhante. Logo:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{Equação (2-5)}$$

2.3. Equações constitutivas

Conforme dito na introdução da seção 2, as equações constitutivas são igualdades que relacionam o campo de tensões com o campo de deformações. Será considerado que o material é linear elástico. Para esse caso, as equações constitutivas se chamam equações de Lamé-Hooke ou mais simplesmente “Lei de Hooke”.

Nessa Lei, as relações matemáticas entre tensões e deformações normais são distintas do que se encontram quando se descreve o comportamento observado no elemento infinitesimal entre tensões cisalhante e as distorções correspondentes.O caso de configuração de carregamento exclusivamente normal é apresentado na seção 2.3.1,enquanto o caso para o qual o elemento de material está submetido a cisalhamento puro será mostrado na seção 2.3.2.

2.3.1. Relação entre tensões e deformações normais

Na Lei de Hooke, um elemento ao receber tração horizontal deforma-se nessa mesma direção segundo a expressão:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x \qquad \text{Equação (2-6)}$$

Mas o mesmo elemento também receberá uma contração na direção perpendicular à tração segundo a fórmula:

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_x \qquad \text{Equação (2-7)}$$

As constantes *E* e *v* representam o módulo de Young e o coeficiente de Poisson, respectivamente. O valor de E indica o nível de tensão que deve ser causada no elemento para este se deformar um determinado valor enquanto o valor de v determina o quanto de deformação será observada na direção perpendicular a tensão causada. A formulação apresentada nas equações 2-6 e 2-7está baseada no esquema ilustrado na figura2-4.

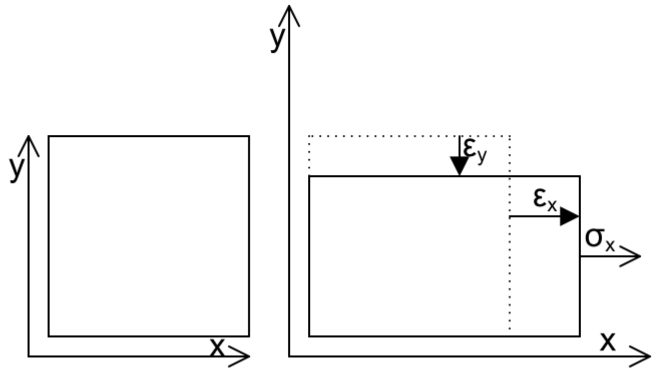

Figura 2-4:Elemento submetido a tração horizontal.

De uma maneira geral, quando o elemento estiver submetido a um carregamento com apenas tensões normais, ele produzirá deformações segundo as seguintes equações:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$$ Equação (2-8)

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z)$$ Equação (2-9)

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$ Equação (2-10)

Onde os valores de sigma são positivos quando essas tensões são de tração.

2.3.2. Relação entre tensões e deformações cisalhantes

Um elemento de material submetido a cisalhamento puro é encontrado em corpos de prova com formato de tubos circulares finos, nos quais é imposta uma carga de torção (HIBBELER, 2003, p. 82). Através desses ensaios, observa-se que a deformação cisalhante (definida na seção 2.2.2) e a tensão de cisalhamento (ilustrada na figura 2-1) podem ser relacionadas na Lei de Hooke através da seguinte formulação:

$$\sigma_{xy} = G\gamma_{yx}$$ Equação (2-11)

Onde G é o módulo de elasticidade ao cisalhamento. Percebe-se que, diferentemente da relação estabelecida para as tensões normais, as tensões cisalhantes atuantes nos três diferentes planos não interagem entre si.

Demonstra-se que a propriedade do material G está vinculada ao módulo de Young e ao coeficiente de Poisson através da seguinte formulação(HIBBELER, 2003, p. 403 a 406):

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$ Equação (2-12)

Capítulo 3- A Teoria da Elasticidade

A Teoria da Elasticidade é uma disciplina que se ocupa do estudo de mecânica de modo mais formal e preciso, empregando metodologias matemáticas mais avançadas na resolução de problemas, comumente também mais complexos do que os observados na Resistência dos Materiais. Nas soluções propostas por essa disciplina existem menos simplificações do que na Resistência dos Materiais, com o que se espera melhor representação do comportamento real mecânico das estruturas, obedecidas as condições de contorno e os perfis de carregamento propostos.

Nessa teoria, permanece a hipótese da elasticidade do material, ou seja, se um corpo for submetido a esforços, as deformações provocadas por estes irão desaparecer completamente quando forem retirados. A homogenia do corpo também será suposta no presente trabalho para a aplicação dessa teoria, além da isotropia. Apesar dessas hipóteses não serem rigorosamente verossímeis com a realidade, experiências mostram que a teoria matemática baseada nessas hipóteses fornece alta precisão quando o material estudado é o aço estrutural (TIMOSHENKO; GOODIER, 1970, p. 1).

As análises de elasticidade usam todo o equacionamento mostrado na seção 2 deste trabalho, além de mais algumas que serão mostradas nesta seção. A hipótese de pequenos deslocamentos (a primeira apresentada para análise da Resistência do Materiais) também deve ser considerada na Teoria da Elasticidade.

3.1. A equação de compatibilidade

Já foram definidas na seção 2.1 as fórmulas do equilíbrio diferencial. Com apenas essas duas equações (equações 2-1 e 2-2) não é possível determinar as 3 tensões (σ_{xx}, σ_{yy} e σ_{xy}) geradas num estado plano de tensão ou deformação. As citadas igualdades são repetidas aqui por conveniência:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + X = 0 \qquad \text{Equação (3-1)}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + Y = 0 \qquad \text{Equação (3-2)}$$

Para se obter todas as tensões observadas em um elemento infinitesimal, é necessária, portanto, uma terceira equação chamada equação da compatibilidade.

Na seção 2.2, foram desenvolvidas as equações de deformações causadas em um elemento infinitesimal plano. Essas são aqui repetidas por conveniência:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{Equação (3-3)}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{Equação (3-4)}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{Equação (3-5)}$$

Aplicando duas vezes a diferencial em relação a *y* em 3-3, duas vezes a diferencial em relação a *x* em 3-4 e uma vez a diferencial em relação a *y* e outra em relação a *x* em 3-5 se obtém:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

Com base nisso conclui-se que:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad \text{Equação (3-6)}$$

Pela Lei de Hooke (apresentada na seção 2.3) simplificada para sistemas bidimensionais, sabe-se que:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \upsilon \sigma_{yy}\right) \qquad \text{Equação (3-7)}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \upsilon \sigma_{xx}\right) \qquad \text{Equação (3-8)}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\upsilon)}{E}\sigma_{xy} \qquad \text{Equação (3-9)}$$

Substituindo as equações 3-7, 3-8 e 3-9 em 3-6 obtêm-se:

$$\frac{\partial^2(\sigma_{xx} - \upsilon\sigma_{yy})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\sigma_{yy} - \upsilon\sigma_{xx})}{\partial x^2} = 2(1+\upsilon)\frac{\partial^2\sigma_{xy}}{\partial x\partial y} \qquad \text{Equação (3-10)}$$

Supõe-se que nas equações 3-1 e 3-2 existe como forças de corpo apenas a força peso. Diferenciando a equação 3-1 em relação a *x* e a 3-2 em relação a *y* e somando os resultados, encontra-se:

$$2\frac{\partial^2\sigma_{xy}}{\partial x\partial y} = -\frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\sigma_{yy}}{\partial y^2} = \qquad \text{Equação (3-11)}$$

Substituindo agora a equação 3-11 na equação 3-10, encontra-se:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) * (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \qquad \text{Equação (3-12)}$$

A equação 3-12 corresponde à equação de compatibilidade. Prova-se que esta equação é válida tanto para o estado plano de tensão quanto para o de deformação(TIMOSHENKO; GOODIER, 1970, p. 25).

3.2. O método de solução por polinômios

Particularmente visando a solução de problemas de vigas e outras estruturas em estado plano de solicitação, nos quais a conformação geométrica é cartesiana, uma técnica importante e muito útil para resolução da equação 3-12, utiliza o conceito de função de tensão (Φ) (TIMOSHENKO; GOODIER, 1970, p. 29), que apresenta a seguinte formulação:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \qquad \text{Equação (3-13)}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \qquad \text{Equação (3-14)}$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \qquad \text{Equação (3-15)}$$

As equações 3-13 e 3-14 podem ser substituídas em 3-12, gerando a equação bi harmônica mostrada a seguir:

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4} + 2 * \frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4} = 0 \qquad \text{Equação (3-16)}$$

Para resolvê-la, considera-se que a expressão da função de tensão possa ser definida através de polinômios, nas seguintes formas(TIMOSHENKO; GOODIER, 1970):

$$\Phi_2 = \frac{a_2}{2}x^2 + b_2xy + \frac{c_2}{2}y^2$$ Equação (3-17)

$$\Phi_3 = \frac{a_3}{6}x^3 + \frac{b_3}{2}x^2y + \frac{c_3}{2}xy^2 + \frac{d_3}{6}y^3$$ Equação (3-18)

$$\Phi_4 = \frac{a_4}{12}x^4 + \frac{b_4}{6}x^3y + \frac{c_4}{2}x^2y^2 + \frac{d_4}{6}xy^3 + \frac{e_4}{12}y^4$$ Equação (3-19)

$$\Phi_5 = \frac{a_5}{20}x^5 + \frac{b_5}{12}x^4y + \frac{c_5}{6}x^3y^2 + \frac{d_5}{6}x^2y^3 + \frac{e_5}{12}xy^4 + \frac{f_5}{20}y^5$$ Equação (3-20)

Com base nas equações 3-13, 3-14 e 3-15 podem-se achar as tensões que esses polinômios geram. Por exemplo, com a equação 3-17possível concluir que:

$$\sigma_x = c_2$$ Equação (3-21)

$$\sigma_y = a_2$$ Equação (3-22)

$$\sigma_{xy} = -b_2$$ Equação (3-23)

Observando as equações de 3-21 a 3-23 é possível interpretar o carregamento representado. Essa configuração constitui-se de tensões e compressões perpendiculares entre si e um esforço cisalhante uniforme, conforme figura 3-1.

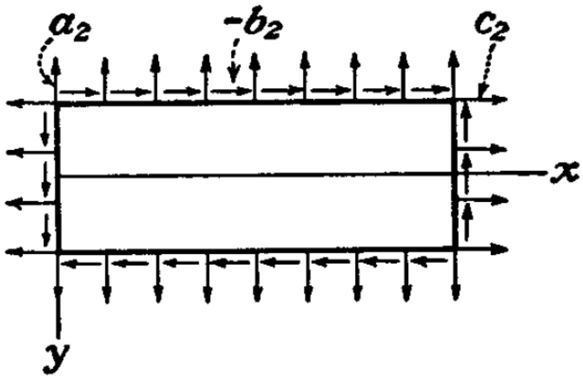

Figura 3-1: Tensões geradas pela função tensão polinomial de segunda ordem.

A equação 3-18 gera outras funções para as tensões, utilizando as equações 3-13, 3-14 e 3-15:

$$\sigma_x = c_3x + d_3y$$ Equação (3-24)

$$\sigma_y = a_3x + b_3y$$ Equação (3-25)

$$\sigma_{xy} = -b_3x - c_3y$$ Equação (3-26)

As equações de 3-24 a 3-25 podem gerar vários tipos de configurações conforme desejar. Para isso basta alterar as constantes nelas existentes. Por exemplo, caso se considerar $a_3=c_3=d_3=0$, o corpo em análise irá apresentar um carregamento conforme figura 3-2. Nesse caso, nos lados superior e inferior, existe uma compressão e uma tração uniformemente distribuída, respectivamente. No lado direito, uma tensão cisalhante constante age nessa face, enquanto no lado oposto não existe nenhum carregamento.

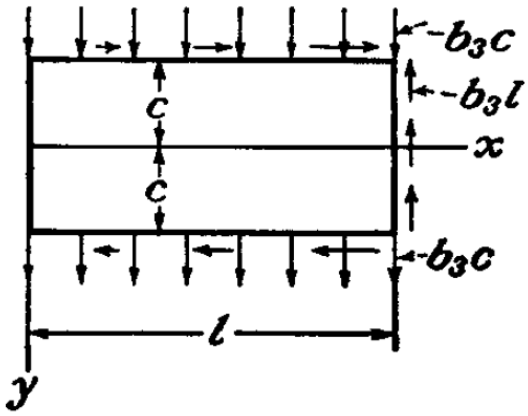

Figura 3-2: Tensões observadas pela função tensão polinomial de terceira ordem caso $a_3=c_3=d_3=0$

Para garantir a compatibilidade, na equação 3-19 é necessário primeiro encontrar os valores de e_4 com a equação 3-16. Feito isso se encontra as tensões que o polinômio 3-19 gera da mesma forma que com a equação 3-17:

$$e_4 = -(2c_4 + a_4) \qquad \text{Equação (3-27)}$$

$$\sigma_x = c_4x^2 + d_4xy - (2c_4 + a_4)y^2 \qquad \text{Equação (3-28)}$$

$$\sigma_y = a_4x^2 + b_4xy + c_4y^2 \qquad \text{Equação (3-29)}$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{b_4}{2}x^2 + 2c_4xy - \frac{d_4}{2}y^2 \qquad \text{Equação (3-30)}$$

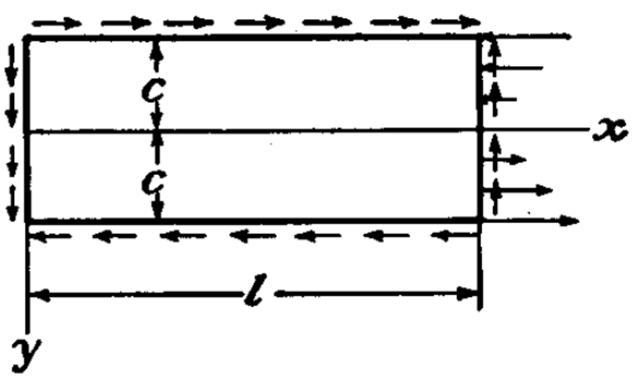

Figura 3-3: Tensões geradas pela função de tensão polinomial de quarta ordem com todas as constantes, menos d_4, são iguais à zero.

Note que de maneira análoga a equação 3-18, as equações de 3-27 a 3-30 podem gerar vários tipos de configurações de carregamento. Por exemplo, ao se considerar $a_4=b_4=c_4=0$, o carregamento estimado fica conforme figura 3-3. Nas faces superiores e inferiores serão obtidas tensões cisalhantes uniformemente distribuídas, enquanto nas laterais essas tensões serão difundidas segundo uma configuração parabólica. Além disso, uma tensão normal a face direita será observada segundo uma função linear. Na equação 3-20 é necessário primeiro encontrar os valores de e_5 e f_5 com a equação 3-16. Feito isso se encontra as tensões que o polinômio 3-20 gera da mesma forma que com o 3-17:

$$\sigma_x = \frac{c_5}{3}x^3 + d_5x^2y - (2c_5 + 3a_5)xy^2 - \frac{1}{3}(b_5 + 2d_5)y^3 \qquad \text{Equação (3-31)}$$

$$\sigma_y = a_5x^3 + b_5x^2y + c_5xy^2 + \frac{d_5}{3}y^3 \qquad \text{Equação (3-32)}$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{1}{3}b_5x^3 - c_5x^2y - d_5xy^2 + \frac{1}{3}(2c_5 + 3a_5)y^3 \qquad \text{Equação (3-33)}$$

As equações de 3-31 a 3-33 também podem gerar vários tipos de carregamento à medida que alteramos os valores das constantes. Para essas equações, toma-se como exemplo o caso em que $a_5=b_5=c_5=0$. Nessa situação, as tensões normais ficam configurada segundo a figura 3-4 enquanto as cisalhantes segundo 3-5.

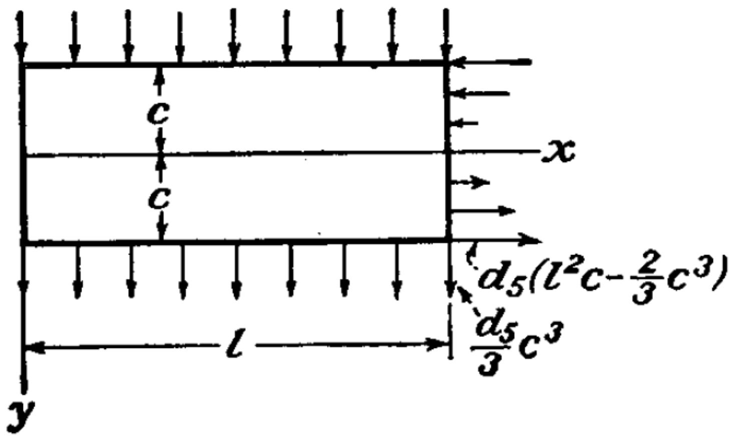

Figura 3-4: Tensões normais geradas pela função tensão polinomial de quinta ordem caso $a_5=b_5=c_5=0$

Para essa configuração, as tensões normais nos lados superior e inferior ficam uniformemente distribuídas, enquanto nos lados esquerdo não se observa nenhuma tensão. Já para a face direita, existem duas partes, uma delas seguindo uma função linear enquanto a outra é uma parábola cúbica. As tensões cisalhantes são proporcionais a x nos lados longitudinais e seguem uma parábola na extremidade direita apenas, visto que na lateral esquerda não existem nenhuma tensão cisalhante.

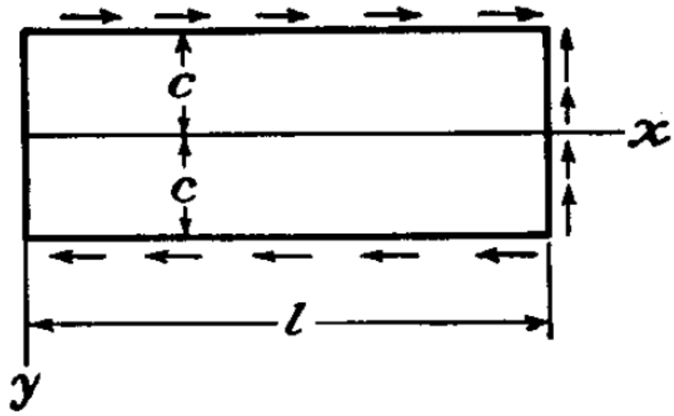

Figura 3-5: Tensões cisalhantes geradas pela função tensão polinomial de quinta ordem caso $a_5=b_5=c_5=0$

3.3. A determinação dos deslocamentos

Quando os carregamentos são encontrados com as equações de 3-21 a 3-33, as deformações podem ser encontradas através das equações constitutivas (2-8 a 2-11). Após isso, os deslocamentos serão encontrados com as equações 2-3, 2-4 e 2-5, repetidas aqui por conveniência:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$ Equação (3-34)

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$ Equação (3-35)

$$\gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$ Equação (3-36)

Essas fórmulas são facilmente integráveis, obtendo assim valores para os deslocamentos horizontais e verticais segundo uma função das coordenadas geométricas:

$$u = \int \varepsilon_x dx + f(y)$$ Equação (3-37)

$$v = \int \varepsilon_y dy + g(x)$$ Equação (3-38)

Observando as equações obtidas, pode-se afirmar que apenas com tensões e deformações não será possível obter valores para os deslocamentos, sendo necessárias condições de contorno para se descobrir os deslocamentos por completo. No estudo de casos será mostrado o uso dessas equações em problemas particulares.

Capítulo 4- Análise dos deslocamentos e tensões gerados em vigas

4.1. Definição de Vigas

Define-se como viga um elemento estrutural que trabalha em posição horizontal ou inclinada, assentada em um ou mais apoios, ao qual está submetido um carregamento perpendicular ao seu eixo longitudinal. Sendo assim, diversos sistemas necessitam de usar vigas para sustentar esforços.

Figura 4-1:Ponte Jornalista Joel Silveira, em Aracaju – SE. Exemplo de aplicação de vigas.

Na engenharia civil, vigas são utilizadas para transferir os carregamentos impostos na laje para os pilares. Nas asas de aviões são elementos necessários para resistir os esforços provenientes da força de sustentação advinda das asas. Em pontes as vigas recebem carregamentos que se alteram ao longo do tempo, visto que há transição de carga nesses sistemas.

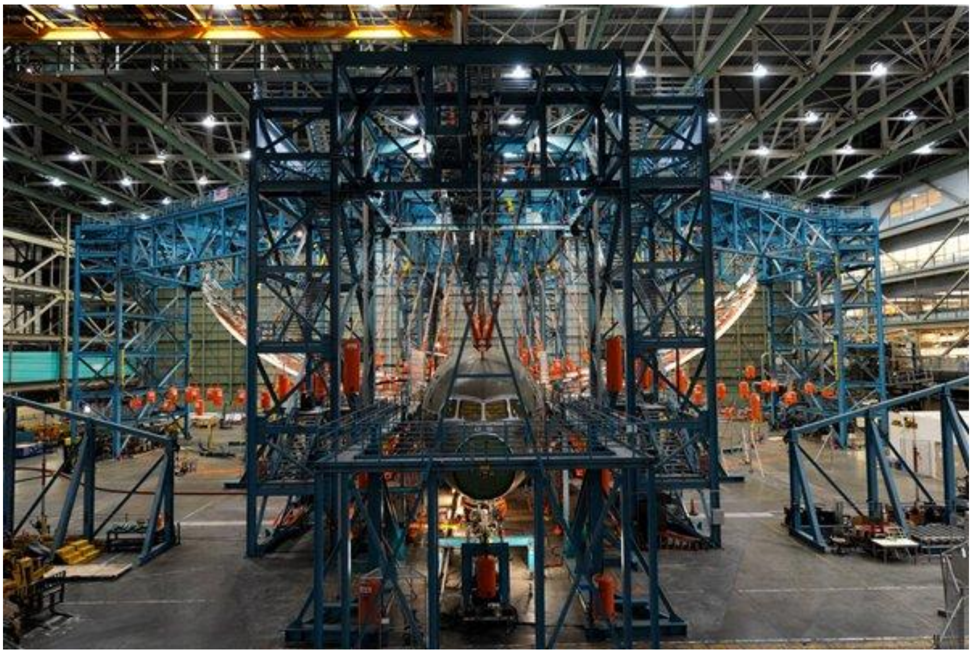

Figura 4-2:Ensaio de flexão das asas na unidade de teste estático do Boeing 787 Dreamliner. As asas aguentam cargas de até 150% do valor que jamais elas poderão passar durante o serviço operacional.

Em muitas máquinas, seja de processamento, elevação ou transporte, as vigas desempenham importante papel funcional. Por esse motivo, em situações que uma falha pode gerar graves consequências, ensaios são realizados em cada elemento do sistema. Empresas como a Boeing, realizam o ensaio de flexão das asas com cargas de até 150% do valor que jamais elas poderão passar durante o serviço operacional, favorecendo assim a segurança (figura 4-2).

Nos estudos normais de resistência dos materiais ou mecânica técnica, os efeitos das tensões verticais (σ_{yy}) decorrentes do carregamento imposto à estrutura são desprezados, visto que nenhuma alusão a elas, explicando seus efeitos e sua magnitude, são fornecidas.

4.2. Equilíbrio na seção de uma viga carregada

Quando uma viga prismática de largura b e comprimento L está carregada, é possível seccioná-la e observar a situação ilustrada na figura 4-3:

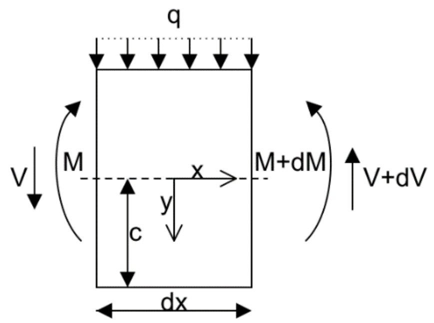

Figura 4-3:Seção da viga submetida a um carregamento.

A análise do equilíbrio neste paralelepípedo semi-elementar específico (o comprimento vertical não é infinitesimal), no qual as tensões normais e cisalhantes são substituídas pelo seu efeito global na direção *y* mostra que:

$$\sum F_y = 0$$

$$V - V - dV = qdx$$

$$\frac{dV}{dx} = -q \qquad \text{Equação (4-1)}$$

Da mesma forma para os momentos:

$$\sum M_o = 0$$

$$(V + dV)\frac{dx}{2} + V\frac{dx}{2} + M - M - dM = 0$$

$$\frac{dM}{dx} = V \qquad \text{Equação (4-2)}$$

4.3. Relação Cinemática na seção da viga

Desconsiderando os efeitos localizados de *q*, *V, dV* e *dM* na viga, podem-se realizar as seguintes hipóteses a fim de se obter o carregamento σ_{xx} (HIBBELER, 2003, p. 222 a 226):

- O eixo longitudinal *x*, que fica na superfície neutra, não recebe nenhuma alteração em seu comprimento original.
- Todas as seções transversais da viga permanecem planas e perpendiculares ao eixo longitudinal durante o carregamento.

- Qualquer deformação da seção transversal em seu próprio plano será desprezada.

A partir dessas hipóteses, o elemento receberá deformação conforme figura 4-4. O comprimento *ds'* encontrado a uma distância *y* da linha neutra aumenta, enquanto o comprimento *dx* permanece inalterado. Ambos os comprimentos curvam-se, formando arcos concêntricos em O com ângulo *dϑ* e raio em relação à linha neutra de *ρ*.

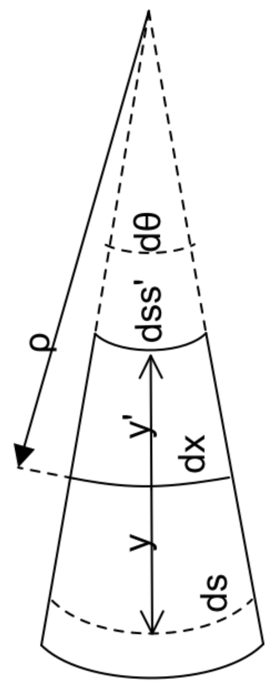

Figura 4-4:Seção da viga deformada pelo momento fletor.

Com base nisso, define-se como deformação (ε_x):

$$\varepsilon_x = \lim_{dx \to 0} \frac{ds - dx}{dx}$$

Exprimindo *ds* e *dx* em função de *ρ* e *dθ*:

$$\varepsilon_x = \lim_{d\theta \to 0} \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta}$$

Logo:

$$\varepsilon_x = \frac{y}{\rho}$$

Sabendo que a deformação máxima (ε_{max}) ocorre em y=c:

$$\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_{max}} = \frac{y}{c} \qquad \text{Equação (4-3)}$$

4.4. Aplicação da Relação Constitutiva na viga

Como próximo passo é feita a hipótese que o material se comporta de maneira linear-elástica. Assim se pode aplicar a lei de Hooke:

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_x \qquad \text{Equação (4-4)}$$

Deste modo, substituindo-se esta última equação na equação 4-1 chega-se a:

$$\sigma_{xx} = \frac{y}{c}\sigma_{max} \qquad \text{Equação (4-5)}$$

4.5. Tensões normais na viga

Para se obter o máximo valor de tensão sofrida pela seção, é preciso lembrar que a distribuição de tensão observada corresponde ao momento de intensidade M aplicado à seção:

$$M = \int \sigma_{xx} y dA$$

$$M = \int \left(\frac{y}{c}\sigma_{max}\right) y dA$$

$$M = \sigma_{max} \int \frac{y^2}{c} dA$$

Supondo uma largura de seção unitária, conclui-se que:

$$\sigma_{max} = \frac{Mc}{I} \qquad \text{Equação (4-6)}$$

Onde I corresponde ao momento de inércia da área de seção transversal.

Substituindo a equação 4-6 na 4-5:

$$\sigma_{xx} = \frac{My}{I} \qquad \text{Equação (4-7)}$$

4.6. Tensões cisalhantes em vigas

Por simplicidade, omitindo a representação de V e V+dV, o sistema passa a apresentar as características segundo a figura4-5.

Para obter a tensão cisalhante, deve-se lembrar das equações apresentadas anteriormente:

$$\frac{dV}{dx} = -q$$

$$\frac{dM}{dx} = V$$

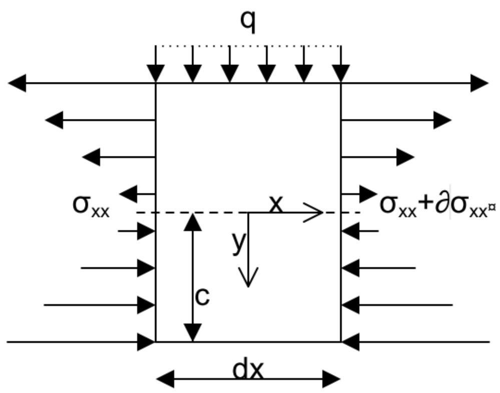

Figura 4-5:Seção da viga carregada.

Considere que o diferencial de momento dM gera um diferencial de tensão normal, intitulada de $\partial\sigma_{xx}$.

Segundo ODEN & RIPPERGER (1981), aplica-se a equação 4-7 na 2-1 e desprezando-se as forças de corpo:

$$\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{My}{I}\right)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\int ydy}{I}\frac{\partial M}{\partial x}$$

Substituindo 4-2 e fazendo $M_{est} = \int bydy$:

$$\sigma_{xy} = -\frac{VM_{est}}{Ib} \qquad \text{Equação (4-8)}$$

Supondo uma seção transversal retangular:

$$\frac{M_{est}}{Ib} = \frac{12}{8bc^3b}\int_y^c bydy = \frac{12}{8bc^3}\left[\frac{y^2}{2}\right]_y^c = \frac{3}{4bc^3}[c^2 - y^2]$$

$$\sigma_{xy} = -V\frac{3}{4bc^3}[c^2 - y^2] \qquad \text{Equação (4-9)}$$

Duas importantes observações agora se fazem oportunas:

A primeira advém do fato de que a consideração das tensões cisalhantes, realizada mediante o equilíbrio da fatia elementar anteriormente mostrada, viola uma hipótese pré-estabelecida para a obtenção do campo de tensões normais, que admitia que as seções planas antes da aplicação do carregamento ficariam planas após a imposição deste. Isto não é verdade, a menos da condição de flexão pura, ou seja, sem esforço cortante. A figura 4-6 ilustra a distribuição das tensões e o modo de deformação da viga na condição de flexão com cisalhamento.

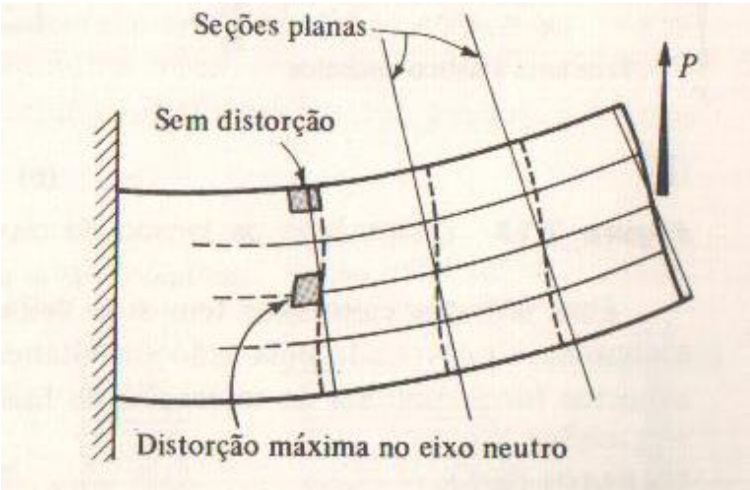

Figura 4-6:Comportamento da viga engastada submetida a carregamento concentrado.

A segunda observação se prende à relação entre as dimensões da viga. Nas fórmulas deduzidas não há nenhuma restrição quanto à necessidade de uma razão entre o comprimento, a largura e a espessura da viga. Entretanto, de modo a minimizar o efeito da distorção imposta no modelo original, de que as seções planas permaneceriam planas, é comum se admitir que a melhor representação física do modelo matemático gerado consiste em tomar vigas com dimensões tais que a largura seja bem superior à sua altura, que por sua vez deve ser bem maior do que a profundidade.

Ressalta-se, entretanto, que o modelo apresentado é aplicado na prática ao estudo de vigas altas e vigas espessas, com algumas adaptações simples.

4.7. Tensões normais transversais

Embora sejam comumente desprezadas na teoria de vigas, mediante o uso das equações de equilíbrio, é possível determinar a distribuição das tensões normais transversais, que ocorrem no caso de haver carregamento ao longo das superfícies horizontais superiores da viga. Assim:

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} \rightarrow \partial \sigma_{yy} = -\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} \partial y$$

$$\sigma_{yy} = \int_{y}^{c} \frac{\partial}{\partial x} V(x) \frac{3}{4bc^3} [c^2 - y^2] dy \; ; onde \; \frac{\partial}{\partial x} V(x) = -q \qquad \text{Equação} \quad (\quad 4\text{-}10 \quad)$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{q}{b} \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \left(\frac{y}{c} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{y}{c} \right)^3 \right] \qquad \text{Equação} \quad (\quad 4\text{-}11 \quad)$$

Logo, σ_{yy} varia de *–p/b* na parte superior até o valor o valor nulo na parte inferior.

4.8. A equação da linha elástica

Segundo HIBBELER (2003), observa-se novamente a figura 4-4, considerando agora como sentido positivo na vertical *y'*. É possível admitir que o comprimento *ds* inicial deforma-se para *dss'*. Vale lembrar que esse comprimento *ds* era igual a *dx* no estado em que a viga encontrava-se sem carregamento. Com base nisso:

$$\varepsilon_x = \lim_{dx \to 0} \frac{dss' - dx}{dx}$$

Mas:

$$ds = dx = \rho d\theta$$

$$dss' = (\rho - y) d\theta$$

Então:

$$\varepsilon_x = \frac{(\rho - y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta}$$

Ou:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\varepsilon_x}{y} \qquad \text{Equação (4-12)}$$

Aplicando a Lei de Hooke e a equação 4-7 na equação 4-12, encontra-se:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \qquad \text{Equação (4-13)}$$

Encontra-se na literatura que(HIBBELER, 2003, p. 452):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{M}{EI} \qquad \text{Equação (4-14)}$$

A derivada de primeira ordem nessa equação normalmente possui um pequeno valor. Logo, o quadrado de seu valor será desprezado na presença da unidade para reduzir a equação 4-14 para:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \qquad \text{Equação (4-15)}$$

Essa equação é a que comumente se utiliza nos cálculos de engenharia para determinar a flecha de vigas e seus valores são precisos, salvos restrições impostas em normas(HIBBELER, 2003, p. 452).

Capítulo 5- O Método dos Elementos de Contorno

5.1. Introdução

Neste capítulo são apresentados os conceitos básicos do Método de Elementos de Contorno (MEC) com sua formulação clássica aplicada para a solução de problemas bidimensionais de elasticidade.

Segundo BREBBIA (1984), o Método dos Elementos de Contorno transforma um modelo matemático formulado por equações diferenciais parciais - que descrevem matematicamente o problema físico num domínio espacial e temporal - em equações integrais envolvendo somente valores de contorno ou condições iniciais. Para realização dessa tarefa, a propriedade da integração por partes é utilizada em conjunto com o Teorema da Divergência. Todo esse processo conta com o apoio de funções auxiliares denominadas soluções fundamentais que permitem a eliminação da integral de domínio remanescente após essa transformação matemática.

A aplicação bem sucedida do MEC promove a redução da dimensão do problema em uma unidade. Ao se analisar apenas o contorno, é possível observar algumas vantagens em relação a outros métodos. A mais imediata delas é a simplicidade no manuseio dos dados de entrada, bem menos numerosos, o que implica na quantidade de operações matemáticas que são requeridas para construir o modelo computacional, que são bem mais simples por conta da redução da dimensão do problema.

Outras vantagens do MEC são: a possibilidade de trabalhar com regiões infinitas devido a peculiaridades da solução fundamental; a superioridade de precisão na análise de concentração de tensões e a operacionalização fácil dos casos de fronteira variável, pois a operação de reestruturação da malha é muito mais acessível.

Também existem algumas desvantagens, como a complexidade apresentada pela solução fundamental em alguns casos, assim como a menor flexibilidade no trato de problemas de meios heterogêneos e inadequação na abordagem de problemas com domínios delgados. Também é uma desvantagem o fato de que as matrizes do MEC resultantes após a discretização do contorno não são simétricas e bandeadas.

5.2. Formulação do MEC na elasticidade linear

Em muitos problemas de Mecânica dos Sólidos as grandezas são expressas em vetores, ou seja, define-se módulo, direção e sentido. Logo, observa-se problemas de campo vetorial.

Esses problemas são normalmente analisados com as seguintes hipóteses: considera-se o meio como sendo contínuo, homogêneo, elástico, linear, isotrópico, sem ações de domínio e nas condições de estacionariedade. O problema, então é governado pela Equação de Navier:

$$Gu_{j,kk} + \frac{G}{(1-2\nu)} u_{k,kj} + b_j = 0, \quad em \;\; \Omega \qquad \text{Equação (5-1)}$$

Está equação pode ser escrita utilizando as constantes de Lamé. Empregando tais constantes, a Equação de Navier é reescrita como:

$$\mu u_{j,ii} + (\lambda + \mu) u_{i,ij} + b_j = 0 \qquad \text{Equação (5-2)}$$

Uma consideração que pode ser feita é que as cargas de domínio são nulas, ou seja:

$$b_j = 0 \qquad \text{Equação (5-3)}$$

De acordo com REYNA VERA-TUDELA (1999), a formulação tradicional do MEC, via teoria das Equações Integrais, consiste em ponderar a equação 5-2 por uma função vetorial u_j^* e depois integrá-la no domínio. Por meio de um tratamento matemático adequado, mostrado a seguir, transforma-se esta equação integral de domínio em uma equação integral de contorno.

Essa função u_j^*é intitulada de solução fundamental. Para o problema apresentado, ela é a solução de um problema elástico correlato, cujo domínio é infinito ou semi-infinito, onde as forças de corpo são ações concentradas no domínio, atuando nas direções coordenadas, assim:

$$\mu u^*_{j,ii} + (\lambda + \mu) u^*_{i,ij} + b^*_j = 0 \qquad \text{Equação (5-4)}$$

Onde as ações singulares bj* são representadas por:

$$b^*_j = \Delta(\zeta, X) P_j, \quad P_j = 1 \qquad \text{Equação (5-5)}$$

Na equação 5-5, ζ representa o ponto fonte de aplicação da carga enquanto *X* representa o ponto campo e $\Delta(\zeta, X)$ é a função Delta de Dirac, para a qual se tem as seguintes propriedades:

$$\Delta(\zeta, X) = 0 \text{, se } \zeta \neq X \qquad \text{Equação (5-6)}$$

$$\Delta(\xi, X) \rightarrow \infty \text{, se } \zeta = X \qquad \text{Equação (5-7)}$$

$$\int_{\Omega} f(X)\Delta(\zeta, X)d\Omega = f(\zeta) \text{, se } \zeta \in \Omega \qquad \text{Equação (5-8)}$$

Então, tomando-se a equação 5-2, ponderando-a e integrando-a no domínio, tem-se a expressão seguinte:

$$\mu\int_{\Omega} u_{j,ii} u_j^* d\Omega + (\lambda + \mu)\int_{\Omega} u_{i,ij} u_j^* d\Omega = 0 \qquad \text{Equação (5-9)}$$

A seguir, utiliza-se a propriedade da integração por partes cuja estrutura consiste em:

$$\int u_{j,ii} v_{,j} d\Omega = \int \left(u_{j,i} v_j\right)_{,i} d\Omega - \int v_{j,i} u_{j,i} d\Omega \qquad \text{Equação (5-10)}$$

Também faz uso do Teorema da Divergência, no qual:

$$\int_{\Omega} \left(u_j^* u_{j,i}\right)_{,i} d\Omega = \int_{\Gamma} u_j^* u_{j,i} n_i d\Gamma \qquad \text{Equação (5-11)}$$

Os entremeios da transformação matemática da Equação de Navier (equação 5-2) estão bem definidos na literatura (VALOTO, 2011). O resultado obtido encontrado é apresentado a seguir:

$$P_j u_j(\zeta) + \int_{\Gamma} p_j^* u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma \qquad \text{Equação (5-12)}$$

De 5-5 sabe-se que o módulo de P_j é igual à unidade. No entanto, do modo como está escrita a equação 5-12, o somatório em j no primeiro termo do lado direito da citada equação impede que cada carga concentrada P_j atue independentemente uma da outra. Uma nova estrutura se faz necessária. Essa etapa será realizada ao se adotar uma nova forma para a solução fundamental e sua derivada normal, que passam a serem diádicas. Agora a equação passa a ter a seguinte forma:

$$C_{ij}(\zeta)u_j(\zeta) + \int_{\Gamma} u_j(x) p_{ij}^*(\zeta; x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} p_j(x) u_{ij}^*(\zeta; x) d\Gamma(x) \qquad \text{Equação (5-13)}$$

Onde o coeficiente diádico C_{ij} é introduzido em função do posicionamento do ponto fonte se situar dentro do domínio, fora dele ou exatamente sobre o contorno. Tal coeficiente também introduz a possibilidade de tratamento de contornos não suaves. O detalhamento matemático deste coeficiente está bem exposto na literatura (VALOTO, 2011).

5.3. Solução fundamental adotada

A equação 5-13 é a equação integral do Método dos Elementos de Contorno correspondente à Equação diferencial de Navier. Ressalta-se que até o momento não foi feita nenhuma aproximação, de modo que são expressões matematicamente equivalentes, sendo uma integral e outra diferencial. A forma em que é apresentada a equação 5-13 também é dita forma integral inversa.

Para o presente trabalho, opta-se em usar uma função auxiliar que representa a solução de um corpo infinito carregado com uma força concentrada unitária. Por ser assemelhada ao problema que se deseja resolver, garante o bom desempenho numérico do método. Logo, utiliza-se a solução fundamental de Kelvin. Ela é obtida aplicando uma carga unitária em um corpo infinito elástico e calculando os deslocamentos e forças de superfície resultantes desse carregamento. As soluções fundamentais de Kelvin para problemas bidimensionais são apresentadas por BREBBIA, TELLES e WROBEL (1984):

$$u^*_{lk} = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)}\left[(3-4\nu)\ln\left(\frac{1}{r}\right)\delta_{lk} + r_{,l}r_{,k}\right] \quad \text{Equação (5-14)}$$

$$p^*_{lk} = \frac{-1}{4\pi G(1-\nu)r}\left[\frac{\partial r}{\partial n}\left((1-2\nu)\delta_{lk} + 2r_{,k}r_{,l}\right) - (1-2\nu)\left(r_{,l}n_k - r_{,k}n_l\right)\right] \quad \text{Equação (5-15)}$$

Onde p^*_{lk} e u^*_{lk} representam as forças de superfície e deslocamentos na direção k devido a uma força unitária na direção *l*; *r* é a distância entre o ponto fonte e o ponto calculado; *v* é o coeficiente de Poisson e *G* é módulo de cisalhamento. A figura 5-1 ilustra o ponto de aplicação do carregamento (ponto fonte) e o ponto em que se obtêm os resultados de força de superfície e deslocamento (ponto campo) e seus respectivos eixos.

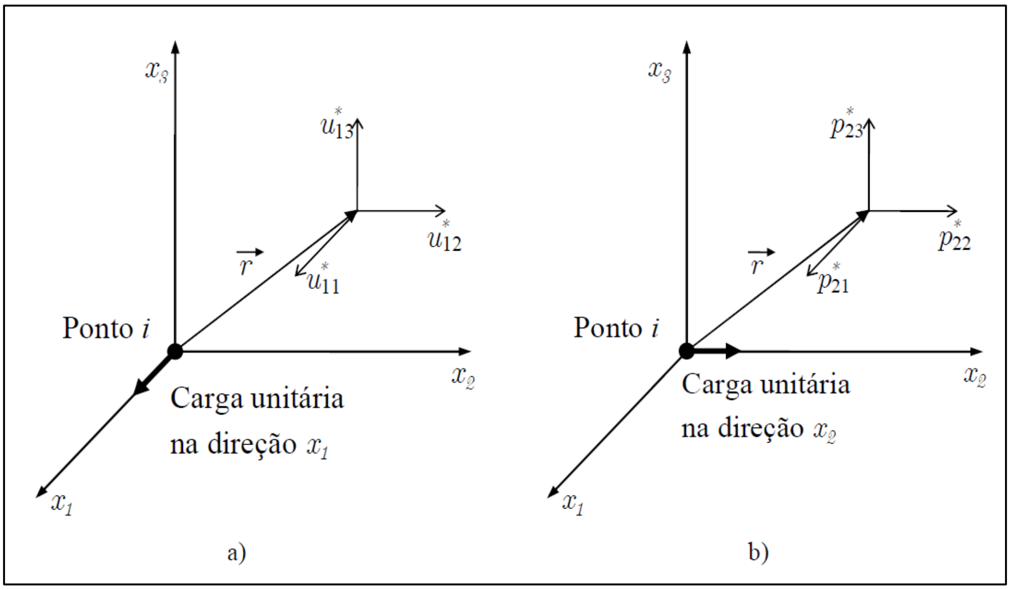

Figura 5-1: (a) Componentes de deslocamento da solução fundamental (carregamento unitário n direção x1), (b) componentes de força de superfície da solução fundamental (carregamento unitári na direção x2)

A variável $r = r(\zeta ,X)$ representa a distância entre o ponto fonte ζ , de aplicação da carga e o campo X. As derivadas são tomadas com relação às coordenadas X_i.

Assim, os componentes das equações 5-14 e 5-15 podem ser definido:

$$r = (r_i r_i)^{1/2}$$ Equação (5-16)

$$r_i = x_i(x) - x_i(\zeta)$$ Equação (5-17)

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i(x)} = \frac{r_i}{r} = -\frac{\partial r}{\partial x_i(\zeta)}$$ Equação (5-18)

5.4. Cálculo das tensões e dos deslocamentos para os pontos internos

Segundo Telles [1980], para o cálculo de pontos internos é usual começar assumindo a denominada Identidade de Somigliana para equações integrais de contorno que modelam problemas de elasticidade.

Essa identidade é dada em 5-19, que nada mais é do que a equação 5-13 para pontos fonte situados no interior:

$$u_i(\zeta)+\int_\Gamma u_j(\zeta)p_{ij}^*(\zeta;X)d\Gamma=\int_\Gamma p_j(X)u_{ij}^*(\zeta;X)d\Gamma$$ Equação (5-19)

Derivando-a esta última expressão em relação às coordenadas do ponto ζ :

$$\frac{du_i(\zeta)}{dx_k(\zeta)}=\int_\Gamma p_j(X)u_{ij,k}^*(\zeta;X)d\Gamma(X)-\int_\Gamma u_j(X)p_{ij,k}^*(\zeta;X)d\Gamma(X)$$ Equação (5-20)

A equação 5-20 fornece as deformações específicas que, através da Lei de Hooke, permitem encontrar as tensões nos pontos internos.

Então, pode-se escrever diretamente que a expressão das tensões para os pontos internos é:

$$\sigma_{ij}(\zeta)=\int_\Gamma p_k(X)u_{ijk}^*(\zeta;X)d\Gamma(X)-\int_\Gamma u_k(X)p_{ijk}^*(\zeta;X)d\Gamma(X)$$ Equação (5-21)

Onde define-se como solução fundamental:

$$u_{ijk}^*=\frac{1}{4\pi\alpha(1-\nu)r^2}\left\{(1-2\nu)\left(r_{,j}\delta_{ik}+r_{,i}\delta_{jk}-r_{,k}\delta_{ij}\right)+\beta r_{,i}r_{,j}r_{,k}\right\}$$ Equação (5-22)

$$p_{ijk}^*=\frac{G}{2\pi\alpha(1-\nu)r^\beta}\{\beta\frac{\partial r}{\partial n}\left[(1-2\nu)r_{,k}\delta_{ij}+\nu\left(r_{,j}\delta_{ik}+r_{,i}\delta_{jk}-r_{,k}\delta_{ij}\right)+\gamma r_{,i}r_{,j}r_{,k}\right]+$$

$$+\beta\nu\left(n_ir_{,j}r_{,k}+n_jr_{,i}r_{,k}\right)+(1-2\nu)\left(\beta n_kr_{,i}r_{,j}+n_j\delta_{ij}+n_j\delta_{jk}\right)-$$

$$-(1-4\nu)n_k\delta_{ij}\}$$ Equação (5-23)

Onde as constantes *α, β* e *γ* apresentam os seguintes valores:

$$\alpha=2{,}1$$
$$\beta=3{,}2$$
$$\gamma=5{,}4$$

5.5. Procedimento numérico geral

A equação integral de contorno para a elasticidade mostrada em 5-13 é repetida aqui por conveniência:

$$C_{ij}(\zeta)u_j(\zeta)+\int_\Gamma u_j(x)p_{ij}^*(\zeta;x)d\Gamma(x)=\int_\Gamma p_j(x)u_{ij}^*(\zeta;x)d\Gamma(x)$$ Equação (5-13)

Devido ao fato desta última expressão ter um caráter vetorial, para um dado ponto ζ

, duas equações são geradas:

$$C_{11}(\zeta)u_1(\zeta)+C_{12}(\zeta)u_2(\zeta)+\int_\Gamma u_1(x)p^*_{11}(\zeta;x)d\Gamma(x)+\int_\Gamma u_2(x)p^*_{12}(\zeta;x)d\Gamma(x)-$$

$$-\int_\Gamma p_1(x)u^*_{11}(\zeta;x)d\Gamma(x)-\int_\Gamma p_2(x)u^*_{12}(\zeta;x)d\Gamma(x)=0 \qquad \text{Equação (5-24)}$$

$$C_{21}(\zeta)u_1(\zeta)+C_{22}(\zeta)u_2(\zeta)+\int_\Gamma u_1(x)p^*_{21}(\zeta;x)d\Gamma(x)+\int_\Gamma u_2(x)p^*_{22}(\zeta;x)d\Gamma(x)-$$

$$-\int_\Gamma p_1(x)u^*_{21}(\zeta;x)d\Gamma(x)-\int_\Gamma p_2(x)u^*_{22}(\zeta;x)d\Gamma(x)=0 \qquad \text{Equação (5-25)}$$

Para a resolução no MEC, o próximo passo para a resolução de um problema é a discretização do contorno, em que o mesmo é dividido em um número finito de elementos e uma hipótese sobre a variação das grandezas do problema ao longo dos mesmos – no caso: deslocamentos e forças de superfície – são admitidas.Essa discretização transforma a equação integral em um sistema de equações algébricas,que deve ser resolvido para obter a solução do problema.

5.5.1. Aproximação do campo de variáveis

Dividido o contorno numa série de elementos, é preciso aproximar os deslocamentos (u_i) e as forças de superfície (p_i) ao longo do elemento, o que é feito, inicialmente, em termos de interpolação com base nos valores nodais.

$$\mathrm{u}_i=\mathbf{N}^{\mathrm{e}}\mathbf{u}_i^{\,e} \qquad \text{Equação (5-26)}$$

$$\mathrm{p}_i=\mathbf{N}^{\mathrm{e}}\mathbf{p}_\mathbf{i}^{\,e} \qquad \text{Equação (5-27)}$$

Nas expressões anteriores, N^e é o vetor das funções de interpolação, u_i^e e p_i^e são os vetores deslocamento e força do ponto nodal X.

O tipo de elemento adotado é linear. Logo, faz necessário o uso de uma função de forma ϕ, expressas em termos de um sistema de coordenadas situado nas extremidades, conforme 5-28 e 5-29:

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{x}{Le}$$ Equação (5-28)

$$\phi_2(x) = \frac{x}{Le}$$ Equação (5-29)

Onde Le representa o comprimento do elemento em questão.

Logo, para cada direção, uma função é definida para expressar os valores de cada parâmetro ao longo do elemento:

$$u_1^e(x) = {}^e u_1^1 \phi_1(x) + {}^e u_1^2 \phi_2(x)$$ Equação (5-30)

$$u_2^e(x) = {}^e u_2^1 \phi_1(x) + {}^e u_2^2 \phi_2(x)$$ Equação (5-31)

$$p_1^e(x) = {}^e p_1^1 \phi_1(x) + {}^e p_1^2 \phi_2(x)$$ Equação (5-32)

$$p_2^e(x) = {}^e p_2^1 \phi_1(x) + {}^e p_2^2 \phi_2(x)$$ Equação (5-33)

Aplicando essa discretização, a equação integral fica:

$$\begin{bmatrix} c_{11}(\zeta) & c_{12}(\zeta) \\ c_{21}(\zeta) & c_{22}(\zeta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^e u_1 \\ {}^e u_2 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \sum_{e=1}^{N} \int_{\Gamma_e} \begin{bmatrix} p_{11}^*(\zeta;x_e)\phi_1 & p_{12}^*(\zeta;x_e)\phi_1 & p_{11}^*(\zeta;x_e)\phi_2 & p_{12}^*(\zeta;x_e)\phi_2 \\ p_{21}^*(\zeta;x_e)\phi_1 & p_{22}^*(\zeta;x_e)\phi_1 & p_{21}^*(\zeta;x_e)\phi_2 & p_{22}^*(\zeta;x_e)\phi_2 \end{bmatrix} d\Gamma_e \begin{Bmatrix} {}^e u_1^1 \\ {}^e u_2^1 \\ {}^e u_1^2 \\ {}^e u_2^2 \end{Bmatrix} =$$ Equação (5-34)

$$= \sum_{e=1}^{N} \int_{\Gamma_e} \begin{bmatrix} u_{11}^*(\zeta;x_e)\phi_1 & u_{12}^*(\zeta;x_e)\phi_1 & u_{11}^*(\zeta;x_e)\phi_2 & u_{12}^*(\zeta;x_e)\phi_2 \\ u_{21}^*(\zeta;x_e)\phi_1 & u_{22}^*(\zeta;x_e)\phi_1 & u_{21}^*(\zeta;x_e)\phi_2 & u_{22}^*(\zeta;x_e)\phi_2 \end{bmatrix} d\Gamma_e \begin{Bmatrix} {}^e p_1^1 \\ {}^e p_2^1 \\ {}^e p_1^2 \\ {}^e p_2^2 \end{Bmatrix}$$

A equação 5-34, também pode ser escrita da seguinte forma, considerando a integração da solução fundamental e de sua derivada:

$$\begin{bmatrix} c_{11}(\zeta) & c_{12}(\zeta) \\ c_{21}(\zeta) & c_{22}(\zeta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^{e}u_1 \\ {}^{e}u_2 \end{Bmatrix} + \sum_{e=1}^{N} \begin{bmatrix} {}_{\zeta}^{e}H_{11}^{1} & {}_{\zeta}^{e}H_{12}^{1} & {}_{\zeta}^{e}H_{11}^{2} & {}_{\zeta}^{e}H_{12}^{2} \\ {}_{\zeta}^{e}H_{21}^{1} & {}_{\zeta}^{e}H_{22}^{1} & {}_{\zeta}^{e}H_{21}^{2} & {}_{\zeta}^{e}H_{22}^{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^{e}u_1^{1} \\ {}^{e}u_2^{1} \\ {}^{e}u_1^{2} \\ {}^{e}u_2^{2} \end{Bmatrix} =$$

Equação (5-35)

$$= \sum_{e=1}^{N} \begin{bmatrix} {}_{\zeta}^{e}G_{11}^{1} & {}_{\zeta}^{e}G_{12}^{1} & {}_{\zeta}^{e}G_{11}^{2} & {}_{\zeta}^{e}G_{12}^{2} \\ {}_{\zeta}^{e}G_{21}^{1} & {}_{\zeta}^{e}G_{22}^{1} & {}_{\zeta}^{e}G_{21}^{2} & {}_{\zeta}^{e}G_{22}^{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^{e}p_1^{1} \\ {}^{e}p_2^{1} \\ {}^{e}p_1^{2} \\ {}^{e}p_2^{2} \end{Bmatrix}$$

Assim, tomando como referência a matriz H, que é obtida da integração de p_{ij}^* ao longo de um elemento de contorno:

$${}_{\zeta}^{e}H_{ij}^{K}$$

Onde *e* é o elemento integrado, *K* é o ponto nodal no elemento (inicial ou final), *i* e *j* são as direções do diádico e ζ é o ponto fonte. O mesmo ocorre para a matriz G.

É importante ressaltar que há equações singulares sendo integradas nesse processo, porém, demonstra-se que essas integrais não são singulares. Alguns detalhes do procedimento de integração não serão apresentados nesse trabalho, mas eles podem ser encontrados na tese de VALOTO (2011).

5.5.2. Montagem do sistema matricial

Substituindo 5-26e 5-27 em 5-13 tem-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{C}(\zeta_i)\mathbf{u}(\zeta_i)+\sum_{j=1}^{Ne}\left(\int_{\Gamma_j}\mathbf{p}^{*}\mathbf{N}d\Gamma\right)\mathbf{u}^{(e)}=\sum_{j=1}^{Ne}\left(\int_{\Gamma_j}\mathbf{u}^{*}\mathbf{N}d\Gamma\right)\mathbf{p}^{(e)}$$

Equação (5-36)

Durante a montagem do sistema de equações indicado em 5-36, cada uma das integrais será calculada numericamente. Este cálculo se dá através da integração numérica unidimensional de Gauss, que estabelece:

$$\int_{-1}^{1} f(\eta)d\eta = \sum_{i=1}^{P} f(\eta_i)w_i \qquad \text{Equação (5-37)}$$

Onde η_i é a coordenada adimensional do i-ésimo ponto de integração, w_i é o fator de peso associado ao ponto i, e P é o número total de pontos de integração utilizado.

Assim, cada integral da equação 5-36 pode ser calculada como se segue:

$$\int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \mathbf{N} d\Gamma = \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \mathbf{N} \quad |\mathbf{J}| \quad d\eta \cong \sum_{k=1}^{NPI} |\mathbf{J}|_k \, w_k \mathbf{N}_k \mathbf{p}_k^* \qquad \text{Equação (5-38)}$$

$$\int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \mathbf{N} d\Gamma = \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \mathbf{N} \quad |\mathbf{J}| \quad d\eta \cong \sum_{k=1}^{NPI} |\mathbf{J}|_k \, w_k \mathbf{N}_k \mathbf{u}_k^* \qquad \text{Equação (5-39)}$$

Onde NPI são o número de pontos de integração de Gauss.

A equação integral discretizada é aplicada repetidamente, considerando o ponto ζ situado coincidentemente com todos os pontos nodais existentes. Um sistema de 2t equações algébricas é gerado e envolve os 2t valores nodais de deslocamento e força de superfície.

Agora, define-se:

$$\sum_{j=1}^{Ne} \left(\int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \mathbf{N} d\Gamma_e \right) \mathbf{u}^e = \sum_{j=1}^{Ne} \mathbf{h}^e \mathbf{u}^e \qquad \text{Equação (5-40)}$$

$$\sum_{j=1}^{Ne} \left(\int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \mathbf{N} d\Gamma_e \right) \mathbf{p}^e = \sum_{j=1}^{Ne} \mathbf{g}^e \mathbf{p}^e \qquad \text{Equação (5-41)}$$

Substituindo 5-40 e 7-6 em 5-36:

$$\mathbf{C}(\zeta_i)\mathbf{u}(\zeta_i) + \sum_{j=1}^{Ne} \mathbf{h}^e \mathbf{u}^e = \sum_{j=1}^{Ne} \mathbf{g}^e \mathbf{p}^e \qquad \text{Equação (5-42)}$$

Pode-se, então resumir as equações de cada ponto ζ numa forma matricial:

$$\left(\mathbf{C} + \hat{\mathbf{H}}\right)\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{p} \qquad \text{Equação (5-43)}$$

Na expressão anterior, os vetores **u** e **p** contêm os valores de deslocamento e forças de superfície em todos os pontos nodais. A matriz **C** é quase diagonal (banda pequena), e pode ser incorporada a $\hat{\mathbf{H}}$ para formar:

$$\mathbf{Hu}=\mathbf{Gp} \qquad \text{Equação (5-44)}$$

Com t valores prescrito na equação 5-44 são obtidos os outros t desconhecidos.

Capítulo 6- Estudo de Casos

Neste capítulo serão apresentados problemas de carregamento de vigas que são comumente encontrados na engenharia. Esses casos são resolvidos analiticamente usando a resistência dos materiais e a teoria da elasticidade (caso for aplicável).

Toma-se nota que nem todos os problemas podem ser simplesmente simulados por um método numérico, visto que forças como vetores não se manifestam de fato como tal numa situação real. O que se encontra num contato entre elementos são tensões, e como corpos, eles se deformam mutualmente.

Porém, para a análise em métodos numéricos, considera-se como se as forças de superfície manifestassem pelo contato com um corpo infinitamente rígido. E para simular um carregamento concentrado, normalmente se considera uma força de superfície que está imposta em uma pequena área.

6.1. Análise de tensões e deslocamentos para uma viga bi apoiada com flexão pura

6.1.1. Pela Resistência dos Materiais

Este é o caso mais simples examinado pela teoria. A figura 6-1 ilustra o problema.

Numa viga submetida a uma flexão pura observam-se a seguintes condições de contorno:

$$V(0) = 0 \qquad \text{Condição (6-1)}$$

$$V(L) = 0 \qquad \text{Condição (6-2)}$$

$$M(0) = M \qquad \text{Condição (6-3)}$$

$$M(L) = M \qquad \text{Condição (6-4)}$$

Também sabe-se como condições de deslocamento:

$$v(0) = 0 \qquad \text{Condição (6-5)}$$

$$v(L) = 0 \qquad \text{Condição (6-6)}$$

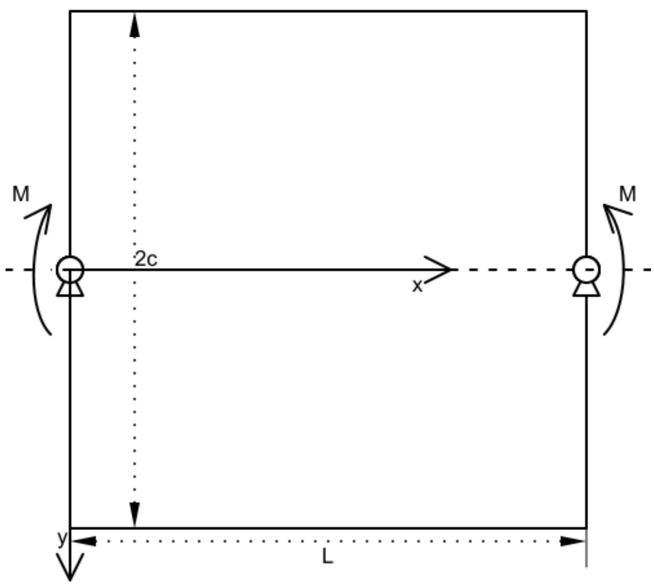

Figura 6-1: Viga bi apoiada com flexão pura

Na figura 6-2 a seguir vê-se a distribuição do diagrama de momento fletor. O diagrama de esforço cortante é nulo.

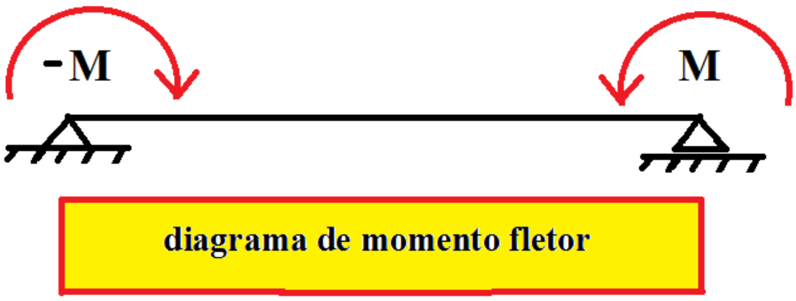

Figura 6-2:Diagrama de momento fletor para viga sob flexão pura.

Resolvendo as equações 4-1e 4-2com essas condições, se obtém:

$$V(x) = 0 \qquad \text{Equação (6-1)}$$

$$M(x) = M \qquad \text{Equação (6-2)}$$

É importante destacar que existe um momento constante distribuído ao longo da direção horizontal e a forma com que ele é imposto não é discutido na teoria da Resistência dos Materiais. Assim, já se percebe que pode haver diferenças significativas entre o modelo matemático admitido e o problema real que é examinado, particularmente no que diz respeito à imposição de condições de contorno e carregamentos localizados.

Substituindo 6-2 em 4-7 e 6-1 em 4-9, respectivamente:

$$\sigma_{xx} = \frac{My}{I} \qquad \text{Equação (6-3)}$$

$$\sigma_{xy} = 0 \qquad \text{Equação (6-4)}$$

Substituindo 6-1 em 4-10:

$$\sigma_{yy} = \int_{y}^{c} \frac{\partial}{\partial x} V(x) \frac{3}{4bc^3} [c^2 - y^2] dy \ ; onde \ \frac{\partial}{\partial x} V(x) = 0$$

$$\sigma_{yy} = 0 \qquad \text{Equação (6-5)}$$

Com base nos dados obtidos, apenas é possível observar carregamento horizontal sofrido pela viga.

Para a flecha desse carregamento:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{EI}(M)$$

Integrando duas vezes:

$$v = \frac{1}{EI}\left(\frac{Mx^2}{2}\right) + C_1 x + C_2$$

Com base nas condições de contorno, obtém-se como constantes:

$$C_1 = -\frac{ML}{2EI}$$

$$C_2 = 0$$

Logo:

$$v = \frac{1}{EI}\left(\frac{Mx^2}{2} - \frac{MLx}{2}\right) \qquad \text{Equação (6-6)}$$

Essa equação exprime a flechas na situação proposta nessa seção.

6.1.2. Pela Teoria da Elasticidade

Na seção 6.1.1 esse sistema foi analisado pela Resistência dos Materiais. Porém, nessa seção, aplica-se o equacionamento da Teoria da Elasticidade para resolvê-lo. O sistema consiste numa viga carregada com momentos fletores e fixada em pinos localizados no meio da seção transversal. Note que o sistema analisado teve suas coordenadas referenciais alteradas facilitar a solução do problema. O sistema está ilustrado na figura 6-3.

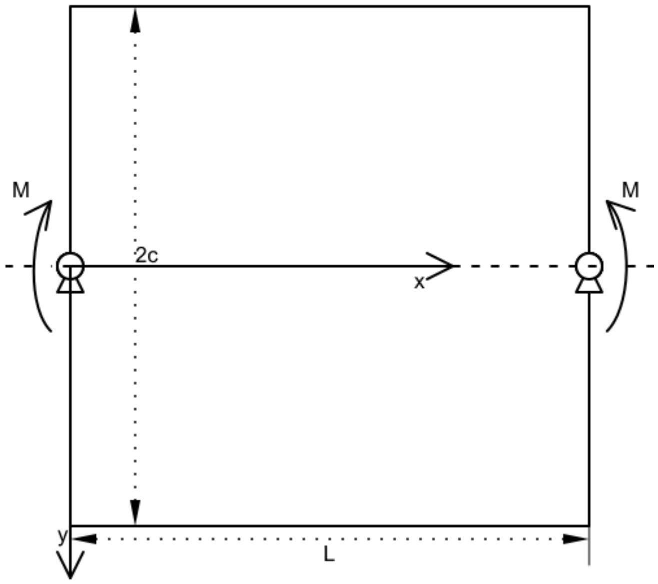

Figura 6-3: Viga bi apoiada sujeita a momentos fletores nas extremidades.

Nesse sistema são feitas as seguintes condições de contorno:

$$\sigma_y(x, c) = 0 \qquad \text{Condição (6-7)}$$

$$\sigma_{xy}(x, c) = 0 \qquad \text{Condição (6-8)}$$

$$\sigma_y(x, -c) = 0 \qquad \text{Condição (6-9)}$$

$$\sigma_{xy}(x, -c) = 0 \qquad \text{Condição (6-10)}$$

$$\sigma_{xy}(L/2, y) = 0 \qquad \text{Condição (6-11)}$$

$$\int \sigma_{xx}(L/2, y) y dy = -M \qquad \text{Condição (6-12)}$$

$$\sigma_{xy}(-L/2, y) = 0 \qquad \text{Condição (6-13)}$$

$$\int \sigma_{xx}(-L/2, y) y dy = -M \qquad \text{Condição (6-14)}$$

$$u(-L/2{,}0) = 0 \qquad \text{Condição (6-15)}$$

$$u(L/2{,}0) = 0 \qquad \text{Condição (6-16)}$$

$$v(-L/2{,}0) = 0 \qquad \text{Condição (6-17)}$$

Para obter o carregamento desse problema, apenas é necessário utilizar a equação 3-18, considerando $a_3=b_3=c_3=0$.

Obtêm-se, assim, as seguintes equações de distribuição de tensões:

$$\sigma_x = d_3 y \qquad \text{Equação (6-7)}$$

$$\sigma_y = 0 \qquad \text{Equação (6-8)}$$

$$\sigma_{xy} = 0 \qquad \text{Equação (6-9)}$$

Aplicando a condição 6-12, encontra-se o valor de d_3:

$$d_3 = -\frac{M}{I} \qquad \text{Equação (6-10)}$$

Lembrando que $\frac{2bc^3}{3} = I$ onde I é o momento de inercia. A distribuição de tensões horizontais fica igual à da resistência dos materiais:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \qquad \text{Equação (6-11)}$$

Substituindo na equação 6-46 e 6-47 as equações 6-11 e 6-8 obtêm-se:

$$u = -\frac{Mxy}{IE} + f(y) \qquad \text{Equação (6-12)}$$

$$v = -\frac{\nu M y^2}{2IE} + g(x) \qquad \text{Equação (6-13)}$$

Para obter as funções f(y) e g(x) substitui-se 6-12, 6-13 e 6-9 em 6-48:

$$-\frac{Mx}{IE} + \frac{\partial f}{\partial y} + 0 + \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{Mx}{IE} \qquad \text{Equação (6-14)}$$

Separando os termos dependentes de *x*, de *y* e independentes da equação 6-14 e realizando integrações indefinidas chega-se a três conclusões:

$$f(y) = C_1 \qquad \text{Equação (6-15)}$$

$$g(x) = \frac{Mx^2}{2IE} + C_2 \qquad \text{Equação (6-16)}$$

Onde C_1 e C_2 são constantes que serão definidas a seguir.

Substituindo a equação 6-15 na equação 6-12 e substituindo a equação 6-16 na equação 6-13 encontra-se:

$$u = -\frac{Mxy}{IE} + C_1 \qquad \text{Equação } (6\text{-}17)$$

$$v = -\frac{\nu My^2}{2IE} + \frac{Mx^2}{2IE} + C_2 \qquad \text{Equação } (6\text{-}18)$$

Aplicando a condição 6-15 em 6-17:

$$C_1 = 0 \qquad \text{Equação } (6\text{-}19)$$

E finalmente aplicando a condição 6-17 em 6-18:

$$C_2 = -\frac{ML^2}{8IE} \qquad \text{Equação } (6\text{-}20)$$

Conclui-se que:

$$u(x,y) = \frac{-M.x.y}{E.I} \qquad \text{Equação } (6\text{-}21)$$

$$v(x,y) = \frac{-M}{E.I}.\left(\nu.\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{l^2}{8}\right) \qquad \text{Equação } (6\text{-}22)$$

Assim, têm-se os valores de flecha e deslocamento horizontal observadas em uma viga sob flexão pura.

6.2. Análise de tensões e deslocamentos para uma viga bi apoiada com carregamento constante

6.2.1. Pela Resistência dos Materiais

O problema está ilustrado na figura 6-4.

Em uma viga bi apoiada, existem as seguintes condições de contorno:

$$V(0) = \frac{qL}{2} \qquad \text{Condição } (6\text{-}18)$$

$$V(L) = -\frac{qL}{2}$$ Condição (6-19)

$$M(0) = 0$$ Condição (6-20)

$$M(L) = 0$$ Condição (6-21)

Também sabe-se como condições de deslocamento:

$$v(0) = 0$$ Condição (6-22)

$$v(L) = 0$$ Condição (6-23)

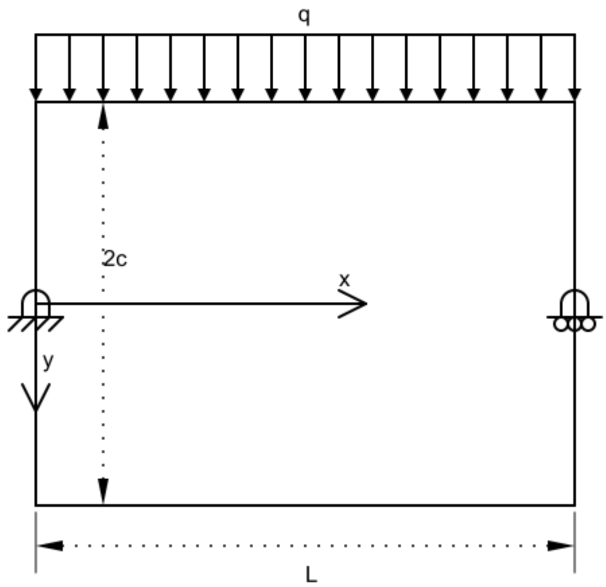

Figura 6-4:Viga bi apoiada com carregamento constante.

Os diagramas de esforço agora são dados por uma função quadrática, no caso do momento fletor, enquanto o esforço cortante é linear, conforme figura6-5.

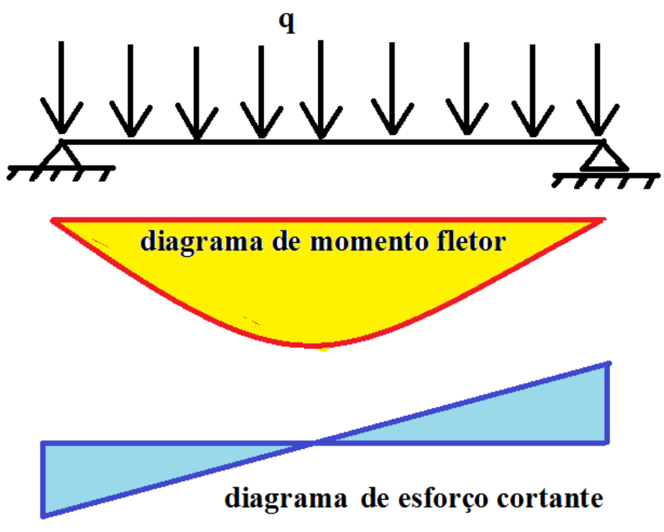

Figura 6-5:Momento fletor e esforço cortante para viga biapoiada sob carregamento constante.

Segundo ODEN e RIPPERGER (1981), resolve-se as equações 4-1 e 4-2 com essas condições, obtendo:

$$V(x) = \frac{qL}{2} - qx \quad \text{Equação (6-23)}$$

$$M(x) = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \quad \text{Equação (6-24)}$$

Substituindo 6-24 em 4-7 e 6-23 em 4-9, respectivamente:

$$\sigma_{xx} = \frac{3qyL^2}{4bc^3}\left(\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right) \quad \text{Equação (6-25)}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{3qL}{4bc}\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{L}\right)\left(1 - \left(\frac{y}{c}\right)^2\right) \quad \text{Equação (6-26)}$$

Com base nas equações 4-11, 6-25 e 6-26, o valor máximo das tensões σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy} são:

$$(\sigma_{xx})max = \frac{3qL^2}{16bc^2} \quad \text{Equação (6-27)}$$

$$(\sigma_{yy})max = -\frac{q}{b} \quad \text{Equação (6-28)}$$

$$(\sigma_{xy})max = \frac{3qL}{8bc} \quad \text{Equação (6-29)}$$

Com isso pode-se determinar a razão entre as tensões máximas:

$$\left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}}\right)max = 2\frac{c}{L} \quad \text{Equação (6-30)}$$

$$\left(\frac{\sigma_{yy}}{\sigma_{xx}}\right)max = -\frac{16}{3}\left(\frac{c}{L}\right)^2 \quad \text{Equação (6-31)}$$

Ao se considerar desprezíveis valores com diferença de duas ordens de grandeza entre si, as tensões verticais serão desconsideradas quando a razão entre altura e comprimento ($2c/L$) for menor que 0,086. Para as tensões de cisalhamento, esse valor será de 0,01.

Para o cálculo das deflexões, utiliza-se a equação 4-15:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{EI}\left(\frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}\right) \quad \text{Equação (6-32)}$$

Integrando duas vezes:

$$v = \frac{1}{EI}\left(\frac{qLx^3}{12} - \frac{qx^4}{24}\right) + C_1x + C_2$$

Com base nas condições de contorno, encontra-se:

$$C_1 = -\frac{1}{EI}\frac{qL^3}{24}$$

$$C_2 = 0$$

Logo:

$$v = \frac{1}{EI}\left(\frac{qLx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} - \frac{qL^3x}{24}\right)$$ Equação (6-3 3)

Essa fórmula determina a flecha de uma viga biapoiada para um carregamento constante, conforme a teoria de resistência dos materiais.

6.2.2. Pela Teoria da Elasticidade

Nessa seção, considera-se a teoria da elasticidade. As coordenadas de referência foram alteradas para facilitar os cálculos. O carregamento no qual está submetido é constante ao longo da face superior e possuirá uma intensidade q. O problema foi ilustrado na figura 6-6.

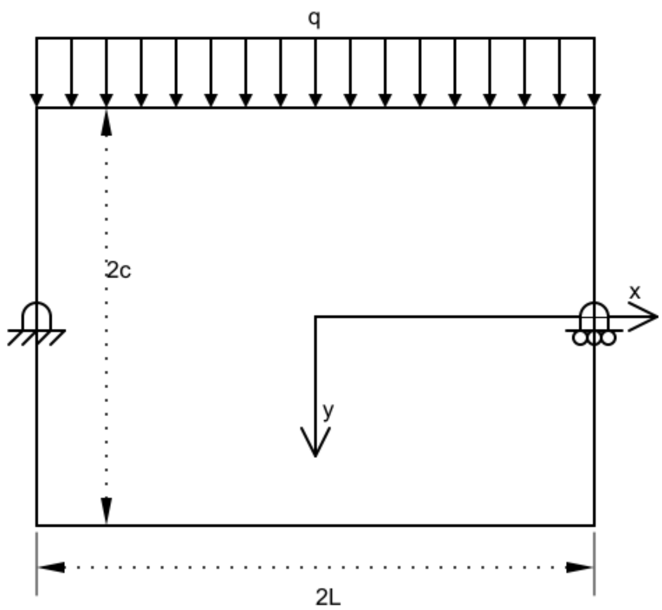

Figura 6-6: Barra biapoiada com carregamento constante sob novas coordenadas referenciais.

Considera-se como condições de contorno:

$$\sigma_y(x,c) = 0 \qquad \text{Condição} \quad (\ 6\text{-}24\ )$$

$$\sigma_{xy}(x,c) = 0 \qquad \text{Condição} \quad (\ 6\text{-}25\ )$$

$$\sigma_y(x,-c) = -q \qquad \text{Condição} \quad (\ 6\text{-}26\ )$$

$$\sigma_{xy}(x,-c) = 0 \qquad \text{Condição} \quad (\ 6\text{-}27\ )$$

$$\int \sigma_x(L,y)dy = 0 \qquad \text{Condição} \quad (\ 6\text{-}28\ )$$

$$\int \sigma_{xy}(L,y)dy = -qL \qquad \text{Condição} \quad (\ 6\text{-}29\ )$$

$$\int \sigma_x(L,y)ydy = 0 \qquad \text{Condição} \quad (\ 6\text{-}30\ )$$

$$\int \sigma_x(-L,y)dy = 0 \qquad \text{Condição} \quad (\ 6\text{-}31\ )$$

$$\int \sigma_{xy}(-L,y)dy = qL \qquad \text{Condição} \quad (\ 6\text{-}32\ )$$

$$\int \sigma_x(-L,y)ydy = 0 \qquad \text{Condição} \quad (\ 6\text{-}33\ )$$

Também deve se considerar as seguintes condições de deslocamento:

$$u(-L,0) = 0 \qquad \text{Condição} \quad (\ 6\text{-}34\ )$$

$$u(L,0) = 0 \qquad \text{Condição} \quad (\ 6\text{-}35\ )$$

$$v(-L,0)=0 \qquad \text{Condição (6-36)}$$

Para descobrir o comportamento do sistema, serão utilizadas as seguintes funções de tensão apresentadas na seção 3.2:

- Utiliza-se a equação 3-17 considerando $b_2=c_2=0$. Assim essa função é apenas capaz de gerar compressão ao sistema.
- Utiliza-se a equação 3-18 considerando $a_3=c_3=d_3=0$. Isso causa um padrão de carregamento que está ilustrado na figura 3-2.
- Utiliza-se a equação 3-20 considerando $a_5=b_5=c_5=0$. Isso causa um padrão de carregamento que está ilustrado na figura 3-4 e 3-5.

Serão aplicadas nessas equações as condições de contorno para assim encontrar a solução do problema. Conforme as considerações feitas, chega-se a seguinte distribuição de tensões:

$$\sigma_x = d_5\left(x^2y-\frac{2}{3}y^3\right) \qquad \text{Equação (6-34)}$$

$$\sigma_y = \frac{d_5}{3}y^3+b_3y+a_2 \qquad \text{Equação (6-35)}$$

$$\sigma_{xy} = -d_5xy^2-b_3x \qquad \text{Equação (6-36)}$$

Aplicando as condições 6-24 a 6-27 encontra-se:

$$a_2=-\frac{q}{2} \qquad \text{Equação (6-37)}$$

$$b_3=\frac{3}{4}\frac{q}{c} \qquad \text{Equação (6-38)}$$

$$d_5=-\frac{3}{4}\frac{q}{c^3} \qquad \text{Equação (6-39)}$$

Lembrando que $\frac{2c^3}{3}=I$ onde I é o momento de inercia e substituindo as constantes nas equações de 3-31 a 3-33 obtêm-se:

$$\sigma_x=-\frac{q}{2I}\left(x^2y-\frac{2}{3}y^3\right) \qquad \text{Equação (6-40)}$$

$$\sigma_y=-\frac{q}{2I}\left(\frac{1}{3}y^3-c^2y+\frac{2}{3}c^3\right) \qquad \text{Equação (6-41)}$$

$$\sigma_{xy}=-\frac{q}{2I}(c^2-y^2)x \qquad \text{Equação (6-42)}$$

As equações 6-40 a 6-42 também satisfazem as demais condições de contorno, com exceção das condições 6-30 e 6-32. Para resolver esse problema é preciso superpor as tensões da equação 3-18 novamente, porém agora será assumido apenas que d_3 seja diferente de zero.

O valor dessa constante é obtido aplicando a condição 6-30:

$$\int \sigma_x y dy = \int \left[-\frac{q}{2I}\left(x^2y - \frac{2}{3}y^3\right) + d_3 y\right] y dy = 0 \qquad \text{Equação (6-43)}$$

$$d_3 = \frac{3}{4}\frac{q}{c}\left(\frac{L^2}{c^2} - \frac{2}{5}\right) \qquad \text{Equação (6-44)}$$

Logo:

$$\sigma_x = \frac{q}{2I}(L^2 - x^2)y + \frac{q}{2I}\left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2y\right) \qquad \text{Equação (6-45)}$$

Com o valor das tensões obtidas, agora os deslocamentos podem ser estimados. Para isso usam-se as equações 6-46 a 6-48:

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} = \varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right] \qquad \text{Equação (6-46)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right] \qquad \text{Equação (6-47)}$$

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{xy} = -\frac{2(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \qquad \text{Equação (6-48)}$$

Substituindo nas equações 6-46 e 6-47 as equações 6-45, 6-41 e 6-42 obtêm-se:

$$u = \frac{q}{2IE}\left[\left(L^2x - \frac{x^3}{3}\right)y + x\left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2y\right) + \nu x\left(\frac{1}{3}y^3 - c^2y + \frac{2}{3}c^3\right)\right] + f(y) \qquad \text{Equação (6-49)}$$

$$v = -\frac{q}{2IE}\left\{\frac{y^4}{12} - \frac{c^2y^2}{2} + \frac{2}{3}c^3y - \nu\left[\left(\frac{2}{5}c^2 - L^2\right)\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}c^2x^2 + \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{y^4}{6}\right]\right\} + g(x) \qquad \text{Equação (6-50)}$$

Para obter as funções f(y) e g(x) substitui-se 6-42, 6-49 e 6-50 em 6-48:

$$-\frac{2(1+\nu)q}{2IE}(c^2 - y^2)x = +\frac{\delta f}{\delta y} + \frac{\delta g}{\delta x} - \frac{q}{2IE}\left(\left(\frac{2}{5}c^2 - L^2\right)x + \frac{1}{3}x^3 - 2xy^2 - 2\nu(c^2 - y^2)x\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{q}{2IE}\left(2c^2x-\left(\frac{2}{5}c^2-L^2\right)x-\frac{1}{3}x^3\right)$$ Equação (6-51)

A partir da equação 6-51 chega-se a duas conclusões:

$$f(y)=\gamma$$ Equação (6-52)

$$g(x)=-\frac{q}{2IE}\left(\left(\frac{8}{5}c^2+L^2\right)\frac{x^2}{2}-\frac{1}{12}x^4\right)+\delta$$ Equação (6-53)

Aplicando a condição 6-34 na equação 6-49 e substituindo na mesma a equação 6-52 tem-se:

$$\frac{q}{2IE}\left[\left(L^2(-L)-\frac{(-L)^3}{3}\right)0+(-L)\left(\frac{2}{3}0^3-\frac{2}{5}c^20\right)\right.$$
$$\left.+\nu(-L)\left(\frac{1}{3}0^3-c^20+\frac{2}{3}c^3\right)\right]+\gamma=0$$

$$\gamma=+\frac{q\nu Lc^3}{3IE}$$

$$\gamma=\frac{q\nu L}{2E}$$ Equação (6-54)

Aplicando a condição 6-36 na equação 6-50 e substituindo na mesma a equação 6-52 tem-se:

$$-\frac{q}{2IE}\left\{\frac{0^4}{12}-\frac{c^2 0^2}{2}+\frac{2}{3}c^3 0 - \nu\left[\left(\frac{2}{5}c^2-L^2\right)\frac{0^2}{2}-\frac{1}{2}c^2(-L)^2+\frac{1}{2}(-L)^2 0^2-\frac{0^4}{6}\right]\right\} - \frac{q}{2IE}\left(\left(\frac{8}{5}c^2+L^2\right)\frac{(-L)^2}{2}-\frac{1}{12}(-L)^4\right)+\delta=0$$

$$\delta=\frac{5}{24}\frac{qL^4}{EI}\left[1+\frac{12}{5}\frac{c^2}{L^2}\left(\frac{4}{5}+\frac{\nu}{2}\right)\right] \qquad \text{Equação} \quad (\quad 6\text{-}55 \quad)$$

6.3. Análise de tensões e deslocamentos para uma viga engastada com carregamento constante

6.3.1. Pela Resistência dos Materiais

O problema pode ser representado segundo figura 6-7.

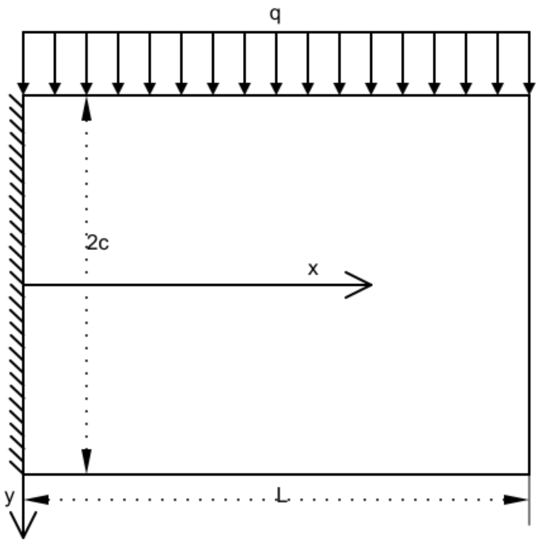

Figura 6-7: Viga engastada com carregamento constante.

A representação desse problema segundo a distribuição dos momentos fletores e esforços cortantes é mostrado na figura 6-8.

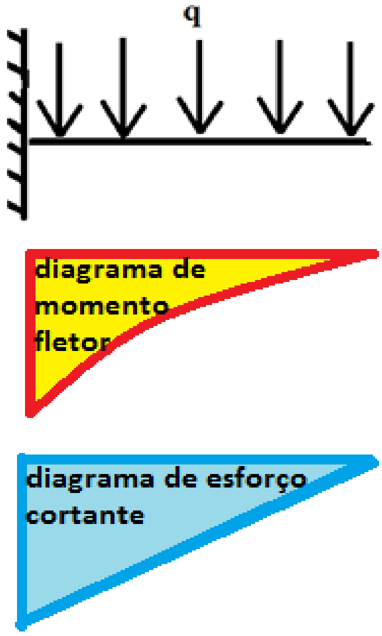

Figura 6-8: Momento fletor e esforço cortante para viga engastada sob carregamento constante.

Em uma viga engastada, podem-se aplicar as seguintes condições de contorno:

$$V(0) = qL \qquad \text{Condição (6-37)}$$

$$V(L) = 0 \qquad \text{Condição (6-38)}$$

$$M(0) = -\frac{qL^2}{2} \qquad \text{Condição (6-39)}$$

$$M(L) = 0 \qquad \text{Condição (6-40)}$$

Também sabe-se por ser uma viga engastada:

$$v(0) = 0 \qquad \text{Condição (6-41)}$$

$$\frac{dv}{dx}(0) = 0 \qquad \text{Condição (6-42)}$$

Resolvendo as equações 4-1 e 4-2 com essas condições, se obtém:

$$V(x) = qL - qx \qquad \text{Equação (6-56)}$$

$$M(x) = qLx - \frac{qx^2}{2} - \frac{qL^2}{2} \qquad \text{Equação (6-57)}$$

Substituindo 6-57 em 4-7 e 6-56 em 4-9, respectivamente:

$$\sigma_{xx} = \frac{3qyL^2}{4bc^3}\left(2\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^2 - 1\right) \qquad \text{Equação (6-58)}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{3qL}{4bc}\left(1 - \frac{x}{L}\right)\left(1 - \left(\frac{y}{c}\right)^2\right) \qquad \text{Equação (6-59)}$$

Com base nas equações 4-11, 6-58 e 6-59, o valor máximo das tensões σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy}

são:

$$(\sigma_{xx})max = -\frac{3qL^2}{4bc^2} \quad \text{Equação (6-60)}$$

$$(\sigma_{yy})max = -\frac{q}{b} \quad \text{Equação (6-61)}$$

$$(\sigma_{xy})max = \frac{3qL}{4bc} \quad \text{Equação (6-62)}$$

Com isso pode-se determinar a razão entre as tensões máximas:

$$\left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}}\right) max = \frac{c}{L} \quad \text{Equação (6-63)}$$

$$\left(\frac{\sigma_{yy}}{\sigma_{xx}}\right) max = \frac{4}{3}\left(\frac{c}{L}\right)^2 \quad \text{Equação (6-64)}$$

Ao se considerar desprezíveis valores com diferença de duas ordens de grandeza entre si, as tensões verticais serão desconsideradas quando a razão entre altura e comprimento ($2c/L$) for menor que 0,173. Para as tensões de cisalhamento, esse valor será de 0,02.

Para o cálculo das deflexões, utiliza-se a equação 4-15:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{EI}\left(qLx - \frac{qx^2}{2} - \frac{qL^2}{2}\right)$$

Integrando duas vezes:

$$v = \frac{1}{EI}\left(\frac{qLx^3}{12} - \frac{qx^4}{24}\right) + C_1x + C_2$$

Com base nas condições de contorno, encontra-se:

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = 0$$

Logo:

$$v = \frac{1}{EI}\left(\frac{qLx^3}{6} - \frac{qx^4}{24} - \frac{qL^2x^2}{4}\right) \quad \text{Equação (6-65)}$$

Essa fórmula determina a flecha de uma viga engastada para um carregamento constante, conforme a teoria de resistência dos materiais.

6.3.2. Pela Teoria da Elasticidade

O problema aqui analisado foi resolvido usando a resistência dos materiais na seção acima.

Para uma abordagem utilizando a teoria da elasticidade, foram feitas algumas pequenas alterações na localização de algumas condições de contorno, a fim de facilitar a resolução. O problema modificado está ilustrado na figura6-9.

Observa-se as seguinte condições de contorno:

$$\sigma_y(x,c) = 0 \qquad \text{Condição (6-43)}$$

$$\sigma_{xy}(x,c) = 0 \qquad \text{Condição (6-44)}$$

$$\sigma_y(x,-c) = -q \qquad \text{Condição (6-45)}$$

$$\sigma_{xy}(x,-c) = 0 \qquad \text{Condição (6-46)}$$

$$\int \sigma_x(L,y)dy = 0 \qquad \text{Condição (6-47)}$$

$$\int \sigma_{xy}(L,y)dy = -qL \qquad \text{Condição (6-48)}$$

$$\int \sigma_x(L,y)ydy = 0 \qquad \text{Condição (6-49)}$$

$$\int \sigma_x(0,y)dy = 0 \qquad \text{Condição (6-50)}$$

$$\int \sigma_{xy}(0,y)dy = 0 \qquad \text{Condição (6-51)}$$

$$\int \sigma_x(0,y)ydy = 0 \qquad \text{Condição (6-52)}$$

Também deve se considerar as seguintes condições de deslocamento:

$$u(0,-c) = 0 \qquad \text{Condição (6-53)}$$

$$v(0,0) = 0 \qquad \text{Condição (6-54)}$$

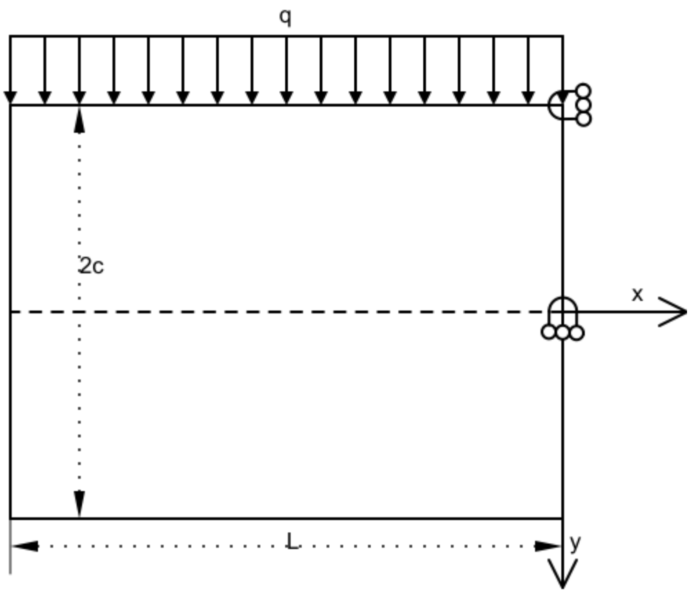

Figura 6-9: Viga engastada com carregamento constante.

Para descobrir o comportamento do sistema, serão utilizadas as seguintes funções de tensão apresentadas na seção 3.2:

- Utiliza-se a equação 3-17 considerando $b_2=c_2=0$. Assim essa função é apenas capaz de gerar compressão ao sistema.
- Utiliza-se a equação 3-18 considerando $a_3=c_3=d_3=0$. Isso causa um padrão de carregamento que está ilustrado na figura3-2.
- Utiliza-se a equação 3-20 considerando $a_5=b_5=c_5=0$. Isso causa um padrão de carregamento que está ilustrado na figura 3-4 e 3-5.

As considerações feitas geram uma distribuição de tensões conforme equações subsequentes:

$$\sigma_x = d_5\left(x^2y - \frac{2}{3}y^3\right) \qquad \text{Equação (6-66)}$$

$$\sigma_y = \frac{d_5}{3}y^3 + b_3y + a_2 \qquad \text{Equação (6-67)}$$

$$\sigma_{xy} = -d_5xy^2 - b_3x \qquad \text{Equação (6-68)}$$

Aplicando as condições 6-43 a 6-46 encontra-se:

$$a_2 = -\frac{q}{2} \qquad \text{Equação (6-69)}$$

$$b_3 = \frac{3}{4}\frac{q}{c} \qquad \text{Equação (6-70)}$$

$$d_5 = -\frac{3}{4}\frac{q}{c^3} \qquad \text{Equação (6-71)}$$

Lembrando que $\frac{2c^3}{3} = I$ onde I é o momento de inercia e substituindo as constantes nas equações de 6-66 a 6-68 obtêm-se:

$$\sigma_x = -\frac{q}{2I}\left(x^2y - \frac{2}{3}y^3\right) \qquad \text{Equação} \quad (\quad 6\text{-}72 \quad)$$

$$\sigma_y = -\frac{q}{2I}\left(\frac{1}{3}y^3 - c^2y + \frac{2}{3}c^3\right) \qquad \text{Equação} \quad (\quad 6\text{-}73 \quad)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{q}{2I}(c^2 - y^2)x \qquad \text{Equação} \quad (\quad 6\text{-}74 \quad)$$

As equações 6-72 a 6-74não satisfazem as condições de contorno 6-49 e 6-52, mas satisfazem as demais. Para resolver esse problema é preciso superpor as tensões da equação 3-18 novamente, porém agora será assumido apenas que d_3 seja diferente de zero.

O valor dessa constante é obtido aplicando a condição 6-49:

$$\int \sigma_x y dy = \int \left[-\frac{q}{2I}\left(x^2y - \frac{2}{3}y^3\right) + d_3 y\right] y dy = 0 \qquad \text{Equação} \quad (\quad 6\text{-}75 \quad)$$

$$d_3 = \frac{3}{4}\frac{q}{c}\left(\frac{L^2}{c^2} - \frac{2}{5}\right) \qquad \text{Equação} \quad (\quad 6\text{-}76 \quad)$$

Logo:

$$\sigma_x = \frac{q}{2I}(L^2 - x^2)y + \frac{q}{2I}\left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2y\right) \qquad \text{Equação} \quad (\quad 6\text{-}77 \quad)$$

Com o valor das tensões obtidas, agora os deslocamentos podem ser estimados. Para isso usam-se as equações 6-46 a 6-48.

Substituindo nas equações 6-46 e 6-47 as equações 6-77, 6-73 e 6-74 obtêm-se:

$$\begin{aligned} u = \frac{q}{2IE}\Bigg[\left(L^2x - \frac{x^3}{3}\right)y + x\left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2y\right) \\ + \nu x\left(\frac{1}{3}y^3 - c^2y + \frac{2}{3}c^3\right)\Bigg] + f(y) \end{aligned} \qquad \text{Equação} \quad (\quad 6\text{-}78 \quad)$$

$$\begin{aligned} v = -\frac{q}{2IE}\Bigg\{\frac{y^4}{12} - \frac{c^2y^2}{2} + \frac{2}{3}c^3y \\ - \nu\left[\left(\frac{2}{5}c^2 - L^2\right)\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}c^2x^2 + \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{y^4}{6}\right]\Bigg\} \\ + g(x) \end{aligned} \qquad \text{Equação} \quad (\quad 6\text{-}79 \quad)$$

Para obter as funções f(y) e g(x) substitui-se 6-74, 6-78 e 6-79 em 6-48:

$$-\frac{2(1+\nu)q}{2IE}(c^2-y^2)x = +\frac{\delta f}{\delta y}+\frac{\delta g}{\delta x}$$
$$-\frac{q}{2IE}\left(\left(\frac{2}{5}c^2-L^2\right)x+\frac{1}{3}x^3-2xy^2\right.$$
$$\left.-2\nu(c^2-y^2)x\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{q}{2IE}\left(2c^2x-\left(\frac{2}{5}c^2-L^2\right)x-\frac{1}{3}x^3\right) \qquad \text{Equação (6-80)}$$

A partir da equação 6-80 chega-se a duas conclusões:

$$f(y)=\gamma \qquad \text{Equação (6-81)}$$

$$g(x)=-\frac{q}{2IE}\left(\left(\frac{8}{5}c^2+L^2\right)\frac{x^2}{2}-\frac{1}{12}x^4\right)+\delta \qquad \text{Equação (6-82)}$$

Aplicando a condição 6-53na equação 6-78 e substituindo na mesma a equação 6-81 tem-se:

$$\frac{q}{2IE}\left[\left(L^2(0)-\frac{(0)^3}{3}\right)0+(0)\left(\frac{2}{3}0^3-\frac{2}{5}c^2 0\right)\right.$$
$$\left.+\nu(0)\left(\frac{1}{3}0^3-c^2 0+\frac{2}{3}c^3\right)\right]+\gamma=0$$

$$\gamma=0 \qquad \text{Equação (6-83)}$$

Aplicando a condição 6-54 na equação 6-79 e substituindo na mesma a equação 6-81 tem-se:

$$-\frac{q}{2IE}\left\{\frac{0^4}{12}-\frac{c^2 0^2}{2}+\frac{2}{3}c^3 0\right.$$
$$\left.-\nu\left[\left(\frac{2}{5}c^2-0^2\right)\frac{0^2}{2}-\frac{1}{2}c^2(0)^2+\frac{1}{2}(0)^2 0^2-\frac{0^4}{6}\right]\right\}$$
$$-\frac{q}{2IE}\left(\left(\frac{8}{5}c^2+L^2\right)\frac{(0)^2}{2}-\frac{1}{12}(0)^4\right)+\delta=0$$

$$\delta=0 \qquad \text{Equação (6-84)}$$

6.4. Análise de tensões e deslocamentos para uma viga bi apoiada com carga concentrada

6.4.1. Pela Resistência dos Materiais

O problema está ilustrado na figura abaixo:

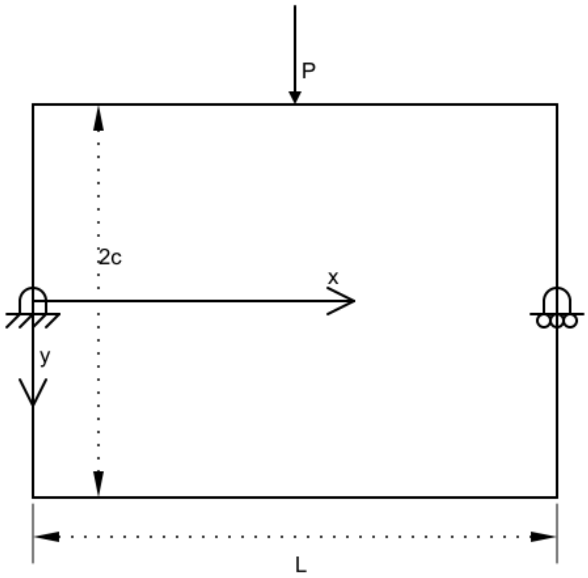

Figura 6-10: Viga bi apoiada comcarga constante

Numa viga submetida a uma flexão pura observar-se a seguintes condições de contorno:

$$V(0) = \frac{P}{2}$$ Condição (6-55)

$$V(L) = -\frac{P}{2}$$ Condição (6-56)

$$M(0) = 0$$ Condição (6-57)

$$M(L/2) = \frac{PL}{4}$$ Condição (6-58)

$$M(L) = 0$$ Condição (6-59)

Também encontram-se as seguintes condições de deslocamento:

$$v(0) = 0$$ Condição (6-60)

$$v(L) = 0$$ Condição (6-61)

A figura 6-11ilustra os diagramas de esforço simples, que neste caso já são mais elaborados.

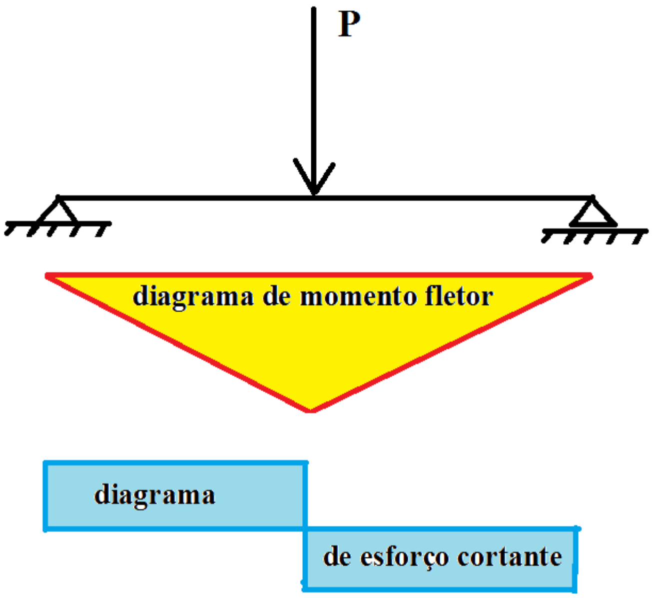

Figura 6-11: Momento fletor e esforço cortante para viga biapoiada sob carregamento concentrado.

Com as funções são descontinuas, será necessário usar as funções de Macaulay(HIBBELER, 2003) para expressar o carregamento e o momento ao longo da horizontal:

$$V(x) = \frac{P}{2}\langle x\rangle^0 - P\langle x - \frac{L}{2}\rangle^0 + \frac{P}{2}\langle x - L\rangle^0$$ Equação (6-85)

$$M(x) = \frac{P}{2}\langle x\rangle^1 - P\langle x - \frac{L}{2}\rangle^1 + \frac{P}{2}\langle x - L\rangle^1$$ Equação (6-86)

Substituindo 6-86 em 4-7 e 6-85 em 4-9, respectivamente:

$$\sigma_{xx} = \frac{Py}{I}\left(\frac{\langle x\rangle^1}{2} - \langle x - \frac{L}{2}\rangle^1 + \frac{\langle x - L\rangle^1}{2}\right)$$ Equação (6-87)

$$\sigma_{xy} = \frac{3P}{4bc}\left(1 - \left(\frac{y}{c}\right)^2\right)\left(\frac{\langle x\rangle^0}{2} - \langle x - \frac{L}{2}\rangle^0 + \frac{\langle x - L\rangle^0}{2}\right)$$ Equação (6-88)

Substituindo 6-85 em 4-10:

$$\sigma_{yy} = -\frac{P}{b}\left[\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\left(\frac{y}{c}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{y}{c}\right)^3\right]\left(\frac{\langle x\rangle^{-1}}{2} - \langle x - \frac{L}{2}\rangle^{-1} + \frac{\langle x - L\rangle^{-1}}{2}\right)$$ Equação (6-89)

Com base nas equações 6-87, 6-88 e 6-89, o valor máximo das tensões σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy} são:

$$(\sigma_{xx})max = \frac{3PL}{8bc^2} \quad \text{Equação (6-90)}$$

$$(\sigma_{yy})max = -\frac{P_L}{b} \quad \text{Equação (6-91)}$$

$$(\sigma_{xy})max = \frac{3P}{8bc} \quad \text{Equação (6-92)}$$

Observa-se que apenas para a equação 6-91 a unidade de P_L é força por comprimento.

Com isso pode-se determinar a razão entre as tensões máximas:

$$\left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}}\right)max = \frac{c}{L} \quad \text{Equação (6-93)}$$

$$\left(\frac{\sigma_{yy}}{\sigma_{xx}}\right)max = \frac{8}{3}\frac{c^2}{L}\frac{P_L}{P} \quad \text{Equação (6-94)}$$

Ao se considerar desprezíveis valores com diferença de duas ordens de grandeza entre si, as tensões de cisalhamento serão desconsideradas quando a razão entre altura e comprimento ($2c/L$) for menor que 0,02.

Porém, com base na equação 6-94, as tensões de compressão não podem ser desprezadas caso a distribuição da força P ao longo do comprimento for muito concentrada. Será necessário, portanto, uma análise do comportamento dessa carga ao longo do eixo horizontal.

Para avaliar o deslocamento da linha elástica, a equação 4-15 será usada:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{EI}\left(\frac{P}{2}\langle x\rangle^1 - P\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle^1 + \frac{P}{2}\langle x - L\rangle^1\right)$$

Integrando duas vezes:

$$v = \frac{1}{EI}\left(\frac{P}{12}\langle x\rangle^3 - \frac{P}{6}\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle^3 + \frac{P}{12}\langle x - L\rangle^3\right) + C_1x + C_2$$

Com as condições de deslocamento, chega-se a:

$$C_1 = -\frac{PL^2}{16EI}$$

$$C_2 = 0$$

Então:

$$v = \frac{1}{EI}\left(\frac{P}{12}\langle x\rangle^3 - \frac{P}{6}\langle x - \frac{L}{2}\rangle^3 + \frac{P}{12}\langle x - L\rangle^3 - \frac{PL^2}{16EI}x\right) \qquad \text{Equação (6-95)}$$

Essa expressão define a flecha sofrida por uma viga biapoiada submetida a um carregamento concentrado, segundo a resistência dos materiais.

6.4.2. Pela Teoria da Elasticidade

Infelizmente, não é possível implementar de modo viável uma condição de carregamento concentrado na Teoria da Elasticidade com condições de contorno tais como se apresentam no problema proposto. Na literatura encontrada, a teoria da elasticidade consegue avaliar os efeitos localizados de uma força aplicada em arestas horizontais opostas, gerando tensões infinitas em um ponto especifico. A solução apresentada por Timoshenko utiliza funções na forma de somatórios infinitos de senos e cossenos, mas gera reações binárias nos apoios.

Cabe ressaltar que é possível fazer a análise para uma viga engastada, visto que é possível prescrever uma distribuição de tensão cisalhante na face livre que irá simular satisfatoriamente uma carga concentrada na vertical.

6.5. Análise de tensões e deslocamentos para uma viga engastada com carregamento concentrado

6.5.1. Pela Resistência dos Materiais

O problema está ilustrado na figura 6-12:

Nessa situação, podem-se aplicar as seguintes condições de contorno:

$$V(0) = P \qquad \text{Condição (6-62)}$$

$$V(L) = P \qquad \text{Condição (6-63)}$$

$$M(0) = -PL \qquad \text{Condição (6-64)}$$

$$M(L) = 0 \qquad \text{Condição (6-65)}$$

Também sabe-se por ser uma viga engastada:

$$v(0) = 0 \qquad \text{Condição (6-66)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0) = 0 \qquad \text{Condição (6-67)}$$

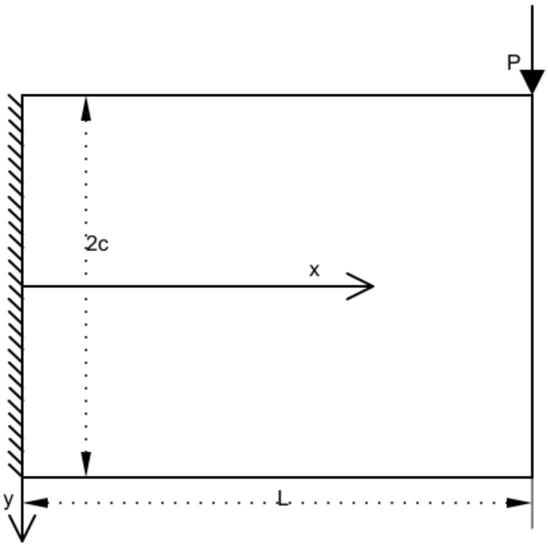

Figura 6-12: Viga engastada com carregamento concentrado.

Em termos de esforços simples, a distribuição dos momentos fletores e esforços cortantes é similar à do exemplo anterior, conforme mostra a figura 6-13.

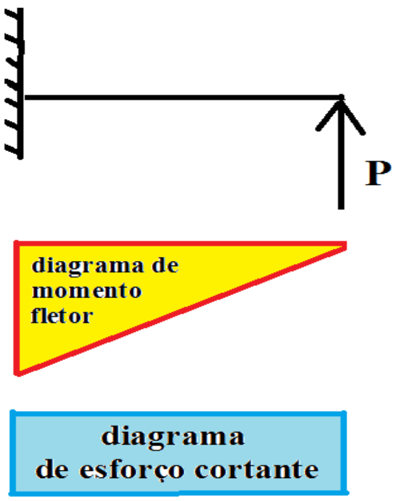

Figura 6-13: Momento fletor e esforço cortante para viga engastada sob carregamento concentrado.

Resolvendo as equações 4-1e 4-2com essas condições, se obtém:

$$V(x) = P \qquad \text{Equação (6-96)}$$

$$M(x) = P(x - L) \qquad \text{Equação (6-97)}$$

Substituindo 6-97 em 4-7 e 6-96 em 4-9, respectivamente:

$$\sigma_{xx} = \frac{3Py}{2bc^3}(x - L) \qquad \text{Equação (6-98)}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{3P}{4bc}\left(1 - \left(\frac{y}{c}\right)^2\right) \qquad \text{Equação (6-99)}$$

Substituindo 6-96 em 4-10:

$$\sigma_{yy} = \int_y^c \frac{\delta}{\delta x} V(x) \frac{3}{4bc^3}[c^2 - y^2]dy = \int_y^c 0 \frac{3}{4bc^3}[c^2 - y^2]dy$$

$$\sigma_{yy} = 0 \qquad \text{Equação (6-100)}$$

Com base nas equações 6-98, 6-99 e 6-100, o valor máximo das tensões σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy} são:

$$(\sigma_{xx})max = \frac{3PL}{2bc^2} \qquad \text{Equação (6-101)}$$

$$(\sigma_{yy})max = 0 \qquad \text{Equação (6-102)}$$

$$(\sigma_{xy})max = \frac{3P}{4bc} \qquad \text{Equação (6-103)}$$

Com isso pode-se determinar a razão entre as tensões máximas:

$$\left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}}\right)max = \frac{c}{2L} \qquad \text{Equação (6-104)}$$

$$\left(\frac{\sigma_{yy}}{\sigma_{xx}}\right)max = 0 \qquad \text{Equação (6-105)}$$

Ao se considerar desprezíveis valores com diferença de duas ordens de grandeza entre si, as tensões de cisalhamento serão desconsideradas quando a razão entre altura e comprimento ($2c/L$) for menor que 0,04. As tensões verticais são ausentes nesse sistema.

Para se obter os deslocamentos verticais, utiliza-se da equação 4-15:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{EI}P(x - L)$$

Integrando-se duas vezes:

$$v = \frac{1}{EI}\left(P\left(\frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2}\right)\right) + C_1 x + C_2$$

Com base nas condições de deslocamento, conclui-se:

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = 0$$

Então:

$$v = \frac{1}{EI}\left(P\left(\frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2}\right)\right) \qquad \text{Equação} \quad (6\text{-}106)$$

Essa expressão define a flecha provocada na viga engastada por um esforço concentrado e sua extremidade.

6.5.2. Pela Teoria da Elasticidade

Será realizada a resolução do mesmo problema apresentado na seção anterior, porém serão utilizadas as equações da teoria da elasticidade.

Um elemento está vinculado de forma a se comportar como uma viga engastada. O carregamento no qual está submetido é concentrado em sua extremidade esquerda e possui uma intensidade P. O problema foi ilustrado na figura 6-14.

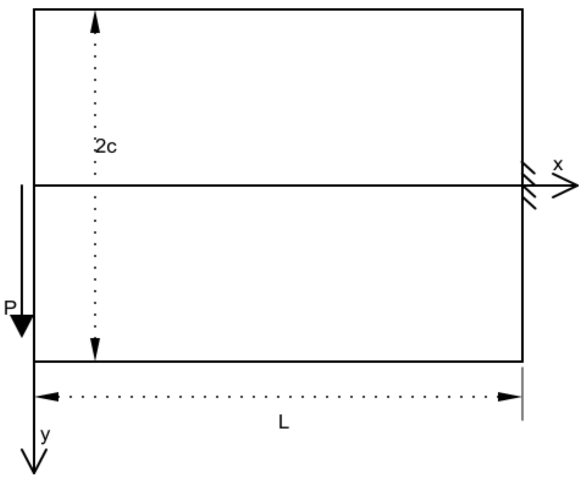

Figura 6-14: Viga engastada com carregamento concentrado.

Para obter uma solução analítica para o problema, são aplicadas as seguintes condições de tensão no contorno:

$$\sigma_y(x,c) = 0 \qquad \text{Condição (6-68)}$$

$$\sigma_{xy}(x,c) = 0 \qquad \text{Condição (6-69)}$$

$$\sigma_y(x,-c) = 0 \qquad \text{Condição (6-70)}$$

$$\sigma_{xy}(x,-c) = 0 \qquad \text{Condição (6-71)}$$

$$\sigma_x(0,y) = 0 \qquad \text{Condição (6-72)}$$

$$\int \sigma_{xy}(0,y)dy = P \qquad \text{Condição (6-73)}$$

E ainda aplicam-se as seguintes condições:

$$u(L,0) = 0 \qquad \text{Condição (6-74)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(L,0) = 0 \qquad \text{Condição (6-75)}$$

$$v(L,0) = 0 \qquad \text{Condição (6-76)}$$

Com as condições de contornos explicitadas, o comportamento do sistema será obtido usando as seguintes funções de tensão apresentadas na seção 3.2:

- Utiliza-se a equação 3-17considerando a_2=c_2=0. Assim essa função é apenas capaz de gerar cisalhamento ao sistema.
- Para a equação 3-19 será considerado a_4=b_4=c_4=0. Isso causa um padrão de carregamento que está ilustrado na figura 6-15.

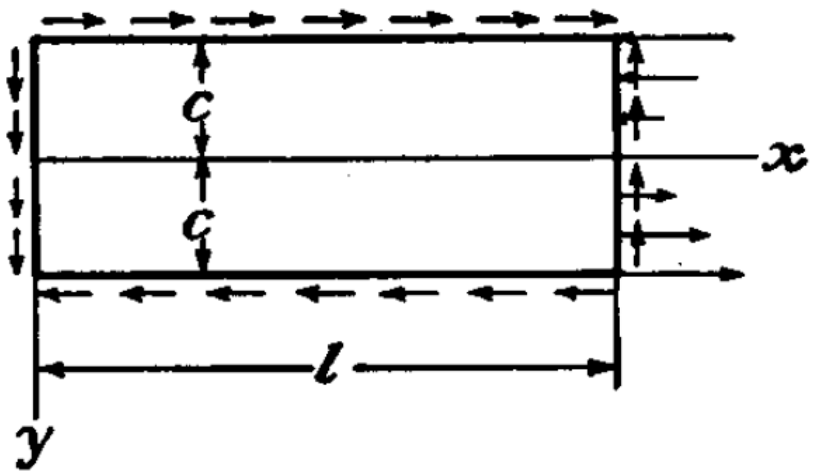

Figura 6-15: Tensões geradas pela função de tensão polinomial de quarta ordem com todas as constantes, menos d_4, são iguais à zero.

Com essas hipóteses feitas chega-se a seguinte distribuição de tensões:

$$\sigma_x = d_4 xy \qquad \text{Equação (6-107)}$$

$$\sigma_y = 0 \qquad \text{Equação (6-108)}$$

$$\sigma_{xy} = -b_2 - \frac{d_4}{2} y^2 \qquad \text{Equação (6-109)}$$

Aplicam-se as condições 6-69 ou 6-71 para encontrar d_4 em função de b_2 e finaliza-se obtendo b_2 com a condição 6-73. Logo:

$$b_2 = \frac{3}{4}\frac{P}{bc} \qquad \text{Equação (6-110)}$$

$$d_4 = -\frac{3}{2}\frac{P}{bc^3} \qquad \text{Equação (6-111)}$$

Lembrando que $\frac{2bc^3}{3} = I$ onde I é o momento de inercia e substituindo as constantes obtidas nas equações 6-107 a 6-109 obtêm-se:

$$\sigma_x = -\frac{Pxy}{I} \qquad \text{Equação (6-112)}$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{P}{2I}(c^2 - y^2) \qquad \text{Equação (6-113)}$$

Com o valor das tensões obtidas, agora os deslocamentos podem ser estimados. Para isso usam-se as equações 6-46 a 6-48.

Substituindo nas equações 6-46 e 6-47 as equações 6-112 e 6-113 obtêm-se:

$$u = -\frac{Px^2y}{2IE} + f(y) \qquad \text{Equação (6-114)}$$

$$v = \frac{\nu Pxy^2}{2IE} + g(x) \qquad \text{Equação (6-115)}$$

Para obter as funções f(y) e g(x) substitui-se 6-114, 6-115 e 6-113 em 6-48:

$$-\frac{Px^2}{2IE} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\nu Py^2}{2IE} + \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{P}{2IG}(c^2 - y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{Px^2}{2IE} - \frac{\nu Py^2}{2IE} - \frac{P}{2IG}(c^2 - y^2) \qquad \text{Equação (6-116)}$$

Separando os termos dependentes de *x*, dependentes de *y* e independentes da equação 6-116 e realizando integrações indefinidas chega-se a três conclusões:

$$C_1 + C_2 = -\frac{Pc^2}{2IG} \qquad \text{Equação (6-117)}$$

$$f(y) = -\frac{\nu P y^3}{6IE} + \frac{P y^3}{6IG} + C_1 y + C_3 \qquad \text{Equação (6-118)}$$

$$g(x) = \frac{P x^3}{6IE} + C_2 x + C_4 \qquad \text{Equação (6-119)}$$

Onde C_1, C_2, C_3 e C_4 são constantes que serão definidas a seguir.

Substituindo a equação 6-118 na equação 6-114 e substituindo a equação 6-119 na equação 6-115 encontra-se:

$$u = -\frac{P x^2 y}{2IE} - \frac{\nu P y^3}{6IE} + \frac{P y^3}{6IG} + C_1 y + C_3 \qquad \text{Equação (6-120)}$$

$$v = \frac{\nu P x y^2}{2IE} + \frac{P x^3}{6IE} + C_2 x + C_4 \qquad \text{Equação (6-121)}$$

Aplicando a condição 6-74 na equação 6-120 tem-se:

$$u = -\frac{P x^2 0}{2IE} - \frac{\nu P 0^3}{6IE} + \frac{P 0^3}{6IG} + C_1 0 + C_3 \qquad \text{Equação (6-122)}$$

$$C_3 = 0 \qquad \text{Equação (6-123)}$$

Aplicando a condição 6-76 obtém-se C_2 em função de C_4 e com a condição 6-75 encontra-se o valor de C_2:

$$v = \frac{\nu P L 0^2}{2IE} + \frac{P L^3}{6IE} + C_2 L + C_4 = 0 \qquad \text{Equação (6-124)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\nu P 0^2}{2IE} + \frac{P L^2}{2IE} + C_2 = 0 \qquad \text{Equação (6-125)}$$

$$C_2 = -\frac{P L^2}{2IE} \qquad \text{Equação (6-126)}$$

Para finalizar, utiliza-se a equação 6-117 para assim obter C_1 e C_4:

$$C_1 = \frac{P L^2}{2IE} - \frac{P c^2}{2IG} \qquad \text{Equação (6-127)}$$

$$C_4 = \frac{P L^3}{3IE} \qquad \text{Equação (6-128)}$$

Com isso, tem-se definidas as funções de deslocamento vertical e horizontal para uma viga engastada submetida a carregamento concentrado. Os valores das constantes não serão substituídos nas funções de deslocamento por suas expressões ficarem muito longas.

Capítulo 7- Simulações Numéricas

7.1. Avaliação das simplificações teóricas e das condições de contorno nos casos em estudo

A partir dos conteúdos expostos na seção 6 é possível afirmar que os valores obtidos das formulações encontradas através da Teoria da Elasticidade e da Resistência dos Materiais para tensões e deslocamento são fortemente vinculados não apenas às hipóteses feitas mas também às condições de contorno impostas. Considere, por exemplo, o caso da viga com carga concentrada em sua extremidade (seção 6.5). As fórmulas encontradas para esse caso só representam a solução exata caso os esforços cisalhantes na extremidade carregada apresentem uma distribuição parabólica conforme equação 6-113 (TIMOSHENKO; GOODIER, 1970).

Se essa hipótese não for respeitada, quais efeitos serão obtidos? No que um deslocamento prescrito num ponto indevido poderá afetar a flecha da viga carregada? Essas e outras perguntas serão respondidas da melhor maneira possível através de simulações com o Método dos Elementos de Contorno, cujo conteúdo foi o assunto abordado na seção 5 desse trabalho. A confiança na utilização do método é dada pela enorme quantidade de testes já realizados por diversos autores, que constam em ampla literatura (BREBBIA et al. , 1984) e também em diversos testes já realizados pelo autor deste trabalho (FREITAS et al. , 2013). Uma síntese destes resultados são apresentados no apêndice A e dão a devida credibilidade às comparações feitas com o MEC neste assunto.

Cabe ressaltar que esse trabalho não buscará esgotar todas as possíveis situações e considerações admitidas na análise de vigas que são imprecisas. O que se busca nessa seção é abordar algumas situações específicas de cada caso estudado na seção 6.

A viga na qual serão feitas as avaliações é um cubo com lados e módulo de Young unitários, além de possuir um coeficiente de Poisson igual a 0.3. Os valores dimensionais e as rigidezas utilizados na análise não afetam a aplicação do método, visto que tudo que precisa ser feito é ajustar o valor ou unidades do carregamento de maneira que os deslocamentos assim obtidos tenham valores práticos. Aqui optou-se por valores significativos o suficiente para serem corretamente avaliados. Já para o caso do coeficiente de Poisson, buscou-se adotar um valor que possa interferir diretamente nos resultados obtidos. Uma análise com seu valor nulo ou igual a 0.5 também poderia ser realizada, mas optou-se por não fazê-la, ficando a mesma uma proposta para futuros estudos.

O elemento estrutural é discretizado através de elementos de contorno, com 80 elementos nas fronteiras e 81 pontos internos. Daí resulta um sistema linear para ser resolvido, conforme mostrado na seção 5.

Pelas dimensões impostas, nota-se que a viga não é esbelta. O motivo disso está na análise das simplificações feitas na Resistência dos Materiais. Como foi mostrado nas várias subseções da seção 6, desprezar alguns efeitos de tensões em vigas é válido até um certo ponto dimensional, definido pela relação altura largura. Mas, o que ocorre se essa relação não for grande o suficiente para se ter segurança nessa simplificação?

É importante lembrar que não serão alteradas as soluções teóricas utilizadas para cada caso de carregamento (flexão pura, carregamento uniformemente distribuído, etc.) em cada mudança de condição de contorno. Por exemplo, mesmo que os apoios da viga fossem alterados para ficarem na extremidade superior da face transversal, a solução teórica que será usada para comparar os resultados continuará sendo aquela em que se considera que os apoios estão no meio da face transversal.

Também será possível comparar o efeito de algumas desconsiderações feitas na Resistência dos Materiais e feitas na Teoria da Elasticidade. Por exemplo, a tabela abaixo mostra de maneira comparativa as tensões obtidas para uma viga biapoiada com carregamento uniformemente distribuído, utilizando ambos os métodos (problema ilustrado na figura 6-4):

Para o campo de tensões os resultados coincidem, a menos da segunda parcela na expressão de σ_{xx} dada pela teoria da elasticidade. Este termo advém do efeito de σ_{yy} junto a σ_{xx}, pois promove compressão adicional às fibras da viga. Por serem apenas funções de y, no equilíbrio de forças a sua ação não afeta σ_{yy} (veja equações 3-1 e 3-2).

Tabela 7-1: Comparação entre os métodos para uma viga biapoiada com carregamento uniformemente distribuído ao longo da aresta horizontal superior.		
	Resistência dos Materiais	Teoria da Elasticidade
σxx	$\frac{q(l^2 - x^2)y}{2I}$	$\frac{q(L^2 - x^2)y}{2I} + \frac{q}{2I}\left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2y\right)$
σxy	$-\frac{q(c^2 - y^2)x}{2I}$	$-\frac{q(c^2 - y^2)x}{2I}$
σyy	$-\frac{q}{2I}\left(\frac{1}{3}y^3 - c^2y + \frac{2}{3}c^3\right)$	$-\frac{q}{2I}\left(\frac{1}{3}y^3 - c^2y + \frac{2}{3}c^3\right)$

Rigorosamente a solução apresentada por Timoshenko não seria comparável a um problema comum, pois é exigida um condição de contorno especial nos apoios com relação a distribuição de forças (um perfil especial para as tensões normais nas extremidades). Todavia, mostra-se que esta distribuição auto equilibrada só afeta as regiões próximas destes apoio, pois valores de tensão representativos encontram-se longe destes e tem magnitude bem superior(TIMOSHENKO; GOODIER, 1970). A realidade é que se comparam dois problemas diferentes. Se tivesse a solução da elasticidade que não exigisse uma distribuição tão especial, também tais resultados seriam diferentes daqueles dados pela Resistência dos Materiais.

7.2. Resultados para uma viga bi apoiada com flexão pura

Uma das condições que se nota na seção 6.1.2 é a fixação prescrita do deslocamento na linha de centro da viga. Apesar de não ser mencionada com rigor que a fixação deve ser no centro da seção transversal no estudo da Resistência dos Materiais (pois nesta teoria a análise é unidimensional apenas) essa condição de contorno é necessária para que as formulações obtidas em ambos os casos (Resistência e Teoria da Elasticidade) gerem valores mais compatíveis.

Utilizando os valores de dimensão e propriedade dos materiais descritas no início dessa seção, será prescrita uma carga de momento que equivale ao valor M ilustrado na figura 6-3. O valor dessa grandeza será de 0,5 para todas as análises aqui realizadas. A maneira como se prescreve essa carga se traduz numa distribuição linear de tensões compressivas e trativas, com simetria no centro de área da viga. A figura 7-1 ilustra o padrão descrito.

A avaliação será feita na alteração da condição de deslocamento prescrito. A situação tipo 1 corresponde ao caso da viga corretamente fixada. As outras condições do tipo 2 e 3 são feitas para caso a fixação seja na extremidade inferior e na extremidade superior, respectivamente. A figura 7-2 ilustra onde fica cada pino nas configurações mencionadas.

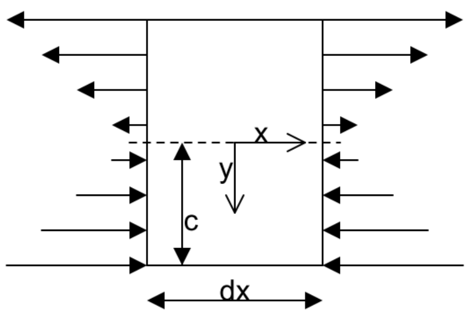

Figura 7-1:Tensões horizontais prescritas no problema.

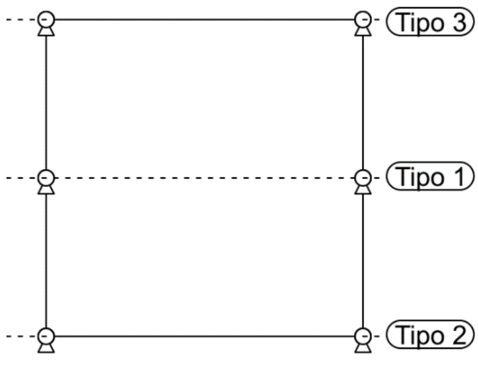

Figura 7-2:Condições de fixação na viga.

Os parâmetros analisados serão a flecha observada na linha neutra da viga e as tensões horizontais sentidas no centro do vão. Os valores obtidos são adimensionais, sendo genéricos quanto ao tipo de material e intensidade de carregamento.

7.2.1. Análise da Condição Tipo 1

Nessa situação, tanto os valores de flecha quanto os valores de tensão obtidos são congruentes entre todos os métodos, observando-se uma superposição das linhas traçadas no gráfico 7-1 e 7-2. Essa configuração mostra que caso os pinos forem postos no lugar correto, as formulações mostraram boa exatidão nos valores que fornecem.

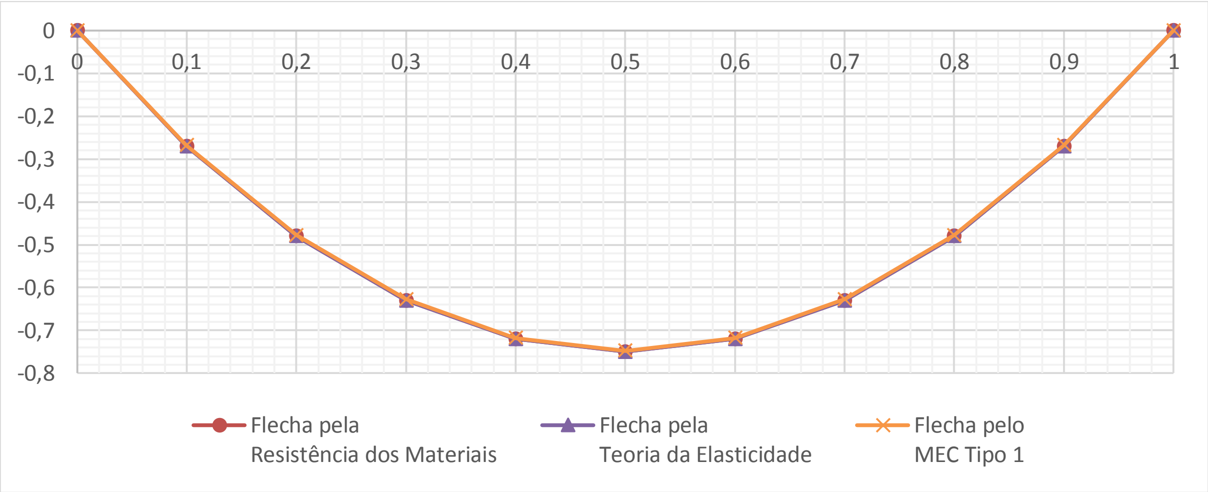

Gráfico 7-1: Flecha observada na viga sob flexão pura do tipo 1, 0.5 corresponde ao centro da viga.

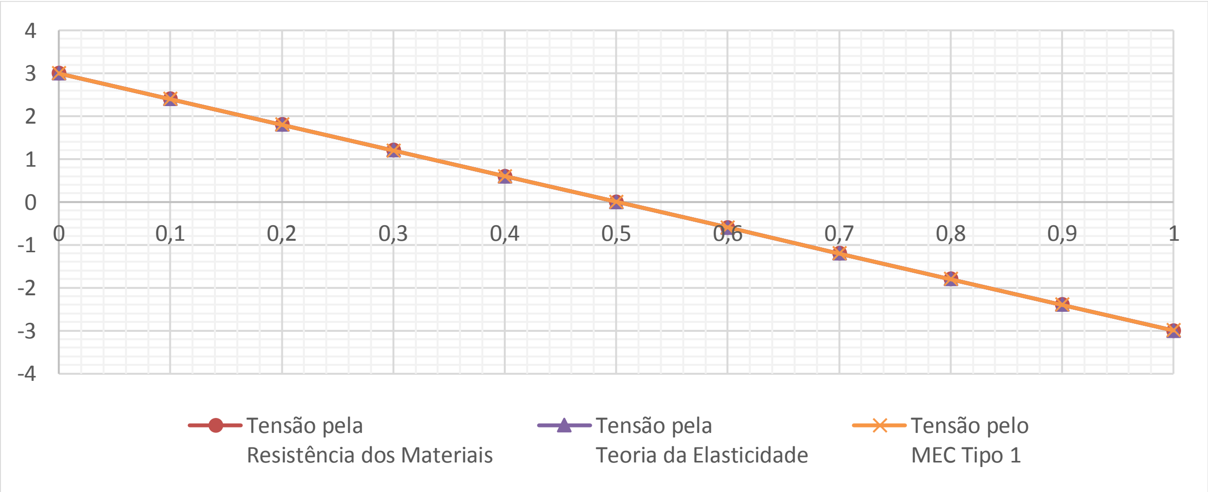

Gráfico 7-2: Tensão horizontal observada no centro do vão na viga sob flexão pura do tipo 1.

A viga mantém suas faces transversais retas e seus deslocamentos configuram uma situação vista em livros da Resistência dos Materiais. A figura 7-3 mostra a viga com todos os nós do MEC ilustrados em suas posições finais. É importante ressaltar que a figura não está em escala com os valores obtidos no programa, o objetivo dela é mostrar como ficou a aparência da viga após o carregamento.

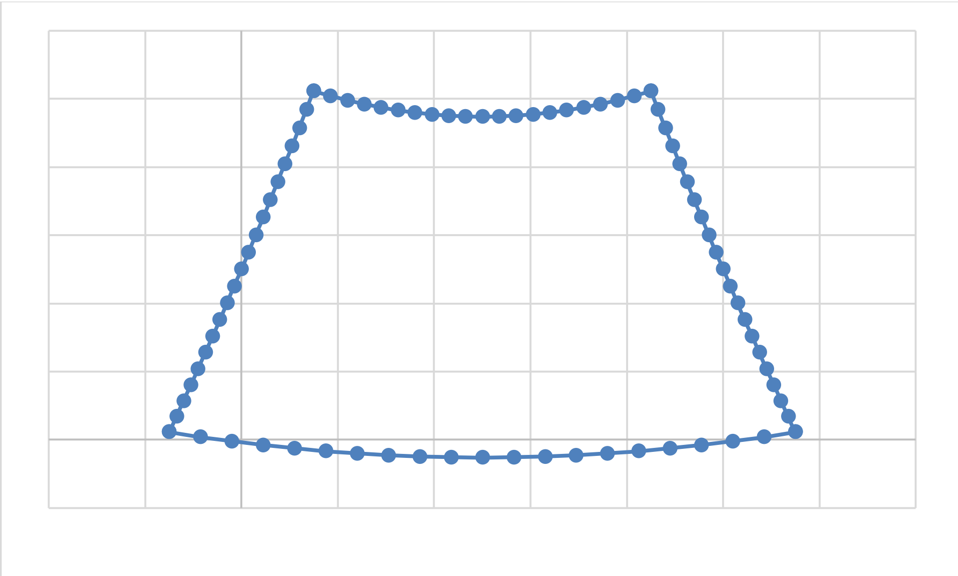

Figura 7-3:Viga Tipo 1 sob flexão pura.

7.2.2. Análise da Condição Tipo 2

Quando a viga fica com seus apoios impostos na extremidade inferior, o carregamento imposto irá causar reações nos apoios, visto que não se pode prescrever forças de superfície onde se prescrevem deslocamentos e vice-versa. A restrição vertical impede que as pontas se elevem como observado na figura7-3, ficando a peça com um característica peculiar na base, conforme figura7-4.

O gráfico 7-3 mostra que enquanto as flechas obtidas com a Resistência dos Materiais e a Teoria da Elasticidade permanecem sobrepostas, o método numérico mostra uma ligeira redução em sua curvatura, sendo mais fácil de observar a diferença entre as linhas no centro do vão. O motivo dessa mudança está no carregamento imposto ao elemento, que já não mais é simétrico em relação à linha de centro.

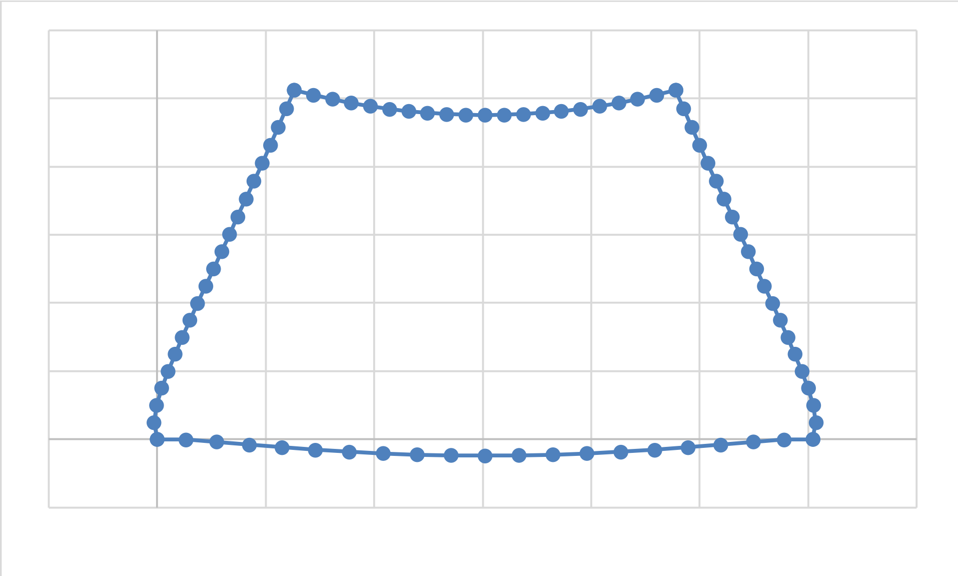

Figura 7-4: Viga Tipo 2 sob flexão pura

As tensões que antes permaneciam uniformes ao longo do vão foram desequilibradas pelo pinos posicionados nas novas localizações, ficando a parte inferior visualmente menos tracionada que na configuração tipo 1.

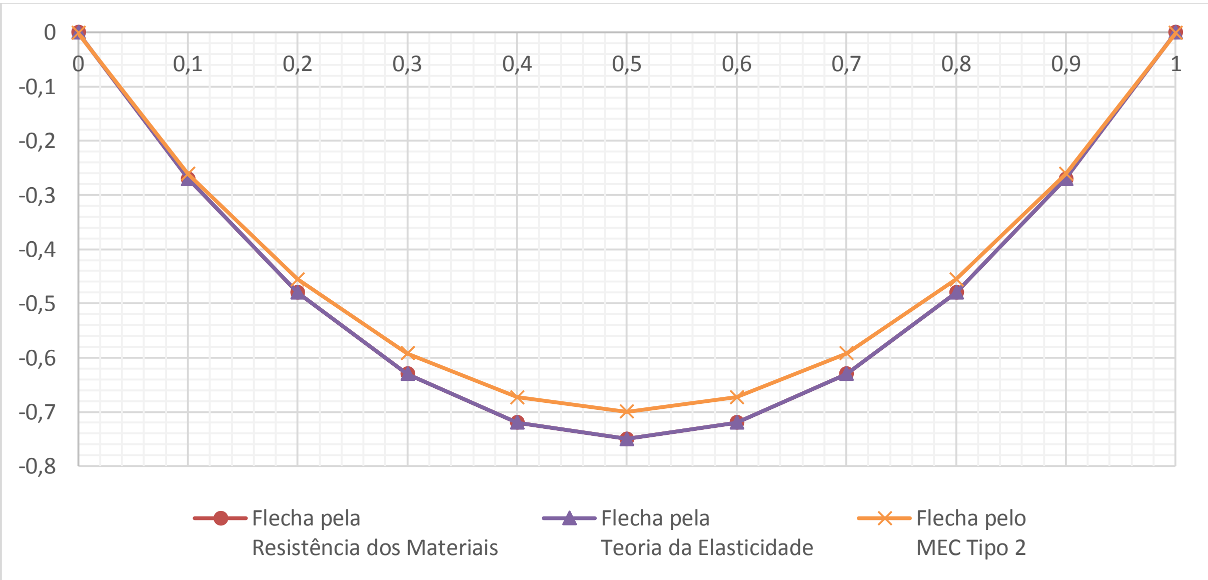

Gráfico 7-3: Flecha observada na viga sob flexão pura do tipo 2, 0.5 corresponde ao centro da viga.

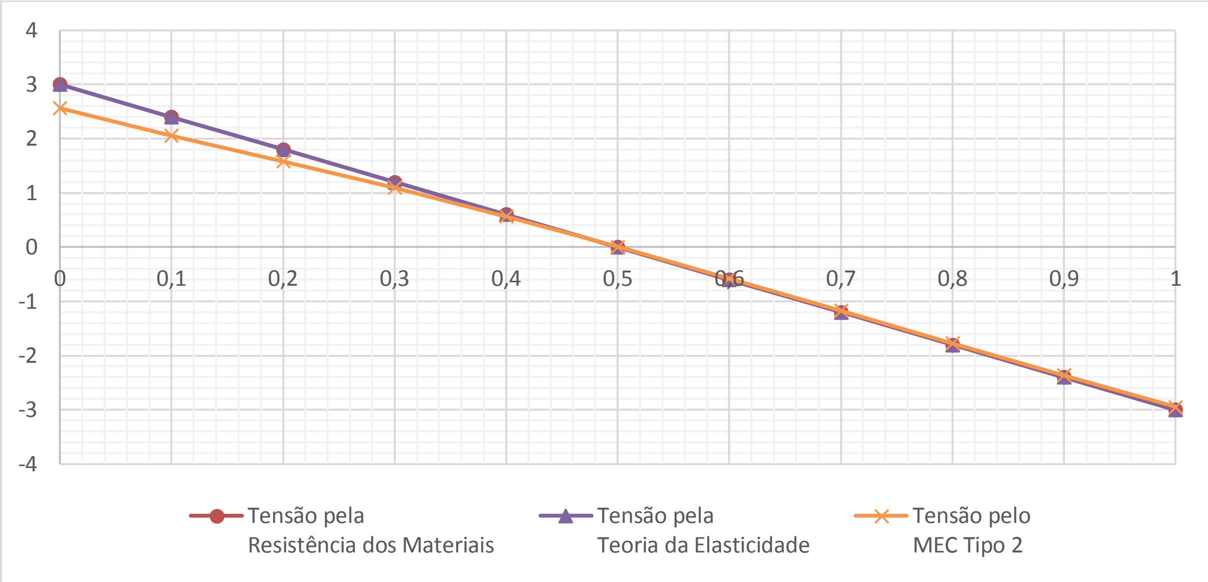

Gráfico 7-4: Tensão horizontal observada no centro do vão na viga sob flexão pura do tipo 2.

A mudança de localização dos pino já passa a causar discrepâncias entre a solução obtida com o MEC e os valores obtidos com as formulações existentes na seção 6.1. Porém, como a flexão pura é a situação que a Resistência do Materiais melhor modela, os resultados não apresentaram grandes discrepâncias.

7.2.3. Análise da Condição Tipo 3

Quando a situação passa ser da fixação da viga nas extremidades superiores, passa a se observar a mesma situação gerada na seção anterior, porém, agora é a parte comprimida que passa a apresentar um comportamento distinto do usualmente previsto pela teoria simplificada. Conforme já mencionado, não se pode prescrever para um mesmo ponto na mesma direção as forças de superfície e os deslocamentos. A figura 7-5 mostra como fica os nós do MEC ficaram dispostos sob a configuração do tipo 3.

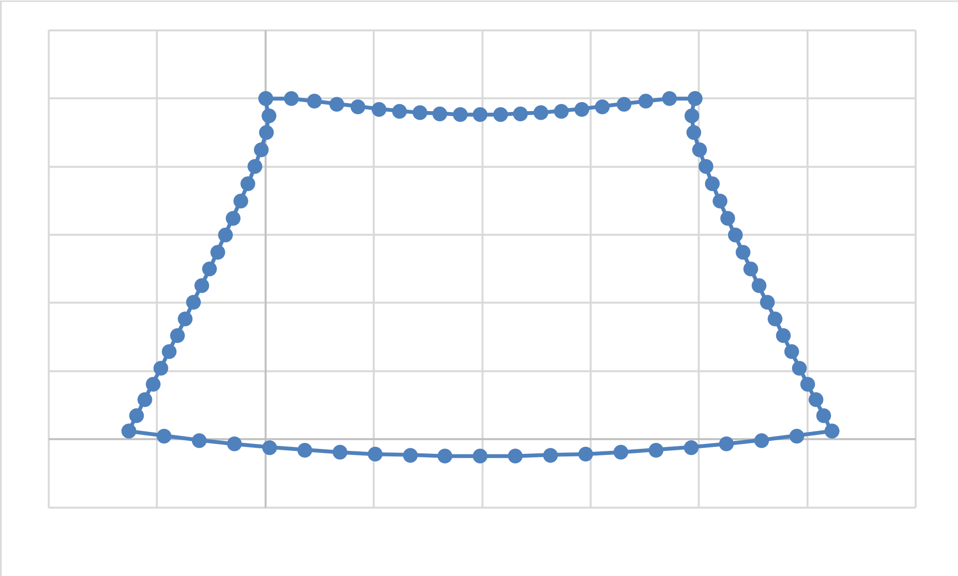

Figura 7-5: Viga Tipo 3 sob flexão pura

O desequilíbrio de tensões agora fica localizado na parte das fibras que estão comprimidas na parte superior. Essas tensões não conseguem gerar uma flecha de mesma intensidade que as obtidas nas formulações teóricas, mas fica com os mesmo valores obtidos na condição do tipo 2. Isso demonstra que ambas as partes das tensões fletoras, compressivas e trativas, são importantes para a flecha obtida por esse carregamento. O gráfico 7-5 mostra a flecha obtida na configuração do tipo 3.

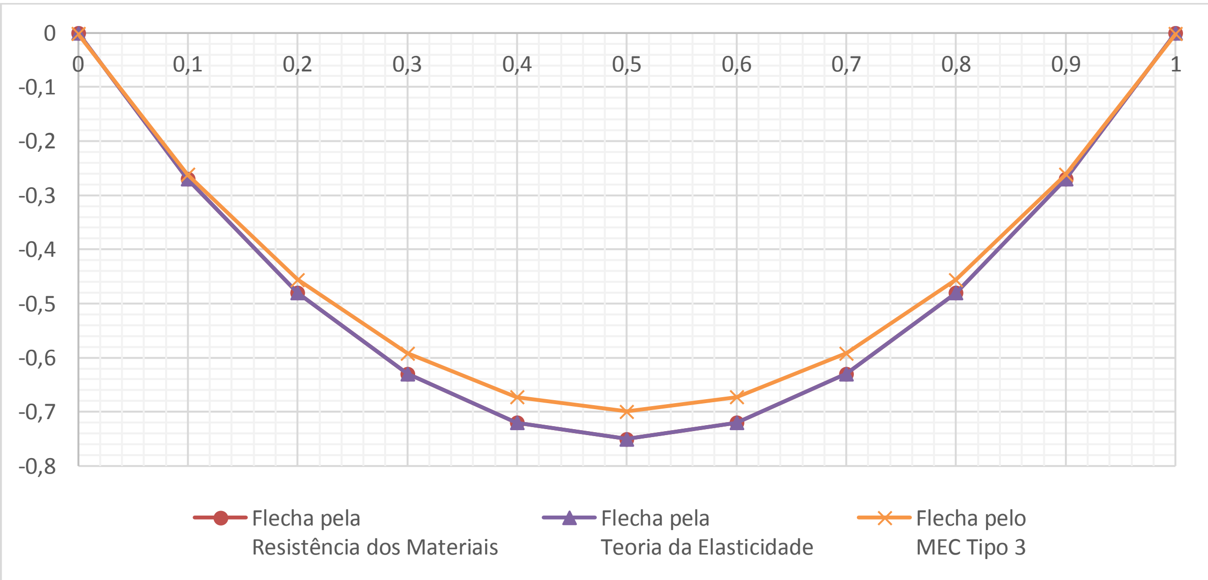

Gráfico 7-5: Flecha observada na viga sob flexão pura do tipo 3, 0.5 corresponde ao centro da viga.

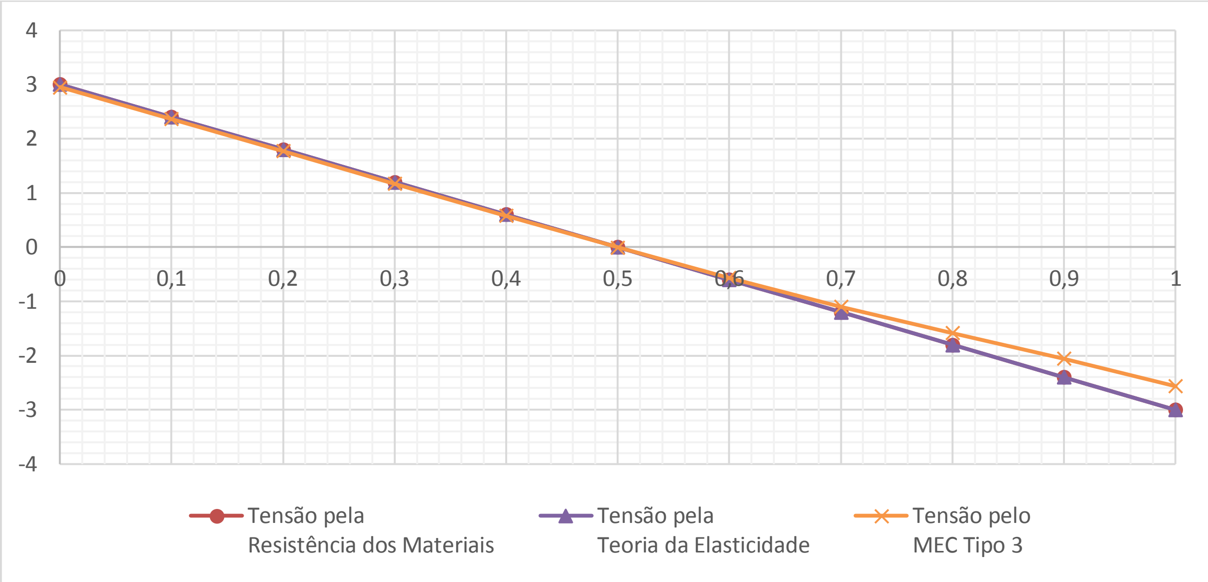

Gráfico 7-6: Tensão horizontal observada no centro do vão na viga sob flexão pura do tipo 3.

O gráfico 7-6 mostra o que foi dito no parágrafo anterior: as tensões compressivas na parte superior sofrem uma ligeira redução. Essa condição foi observada na parte inferior que estava submetida a tração na configuração do tipo 2.

Aparentemente, mudar a localização do apoio na direção vertical altera as condições de carregamento que foram previstas, observando as situações observadas anteriormente. Mais uma vez é importante lembrar que a flexão pura é a situação que a Resistência dos Materiais melhor modela, portanto, era esperado que os resultados não apresentassem grandes discrepâncias.

7.3. Resultados para uma viga bi apoiada com carregamento constante

Conforme foi dito no início da seção 7, para uma viga sob carregamento uniforme será notado uma diferença entre as tensões horizontais observadas na Resistência dos Materiais e a Teoria da Elasticidade. Uma segunda parcela surge pela compressão adicional das fibras, e esse valor é mais intenso quanto mais próximo se aproxima do carregamento prescrito. Nas extremidades, deve haver uma tensão normal adicional a fim de equilibrar a viga.

Além desse fato, observa-se pela equação 6-42 que deve haver tensões cisalhantes prescritas num padrão parabólico para que os resultados obtidos na teoria da elasticidade estejam congruentes com uma análise numérica. Esse fato nem mesmo é citado na Resistência dos Materiais, que despreza a condição pelo fato da viga ser suficientemente esbelta. O problema está em quão esbelta a viga deveria ser para que o critério seja válido, e mesmo assim não há garantias que as tensões laterais serão obtidas segundo o padrão teórico.

TIMOSHENKO & GOODIER, (1970) afirmam que a viga submetida a uma compressão uniforme só apresenta a tensão formulada na seção 6.2.2 caso seja imposta uma tensão horizontal semelhante à parte direita da equação 6-45 em suas extremidades, ou seja, uma reação *X* tal que:

$$X = \frac{q}{2I}\left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2 y\right) \qquad \text{Equação (7-1)}$$

Analogamente a equação da reação *Y* mencionada no segundo parágrafo dessa seção pode ser definida como:

$$Y = -\frac{q}{2I}(c^2 - y^2)L \qquad \text{Equação (7-2)}$$

Essa equação nada mais é do que a tensão cisalhante observada nas extremidades das faces.

A avaliação das vigas será dividas em três tipos. A configuração tipo 1 é feita sem que se prescreva nenhuma tensão nas faces transversal. A do tipo 2 será prescrito a reação *Y* nas laterais, exceto no ponto em que se encontra o pino. Finalmente para o caso do tipo 3 será imposta além da reação *Y*, a reação *X* recomendada pela literatura. Dessa forma será possível analisar esses condicionamentos e verificar se a teoria da Resistência dos Materiais ainda consegue ser precisa num caso mais mal comportado que o visto na seção 7.2. Vale a pena ressaltar que o carregamento uniforme imposto para análise do problema será de valor unitário.

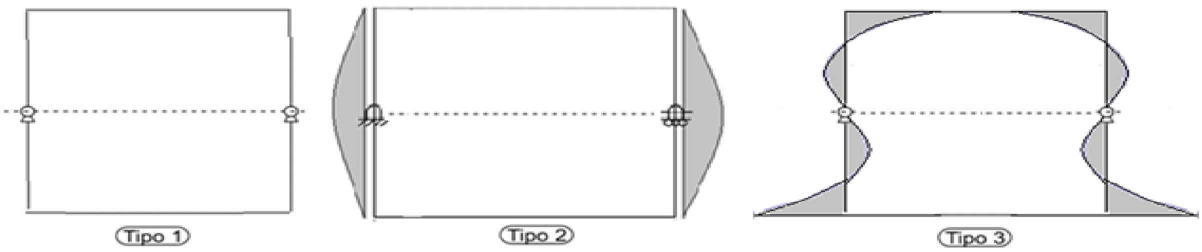

Figura 7-6: Ilustração dos tipos de configurações adotadas nas análises.

7.3.1. Análise da Condição Tipo 1

Quando as reações dos apoios não são corretamente distribuídas segundo o que foi prescrito na Teoria da Elasticidade, a solução numérica pelo MEC encontra grandes concentrações de tensões nos apoios. A parte superior da viga fica comprimida fortemente visto que as reações dos apoios só afetaram os deslocamentos após a metade inferior da viga. A figura 7-7 ilustra o estado em que os nós da viga se encontram após o carregamento. Cabe ressaltar que não há escala nessa ilustração, sendo utilizada para elucidação da condição obtida.

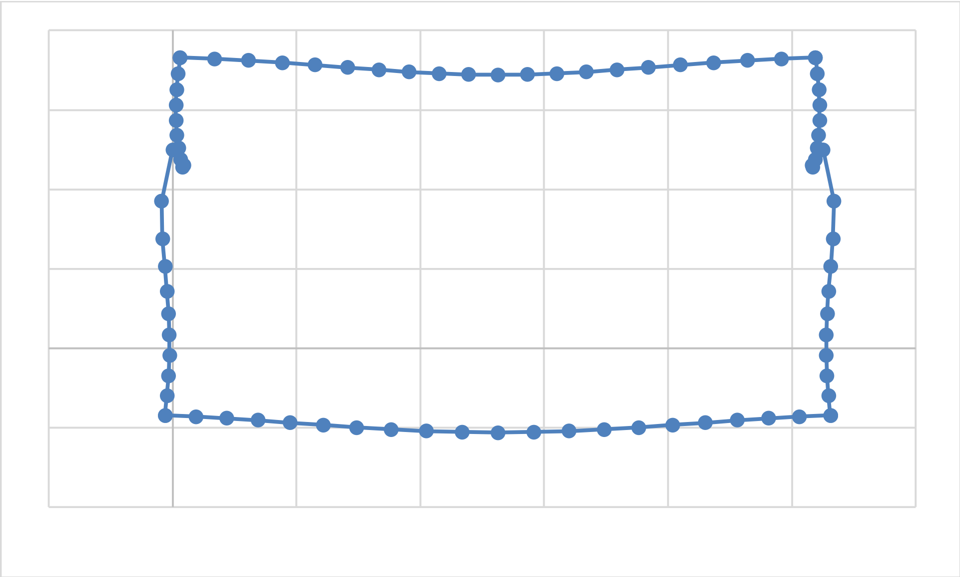

Figura 7-7:Estado da viga biapoiada com carga constante segundo o tipo 1 de configuração.

Ao se observar a flecha, os valores previstos pela Resistência já não são muito bons, visto que não há relação altura largura o suficiente na viga. Portanto, nota-se uma discrepância com a Teoria da Elasticidade. A flecha encontrada no gráfico 7-7 para o MEC mostra uma grande diferença com a teoria. Uma justificativa disso está na grande concentração de tensão presente nos apoios. A medida que se migra para o vão da viga, as curvas tendem a ficar semelhantes, caracterizando o princípio de Saint-Venant.

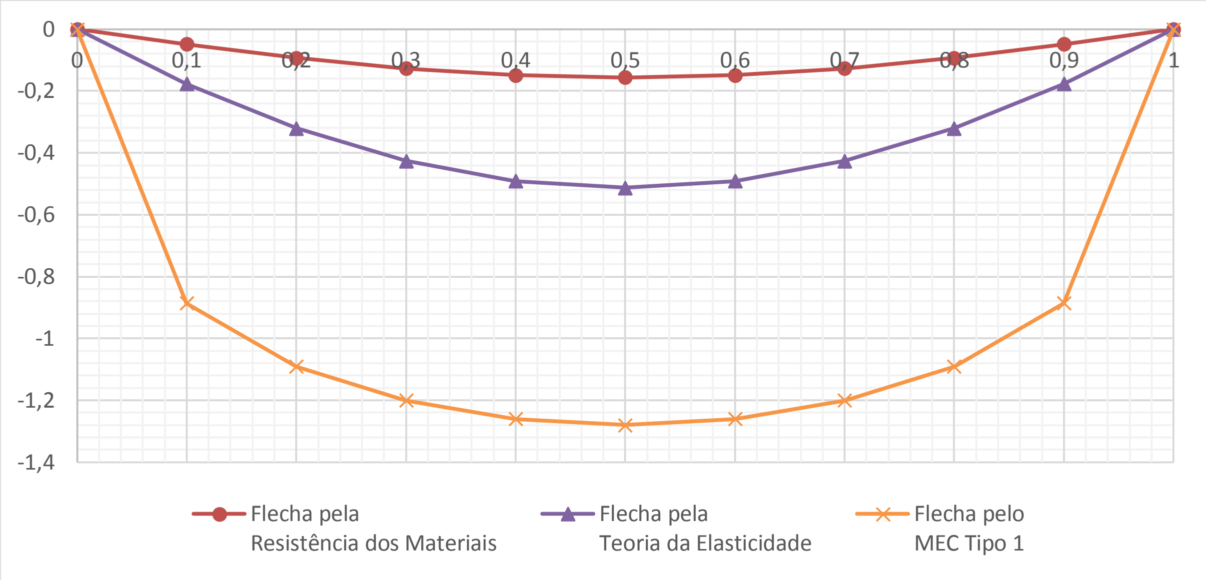

Gráfico 7-7: Flecha observada na viga biapoiada sob carga constante do tipo 1.

Quando se observam as tensões horizontais na seção transversal do centro da viga, nota-se poucas diferenças. Nem mesmo a tensão adicional observada pela compressão das vigas mencionada no início dessa seção parece ter se manifestado na solução com o MEC.

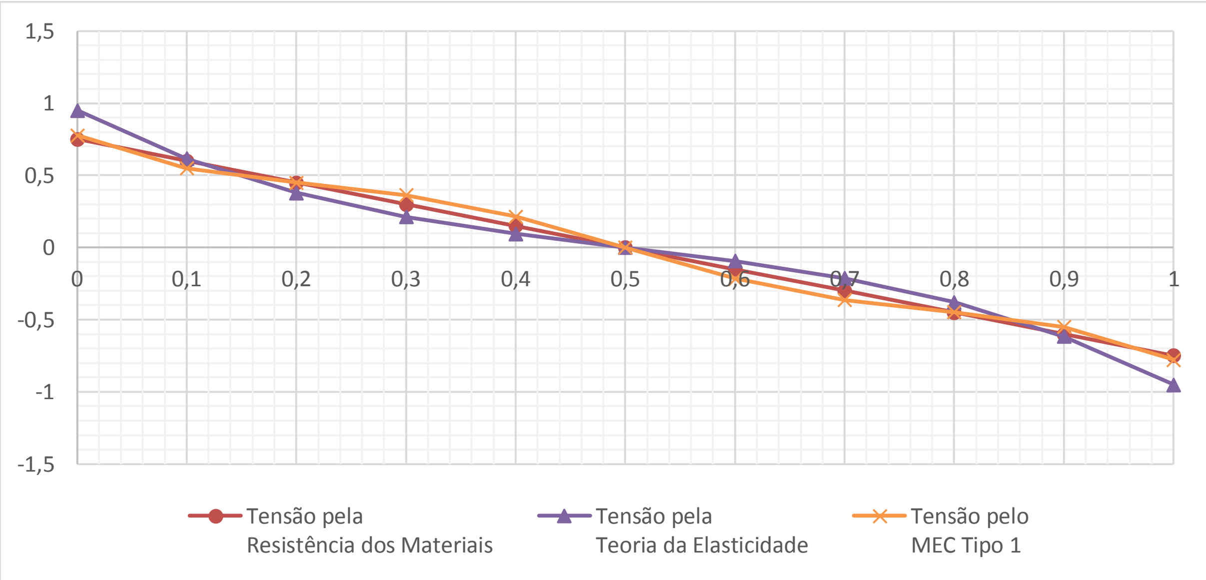

Gráfico 7-8: Campo de tensões horizontais na seção transversal do centro da viga biapoiada submetida a carga constante do tipo 1.

O que se observa é uma concordância maior do método do MEC com a Resistência dos Materiais para as extremidades superior e inferior do que com as formulações postuladas na Teoria da Elasticidade.

7.3.2. Análise da Condição Tipo 2

Quando as faces são submetidas a forças de superfície verticais distribuídas parabolicamente, a concentração de tensão observada nos apoios desaparece, ficando a viga com um aspecto mais similar a uma flexão pura. A figura 7-8 mostra que o esmagamento da parte superior da viga desaparece com a nova configuração.

É importante ressaltar que, diferentemente do caso de flexão pura, a carga perpendicular à direção dos apoios configura tensões cisalhantes. Essas tensões não mais permitem que as faces transversais permaneçam planas, conforme observamos na figura 7-8.

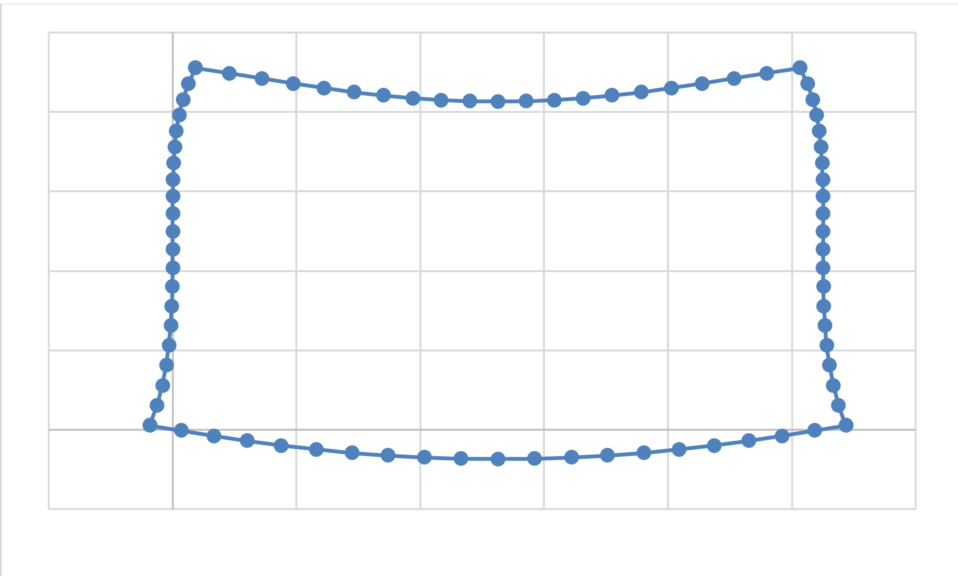

Figura 7-8: Estado da viga biapoiada com carga constante segundo o tipo 2 de configuração.

Quando analisamos a flecha da nova solução, esta se mostra bastante similar ao resultado que se obtém utilizando a teoria da elasticidade. O que se conclui é que o que se encontra na Teoria da Elasticidade é um caso particular do problema de viga biapoiada, em que os apoios devem se comportar de maneira tal que se observa um campo parabólico de tensões cisalhantes nas extremidades. O gráfico 7-9 mostra os valores obtidos.

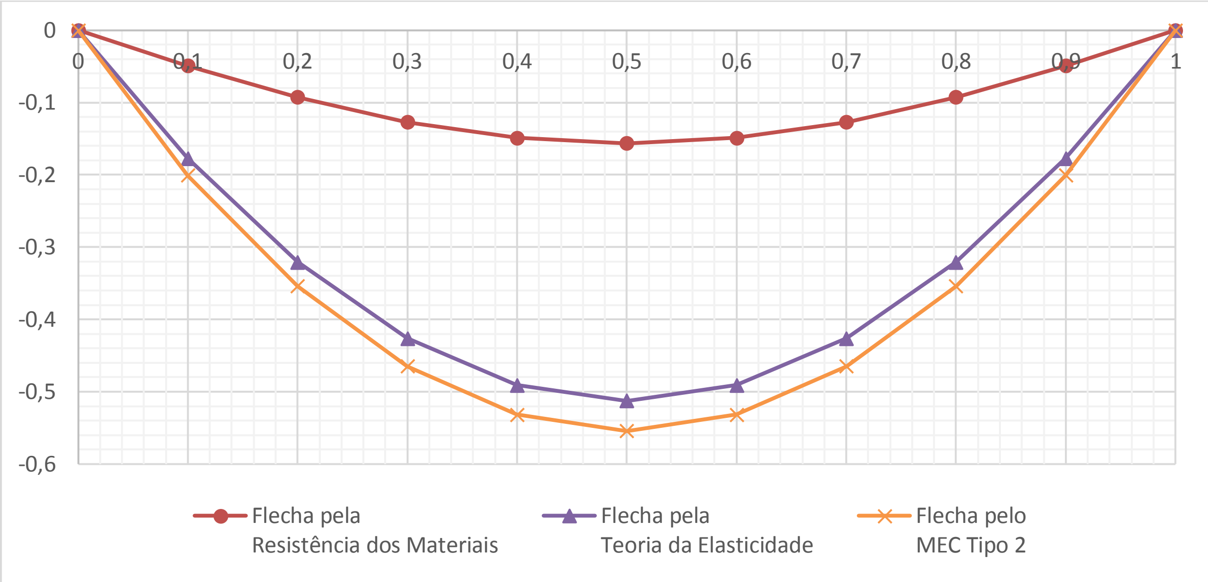

Gráfico 7-9: Flecha observada na viga biapoiada sob carga constante do tipo 2.

Quando a análise se volta para a tensão horizontal encontrada no centro do vão, o MEC passa a se comportar de uma maneira muito mais semelhante à Teoria da Elasticidade do que à Resistência dos Materiais. Até mesmo a compressão adicional das fibras é observada no campo de tensões, apesar de não se ter imposto o campo especial de reações recomendado na literatura (TIMOSHENKO; GOODIER, 1970).

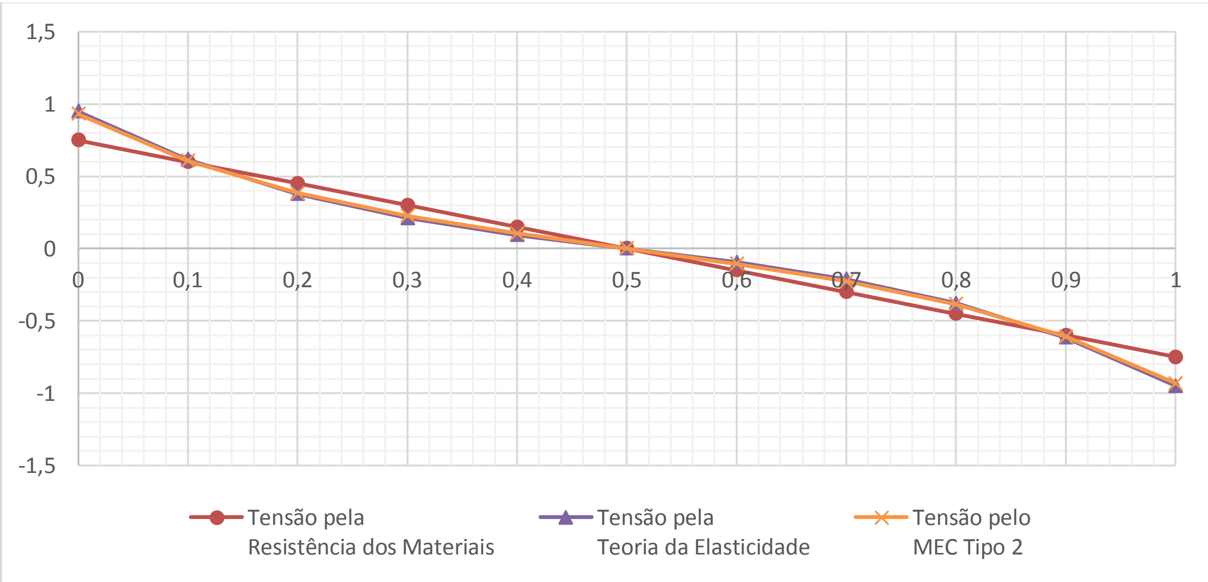

Gráfico 7-10: Campo de tensões horizontais na seção transversal do centro da viga biapoiada submetida a carga constante do tipo 2.

A partir do gráfico 7-10, não se nota grande diferenças entre os três métodos. Porém, caso as tensões utilizadas fossem maiores, passaria a ser observado uma discrepância maior entre a Resistência dos Materiais e o s demais métodos.

7.3.3. Análise da Condição Tipo 3

A condição de tensão nas extremidades já aproximou a flecha obtida com o MEC mais para a flecha postulada na teoria da elasticidade, porém ainda falta mais uma condição de tensão: a reações adicionais de compressão da fibra nas extremidades. A figura 7-9 mostra poucas alterações nos deslocamentos. Mas é possível observar que houve um ligeiro encurvamento adicional da viga causado pela reação horizontal X.

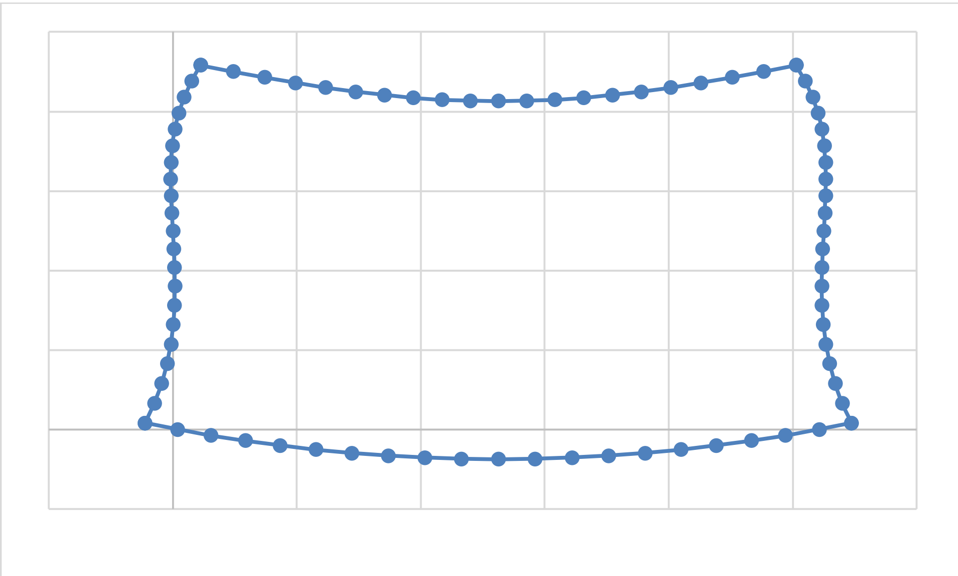

Figura 7-9: Estado da viga biapoiada com carga constante segundo o tipo 3 de configuração.

Quando se analisam as flechas obtidas com os três métodos, nota-se que a flecha gerada no MEC ficou ainda mais próxima da Teoria da Elasticidade. Isso mostra que o que foi afirmado na literatura é verdadeiro, e o problema analisado passa a ser mais parecido com o que foi resolvido na seção 6.2.2. O gráfico 7-11 mostra os valores obtidos com os três métodos.

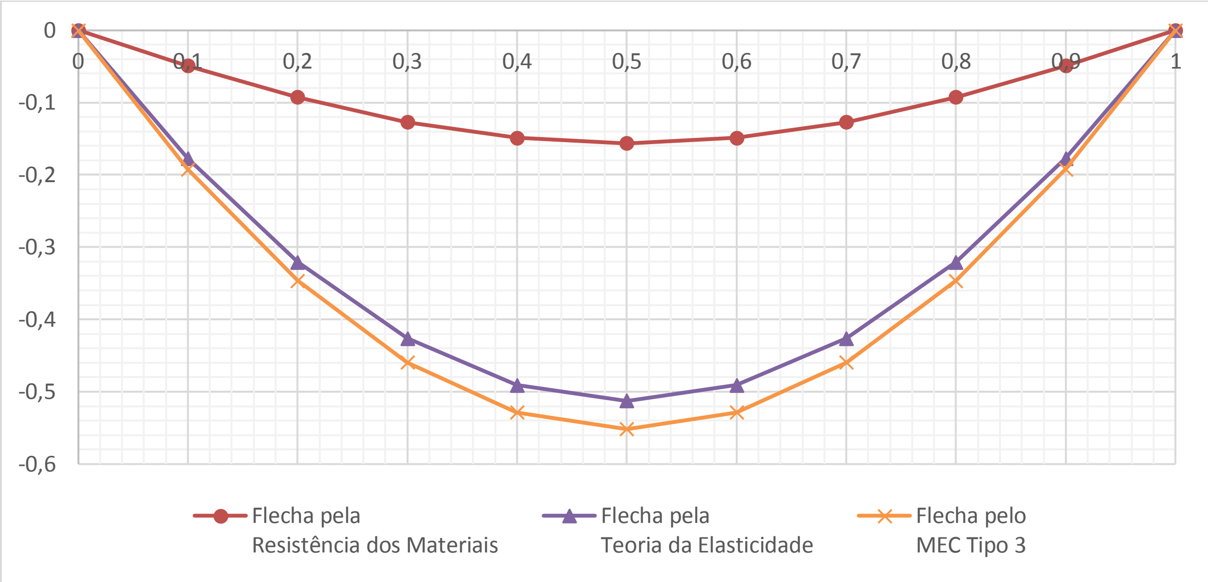

Gráfico 7-11: Flecha observada na viga biapoiada sob carga constante do tipo 3.

Já para o caso das tensões, os valores encontrados com a Teoria da Elasticidade e com o MEC agora se sobrepõe. É interessante notar que apesar de se trabalhar com uma viga nem um pouco esbelta, era esperado que a compressão adicional postulada na Teoria da Elasticidade se mostraria com intensidade tal que já não poder-se-ia encontrar simetria das tensões com relação a linha neutra.

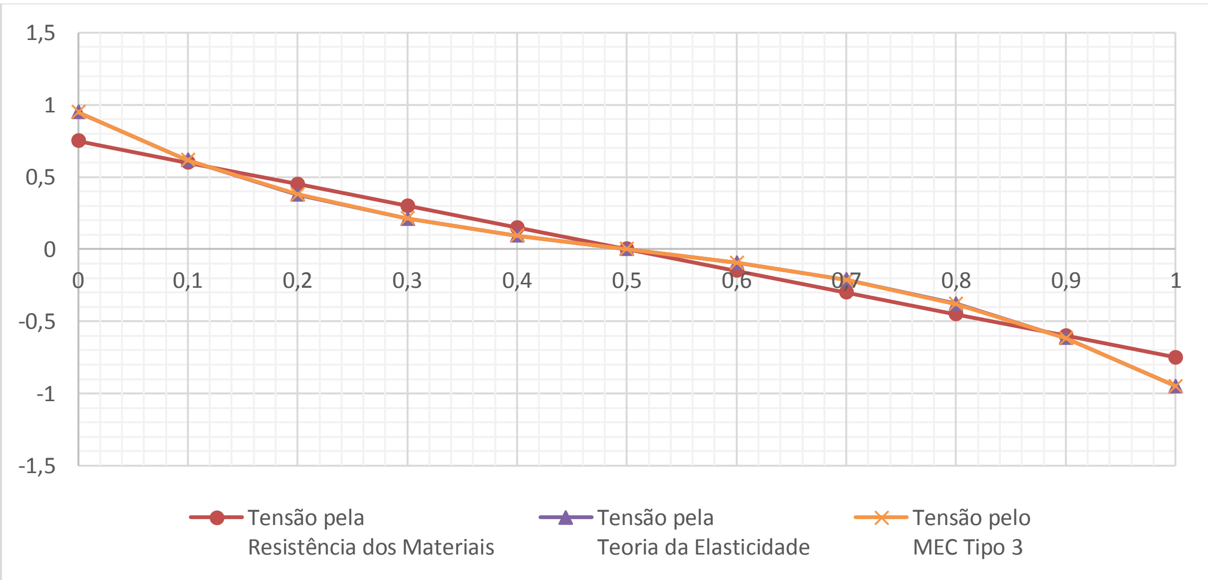

Gráfico 7-12: Campo de tensões horizontais na seção transversal do centro da viga biapoiada submetida a carga constante do tipo 3.

O gráfico 7-12 mostra que a relação entre altura e largura ainda é insuficiente a ponto de se causar uma compressão muito acentuada na parte superior. Logo, caso fosse necessário, uma análise do comportamento da compressão da viga poderia ser feito ao se aumentar a altura do elemento. Mas essa análise não será aqui feita, ficando a mesma como uma proposta para trabalhos futuros.

7.4. Resultados para uma viga engastada com carregamento constante

O ato de impor um engaste para a Resistência dos Materiais não resulta em nenhuma dificuldade para o problema de viga, e o mesmo pode ser resolvido completamente. Porém, essa condição de contorno não possui solução que satisfaça os campos de deslocamento que ela exige para a Teoria da Elasticidade. Logo, é possível impor uma condição especial de contorno que, apesar de ser solução exata, será incapaz de encontrar com elevada precisão o comportamento dos deslocamentos observados no problema em termos práticos.

Apesar de não ser possível encontrar uma solução analítica para o problema considerado utilizando a Teoria da Elasticidade, a viga engastada pode facilmente ser resolvida por qualquer método numérico, inclusive o MEC. Porém, a situação de engaste determina que não haja deslocamentos em ambas as direções dos planos. Isso não é necessário para se obter uma solução com o MEC. Ao se fixar um ponto em ambas as direções e outro em uma direção tal que restrinja a liberdade de rotação do sistema já permite que o problema seja resolvido pelo MEC e pela Teoria da Elasticidade inclusive.

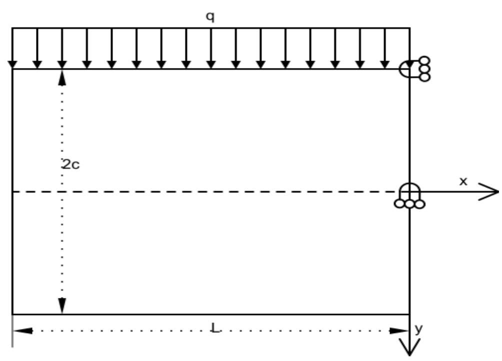

Figura 7-10: Viga "engastada" submetida a carga uniformemente distribuída, imagem repetida por conveniência.

Observando a figura 6-9, repetida aqui por conveniência, nota-se que a viga foi fixada em apenas dois pontos para que exista uma solução que satisfaça essas condições de deslocamento. Porém, uma configuração especial de força de superfície deve ser imposta nessa fixação de maneira que a condição de tensão cisalhante e de tensão horizontal obtida nas equações 6-74 e 6-77 seja respectivamente satisfeitas. Definindo essas reações como *X* e *Y*, sabe-se que:

$$X = \frac{q}{2I}(L^2)y + \frac{q}{2I}\left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2y\right) \qquad \text{Equação (7-3)}$$

$$Y = -\frac{qL}{2I}(c^2 - y^2) \qquad \text{Equação (7-4)}$$

Define-se como a configuração do tipo 1 a condição ilustrada na figura 6-9 porém com uma fixação bidimensional em no ponto (0,0) e sem os esforços *X* e *Y*. No caso do tipo 2 esses esforços já são impostos. Para uma análise mais realista, impõe-se a restrição do movimento horizontal de toda a face engastada, com apenas o ponto do centro de área estando restrito na vertical. Essa será a configuração do tipo 3. Finaliza-se a análise para uma fixação total da face em ambas as direções, situação que será intitulada como do tipo 4. Vide figura 7-11.

É importante ressaltar que da mesma forma que foi observado no problema apresentado na seção 6.2, na Teoria da Elasticidade encontra-se uma tensão adicional decorrente da compressão das fibras. Esse valor é representado pela parte à direita da equação 6-77. Valer a pena ressaltar que a carga q imposta possui valor unitário.

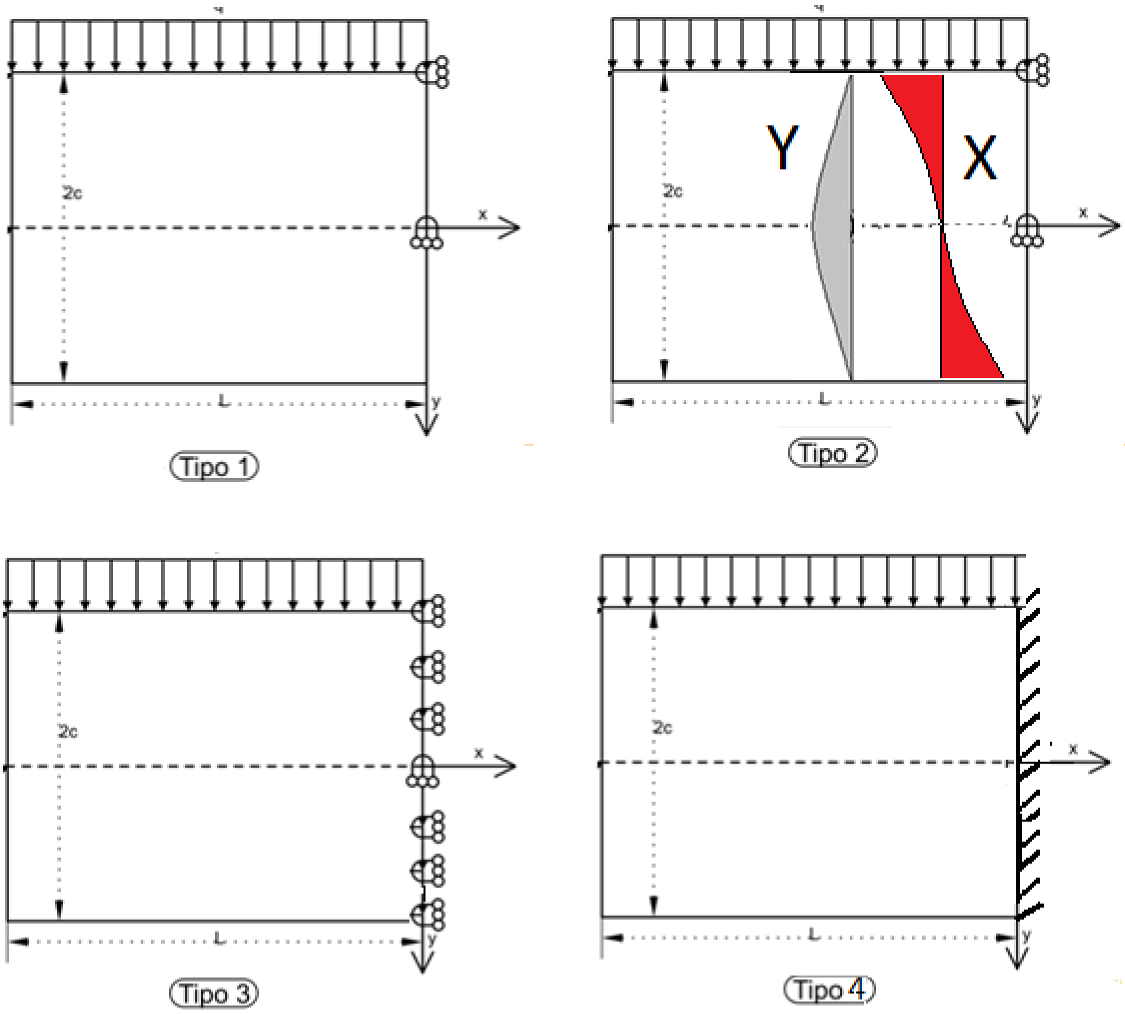

Figura 7-11: Configurações adotadas na análise de viga engastada sob carregamento uniformemente distribuído.

7.4.1. Análise da Condição Tipo 1

Quando é feita a análise da condição do tipo 1, observa-se que para as reações conseguirem equilibrar o momento gerado na face superior, elas deverão atingir valores extremos. Como se sabe pelas equações 2-1 e 2-2, essas concentrações de tensão não desaparecem rapidamente, demandando certo número de elementos para que o mal condicionamento desapareça, como é dito pelo princípio de Saint-Vennan. Vale ressaltar que a distância requerida para que as tensões apresentem valores condizentes com a teoria variam para cada caso.

O que se observa no campo de tensão horizontal da área engastada (mostrado no gráfico 7-15) é uma grande compressão no centro da viga (local da fixação bidirecional) e uma grande tração na extremidade superior (local com deslocamento horizontal prescrito). Existe a imposição da força de superfície vertical apenas no apoio central, o que significa que acima desse pontoserá observado um deslocamento vertical para baixo de todos os nós na face que supostamente estava engastada. A figura 7-12 faz uma ilustração do fenômeno que está acontecendo na viga. É necessário frisar que não há escala nessa ilustração. Seu objetivo é de apenas elucidar a solução obtida.

Com valores tamanha concentração de tensões nos apoios, os valores de flecha obtidos na teoria são muito pequenos em relação à solução com o MEC. No gráfico 7-13 mostra-se apenas os valores teóricos pela Resistência dos Materiais e pela Teoria da Elasticidade. Como a viga não é nada esbelta, existem grandes diferenças entre os valores das teorias. Como se viu no caso da viga biapoiada, as fibras horizontais sofrem uma compressão adicional que empurram a estrutura como um todo para baixo. Essa tensão compressiva determina uma flecha mais baixa na Teoria da Elasticidade do que na Resistência dos Materiais. O gráfico 7-13 mostra exatamente isso. Também vale a pena ressaltar que a compressão causada nas fibras gera valores mais fortes perto do engaste do que longe deles. Isso configura uma flecha em que a concavidade é única e onde se observa ângulo nulo na parte engastada.

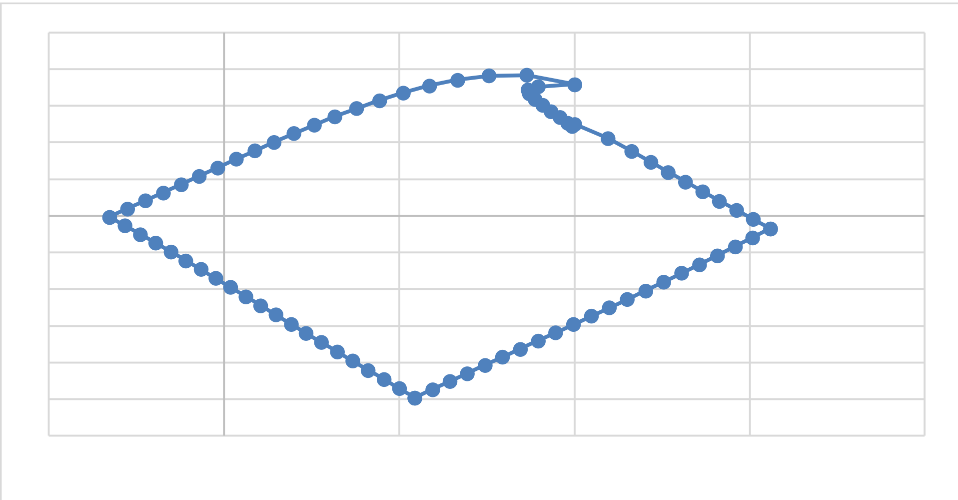

Figura 7-12: Estado da viga engastada com carga constante segundo o tipo 1 de configuração.

Quando se coloca junto o valor obtido pelo MEC, fica apenas óbvio que não existe nenhuma proximidade entre as curvas do método com as teóricas. O gráfico 7-14 apenas ressalta a grande diferença entre os valores. Se a Teoria da Elasticidade previa uma flecha máxima de entorno de -3.54, o MEC indica uma flecha máxima de -20.

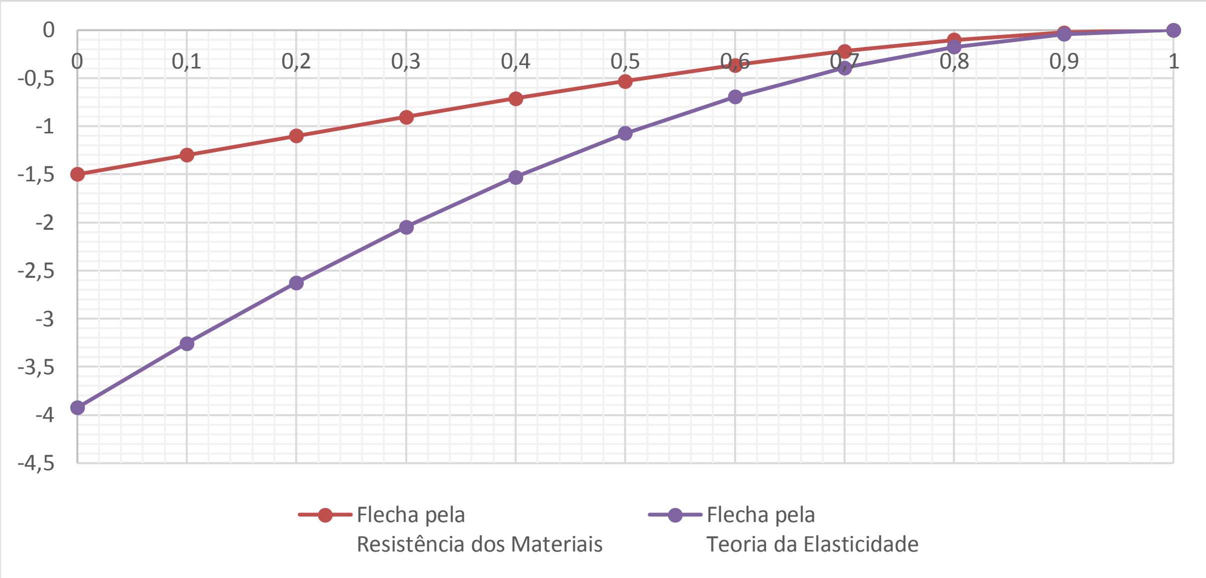

Gráfico 7-13: Comparação entre a Resistência dos Materiais e a Teoria da Elasticidade.

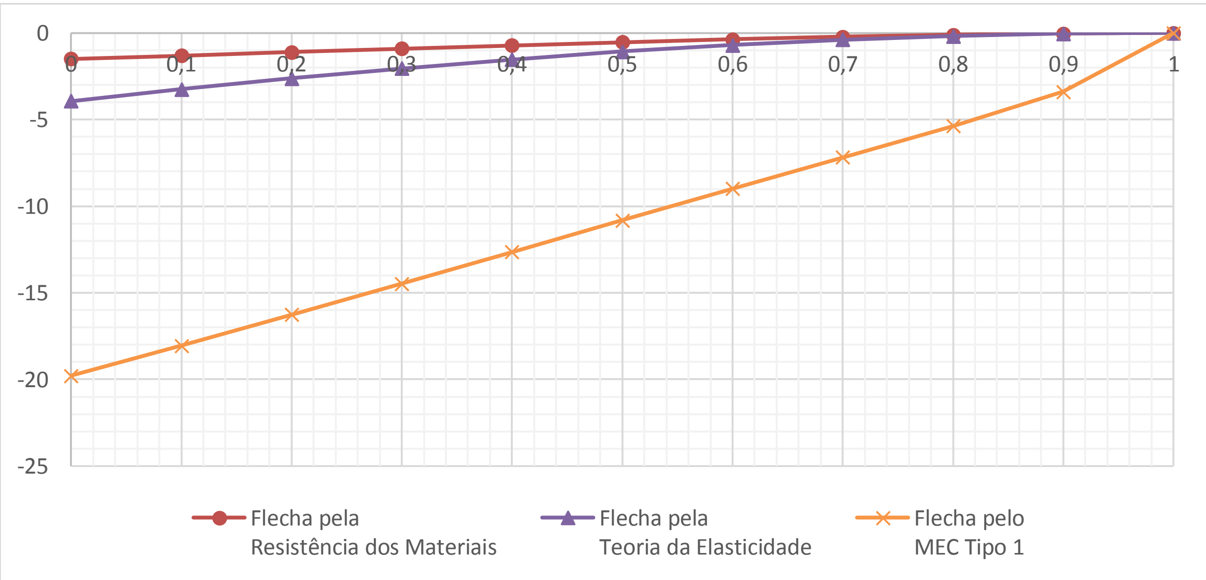

Gráfico 7-14: Flecha observada na viga engastada sob carga constante do tipo 1.

O que se foi obtido no gráfico 7-14 não é um erro de cálculo gerado pelo computador, visto que o mesmo programa rodou os problemas mostrados na seção 7.2 e 7.3, obtendo com isso a resposta correta. O problema está justamente na configuração em que o problema é calculado, onde o engaste causa um grande mal condicionamento para um viga não esbelta.

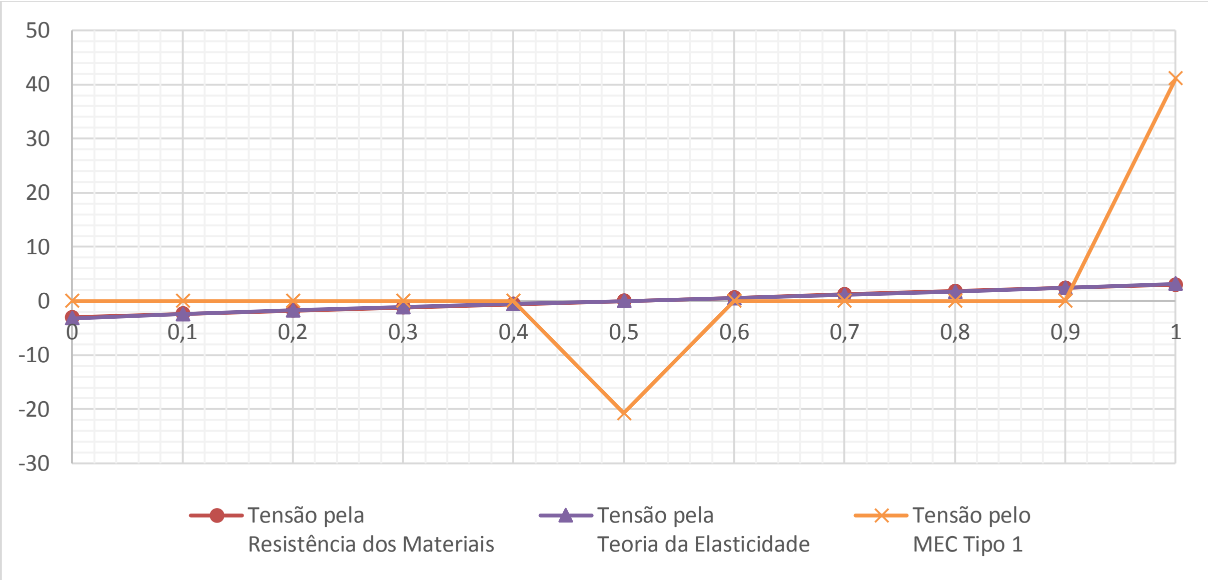

Gráfico 7-15: Campo de tensões horizontais no engaste da viga sob carregamento constante tipo 1.

7.4.2. Análise da Condição Tipo 2

Quando se prescreve as reações *X* e *Y* obtidas na Teoria da Elasticidade (em todos os nós que é possível fazê-lo), as concentrações de tensões observadas nos apoios diminuem fortemente de intensidade. Como pode ser visto na figura7-13, a viga ainda sofre compressão nos nós superiores ao centro e tração nos inferiores. Porém, a situação foi severamente atenuada.

Vale a pena ressaltar que os valores obtidos no gráfico 7-13 são válidos em todas as configurações de viga (do tipo 1 ao 4), visto que não se modifica nenhum parâmetro em cada tipo, apenas as condições de contorno.

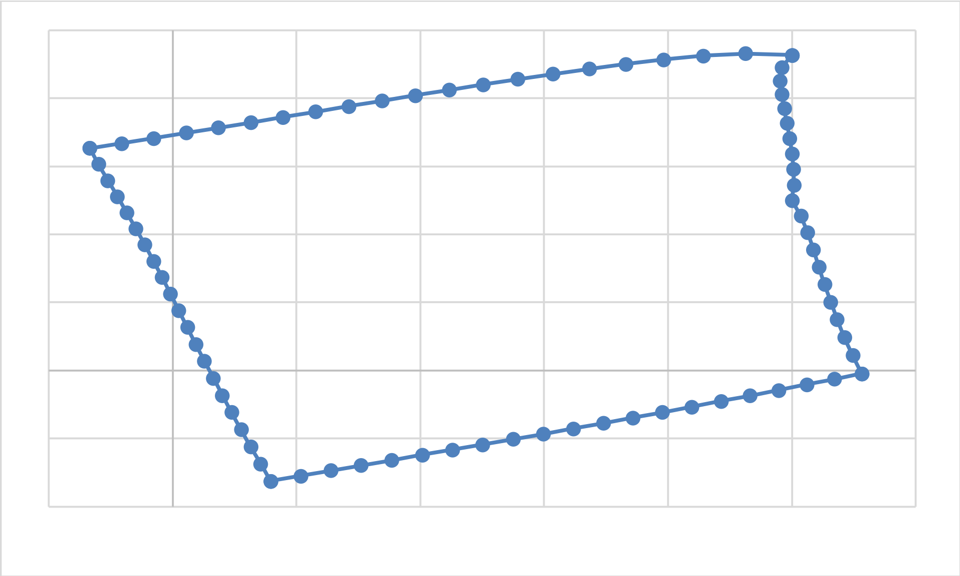

Figura 7-13: Estado da viga engastada com carga constante segundo o tipo 2 de configuração.

Como se pode observar através do gráfico 7-16, ainda existe concentrações nos apoios, reações essas causadas pelos momentos que precisam ser equilibrados a fim de manter a viga estável e evitar assim que ela gire. É importante lembrar que não foi imposto na face engastada que ela estava com equilíbrio de momentos ($\int \sigma_x y dy = 0$). Infelizmente, um equilíbrio de momentos na seção transversal livre não pode ser imposto pelo mesmo motivo que não se impôs isso no centro do vão da viga estudada na seção 7.3.Prescrever essa condição de contorno significa dizer que não há momento na região de engaste, uma condição irreal.

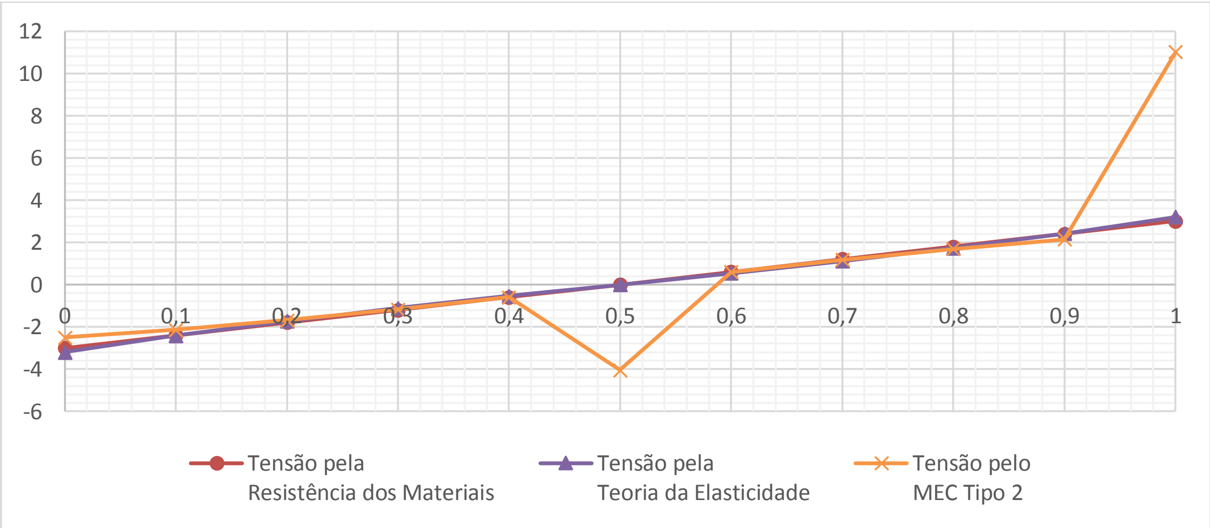

Gráfico 7-16: Campo de tensões horizontais no engaste da viga sob carregamento constante tipo 2.

Portanto, nem a Teoria da Elasticidade e nem a Resistência dos Materiais predizem com boa exatidão as tensões observadas na região dos engastes. Porém, como pode ser notado no gráfico 7-17, a flecha gerada na viga já se mostra muito mais próxima do resultado esperado pela Teoria da Elasticidade. Um fator que provoca o fato é a desconcentração de tensão que foi causada pela prescrição das tensões esperadas pela teoria na região do engaste.

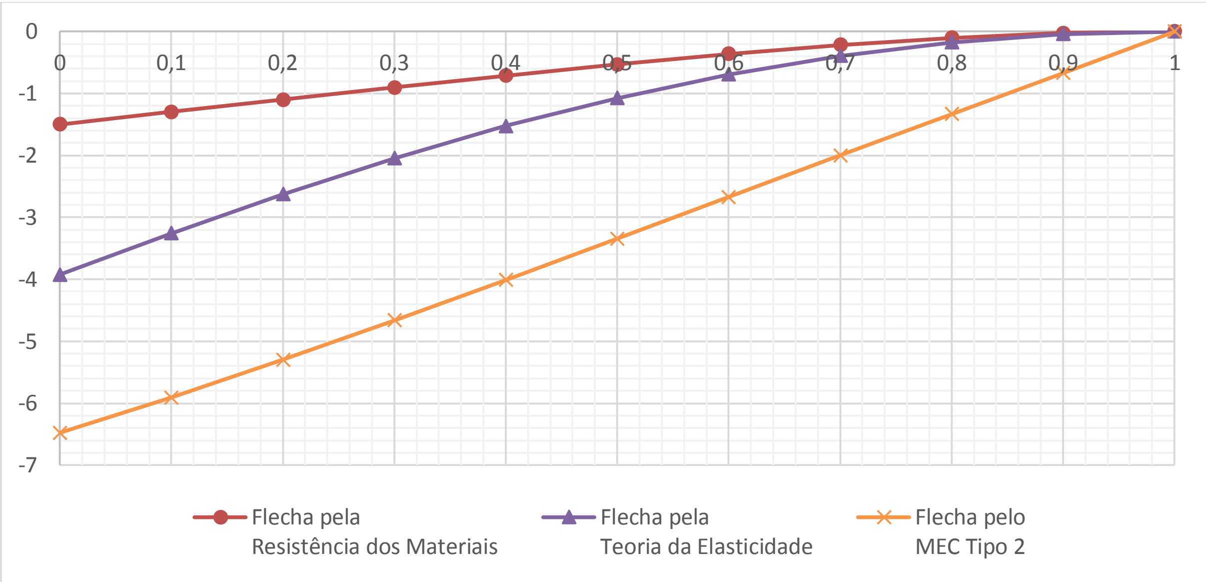

Gráfico 7-17: Flecha observada na viga engastada sob carga constante do tipo 2.

Porém o valor máximo gerado pelo MEC ainda é muito maior que o previsto pela teoria, chegando a ter quase o dobro do que se foi postulado na Teoria da Elasticidade.

7.4.3. Análise da Condição Tipo 3

Nessa configuração, a viga é restringida apenas no movimento horizontal da face engastada. A ideia é determinar se com esse tipo peculiar de condição de contorno o MEC é capaz de gerar uma solução em que a viga estará visivelmente engastada. Porém, da mesma forma que foi observado anteriormente, os nós superiores são comprimidos enquanto os inferiores são tracionados. Esse distúrbio impede que a flecha convirja para o valor teórico. A figura 7-11 ilustra a solução obtida.É necessário frisar que não há escala nessa ilustração. Seu objetivo é de apenas elucidar a solução obtida.

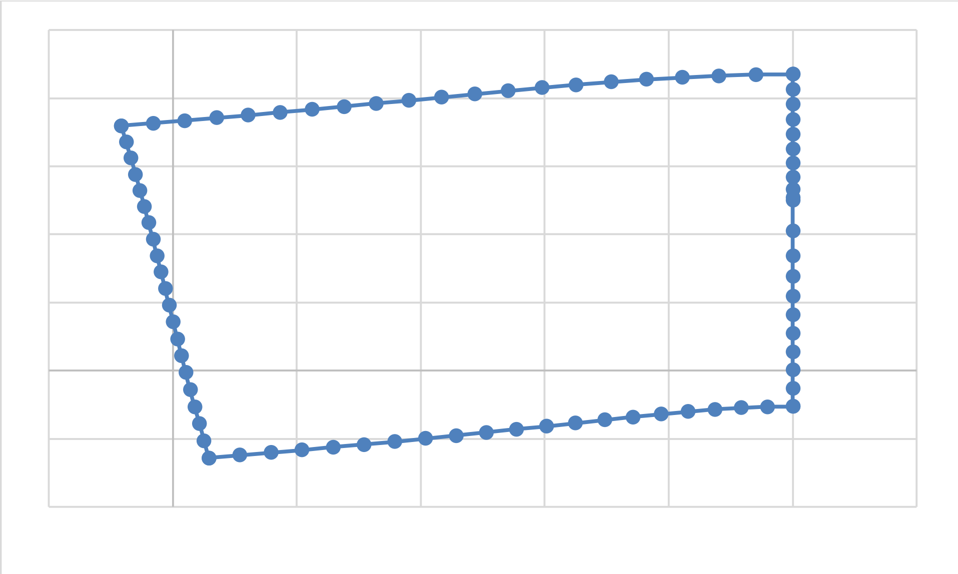

Figura 7-14: Estado da viga engastada com carga constante segundo o tipo 3 de configuração.

Quando se observam as tensões horizontais através do gráfico 7-18, nota-se que elas são simétricas em relação ao centro de área, porém a linha obtida não é tão retilínea como as teóricas. Um dos motivos disso está na concentração de tensão vertical causada no ponto central. Vale a pena ressaltar que os valores de tensão obtidos em ambas as direções não são independentes. Muito pelo contrário, eles interagem.

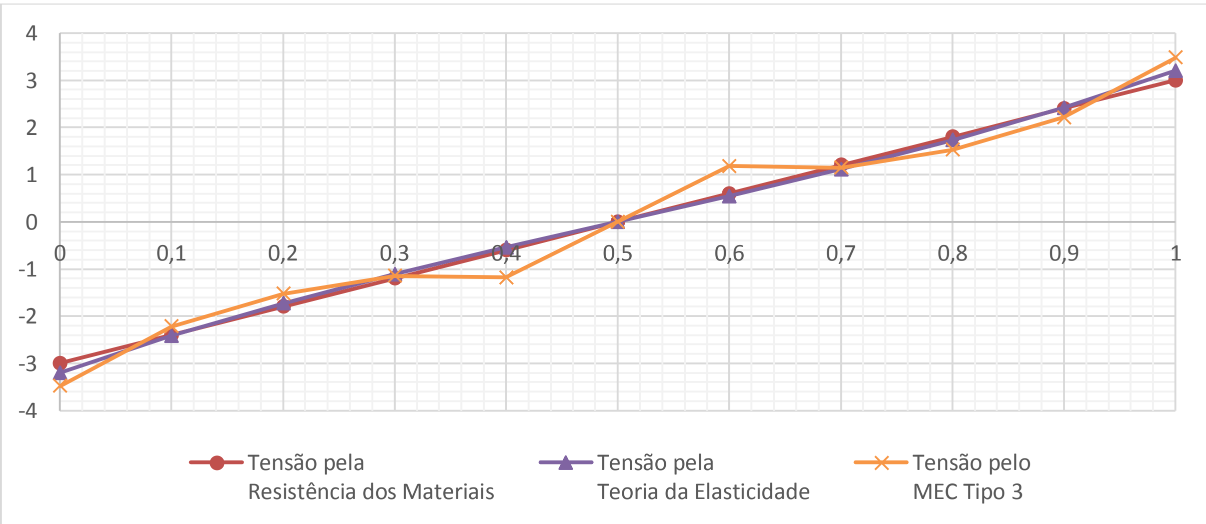

Gráfico 7-18: Campo de tensões horizontais no engaste da viga sob carregamento constante tipo 3.

Quando se observa a curva da flecha gerada pelo MEC, nota-se que há uma pequena região de grande gradiente de deslocamentos na face engastada e a seguir os valores permanecem sob decréscimo quase linear. O gráfico 7-19 mostra esse fato. O que foi postulado na equação 4-15 pela Resistência dos Materiais era que o momento apenas é o fator que causava o deslocamento vertical da viga.

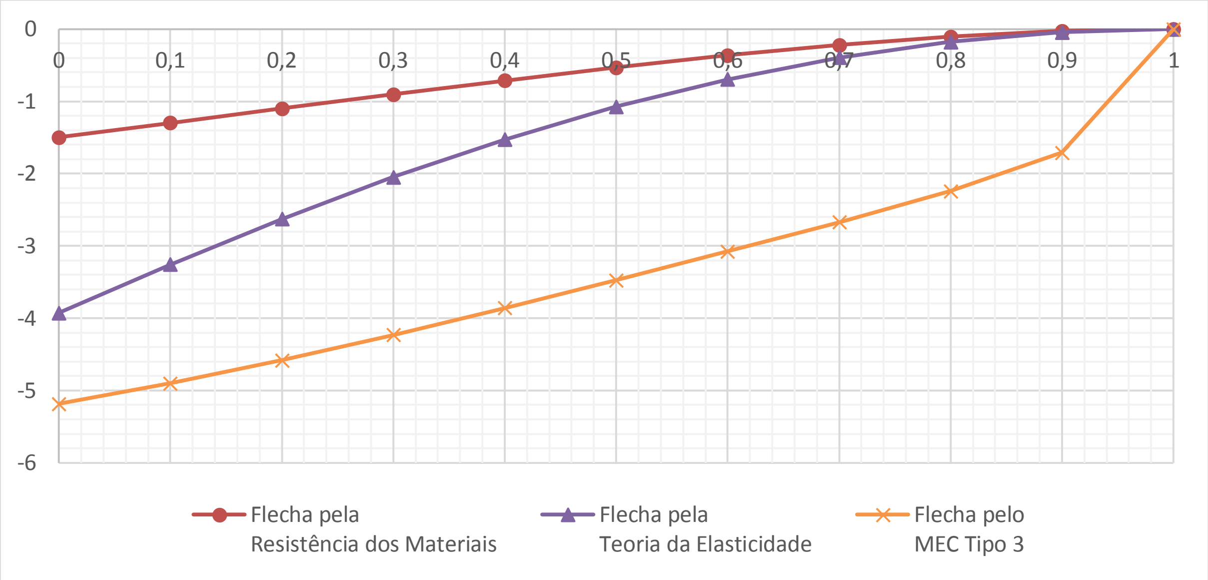

Gráfico 7-19: Flecha observada na viga engastada sob carga constante do tipo 3.

Na Teoria da Elasticidade, através da análise de casos, mostrou-se que isso não era verdadeiro. Uma compressão também desloca a viga para baixo. O que foi visto no gráfico 7-19 apenas confirma isso. Existe uma grande compressão num único ponto de engaste, e esse colabora com um deslocamento adicional da flecha para baixo.

7.4.4. Análise da Condição Tipo 4

Como última análise a ser feita nesse problema, foi imposta a fixação de ambas as direções em todos os pontos na extremidade engastada. Essa situação configura a situação mais real de um engaste. Diferentemente do que foi observado nos casos anteriores, agora todos os pontos foram presos também na direção vertical. O problema de ser tão severo na imposição dessa condição é o fato de se impedir completamente, entre outros fatores, os deslocamentos que resultam do efeito de Poisson.

Geralmente, a imposição rigorosa de restrições aos deslocamentos causa um gradiente elevado de deformações e essas deformações causam tensões igualmente intensas. A figura 7-15 ilustra a solução obtida através de um croqui fora de escala.

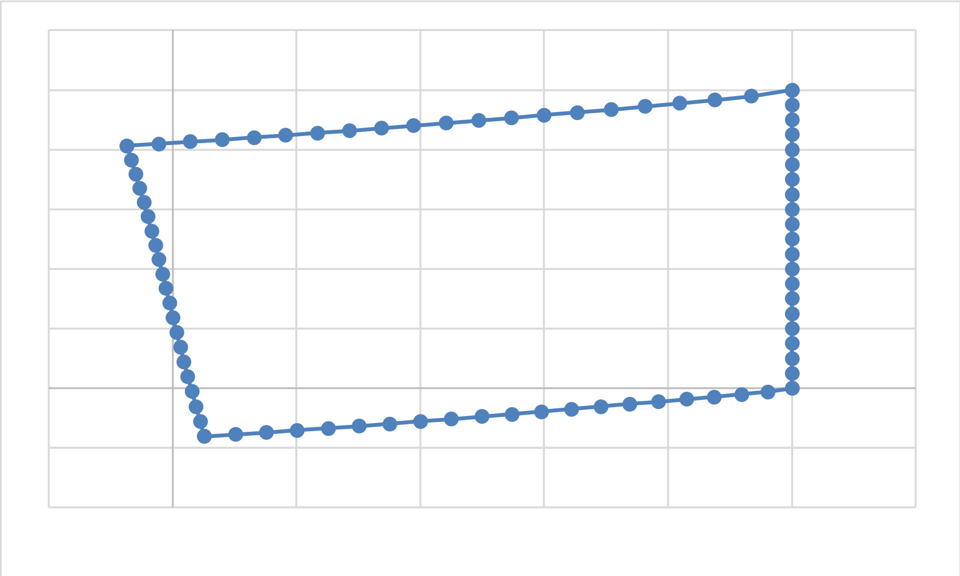

Figura 7-15: Estado da viga engastada com carga constante segundo o tipo 4 de configuração.

Supõe-se que os pontos que mais se deformam são aqueles que estão submetidos aos maiores esforços. Como isso não ocorre quando se restringe o movimento de tais pontos, tensões adicionais são manifestadas para manter o ponto na posição original. O gráfico 7-20 mostra que existem valores de tensão maiores nas extremidades das faces. Isso é causado pelo fato do ponto na extremidade superior sofrer a compressão prescrita. A parte inferior sofre da mesma situação para se equilibrar os momentos gerados na face engastada.

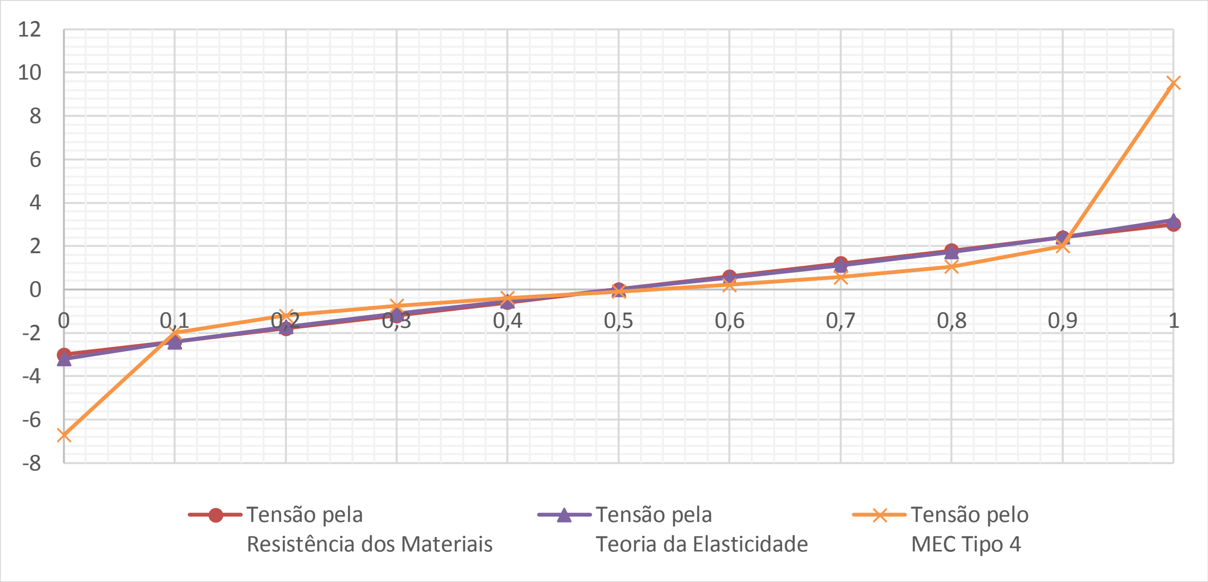

Gráfico 7-20: Campo de tensões horizontais no engaste da viga sob carregamento constante tipo 4.

Porém, o que se observa no centro da viga é a ausência de valores de concentração de tensão significativos. As linhas teóricas e a obtida pelo MEC estão bem próximas na região central. Logo, a flecha no centro apresenta um valor mais próximo da teoria, porém sua curvatura não é similar a teórica. O decréscimo observado é quase linear, mas apresenta valor máximo de deslocamento vertical bem mais próximo da Teoria da Elasticidade, conforme observado no gráfico 7-21.

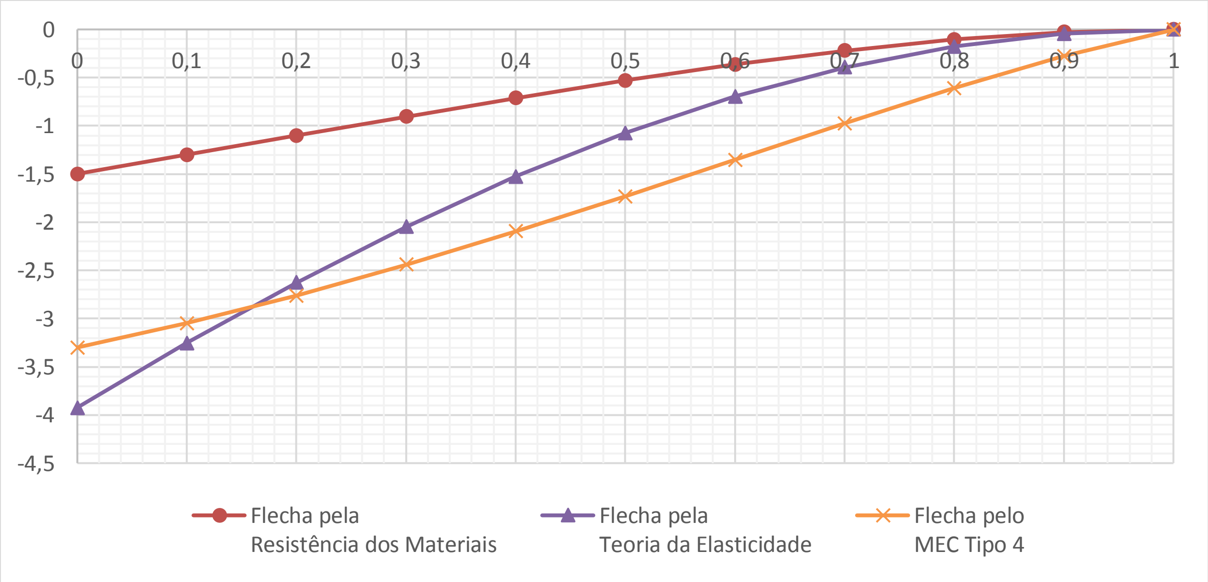

Gráfico 7-21: Flecha observada na viga engastada sob carga constante do tipo 4.

7.5. Avaliação de resultados para uma viga engastada com carregamento concentrado

Uma viga engastada com um carregamento concentrado parece ser um problema simples, mas os estudos mais aprofundados dados pela Teoria da Elasticidade mostram que não é simples estabelecer tal condição com precisão analiticamente.

O engaste determina que numa face especificada não haja nenhum tipo de deslocamentos e, consequentemente, nenhum ângulo de deflexão. Em ambas as análises teóricas da Resistência dos Materiais e da Teoria da Elasticidade é prescrito a condição de deslocamento nulo e de ângulo de inclinação nulo no ponto engastado que está na centróide da viga.

Vale notar que na Teoria da Elasticidade o problema simula com boa precisão a flecha da viga observada no centro da mesma, mas existe descolamento da face engastada, conforme mostra figura 7-16. O motivo disto está no fato de que ao se prescrever fixação de toda a face gera-se uma condição que não pode ser atendida analiticamente. Logo, opta-se por fixar apenas um ponto, a fim de gerar uma solução mais próxima da realidade.

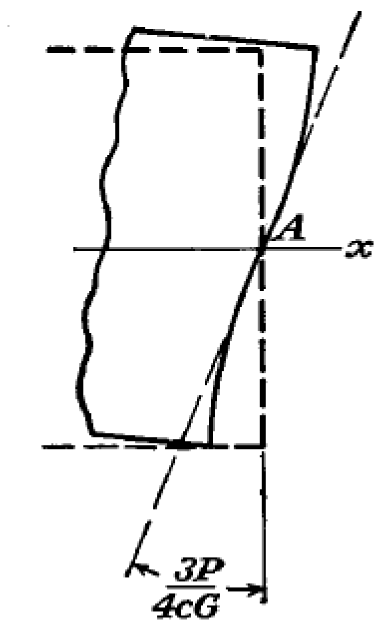

Figura 7-16: Efeito observado na viga segundo a Teoria da Elasticidade.

O carregamento que será utilizado nessa avaliação será concentrado em relação à largura da viga. Como não é possível prescrever uma carga concentrada, a não ser que se use alguma função como o Delta de Dirac, para o uso do MEC o carregamento será prescrito segundo a distribuição parabólica utilizada na Teoria da Elasticidade.

Serão feitas 4 configurações para serem analisadas, todas com um padrão similar ao que foi mostrado na subseção anterior, porém agora as reações *X* e *Y* serão dadas por:

$$X = -\frac{PLy}{I} \qquad \text{Equação (7-5)}$$

$$Y = -\frac{P}{2I}(c^2 - y^2) \qquad \text{Equação (7-6)}$$

Define-se a configuração como tipo 1 aquela que é fixa nas duas direções para um ponto no centro da seção transversal e apenas na horizontal para a um ponto localizado na extremidade superior, sem as reações *X* e *Y*. No caso do tipo 2 estes esforços, dados pelas equações 7-5 e 7-6 já são impostos. Para uma análise mais realista, impõe-se a restrição do movimento horizontal de toda a face engastada, com apenas o ponto do centro de área estando restrito na vertical. Essa será a configuração do tipo 3. Finaliza-se a análise para uma fixação total da face em ambas as direções, situação que será intitulada como do tipo 4. Tais condições são mostradas na figura 7-17.

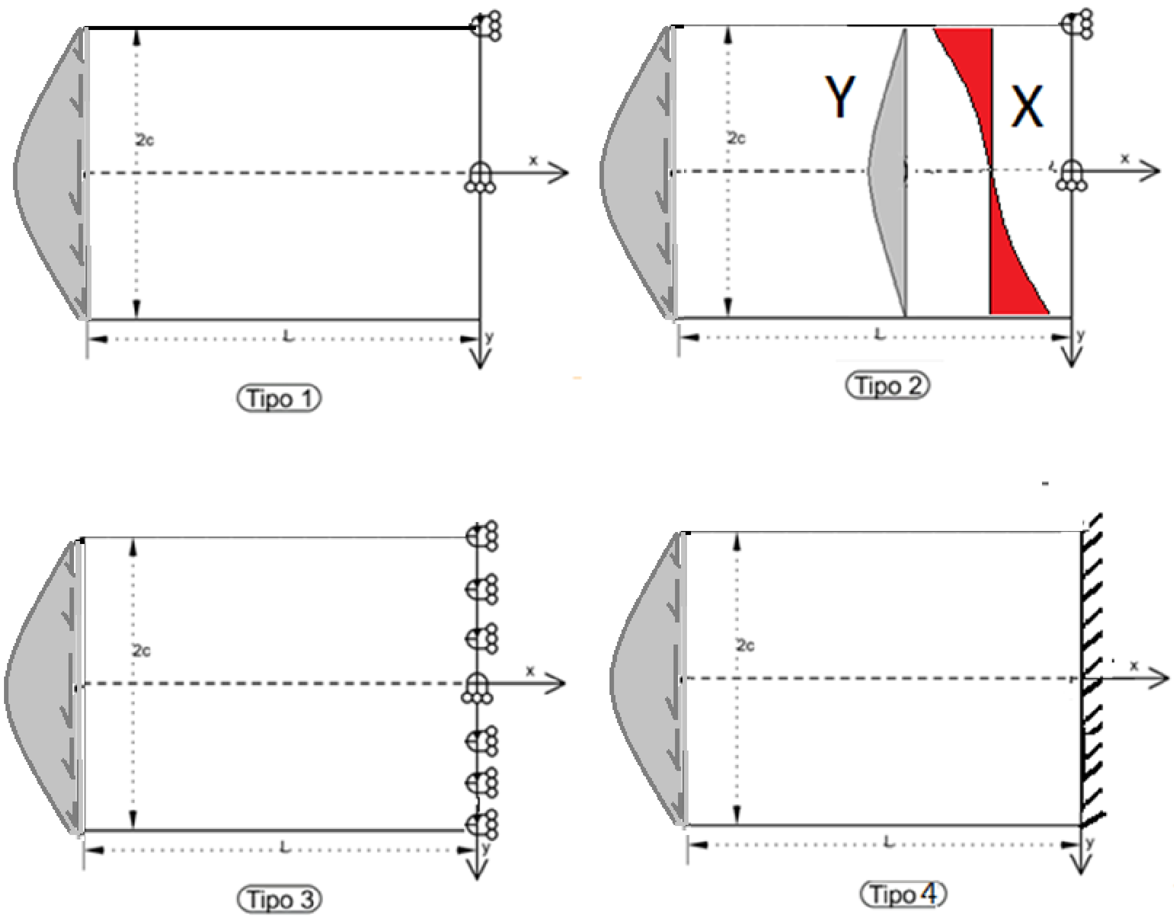

Figura 7-17: Configurações adotadas na análise de viga engastada sob carregamento concentrado distribuído.

7.5.1. Análise da Condição Tipo 1

Quando se avalia a condição biapoiada numa face apenas, nota-se que os valores observados ficam semelhantes ao obtidos na seção 7.4.1, porém com maior intensidade, devido ao fato de uma carga na extremidade causar reações mais intensas nos apoios que no caso de um carregamento uniforme. A figura 7-18 mostra um ilustração fora de escala que busca elucidar a solução encontrada. Nota-se que a compactação e o tracionamento da viga foram mais intensos nesse caso do que no observado na seção 7.4.

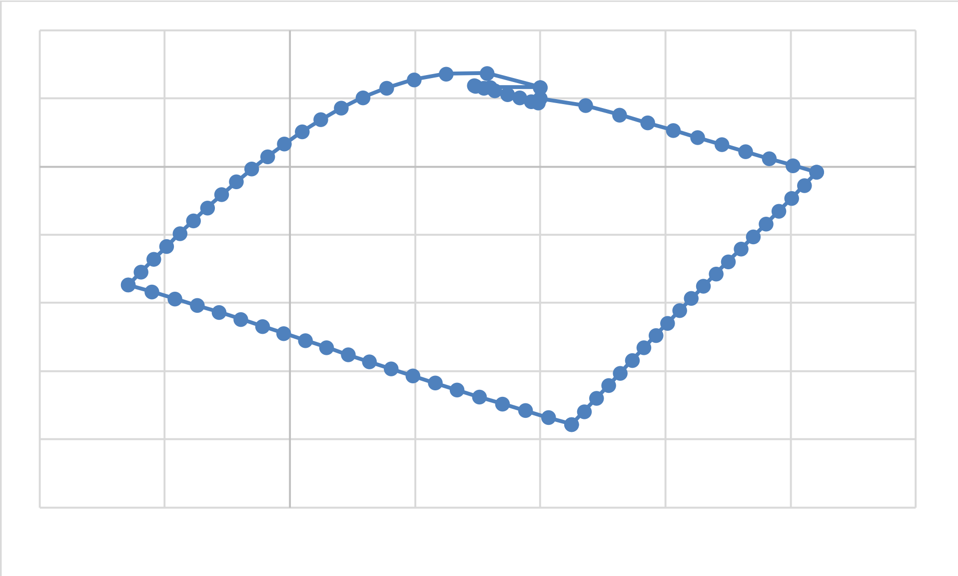

Figura 7-18: Estado da viga engastada com carga concentrada segundo o tipo 1 de configuração.

As reações dos apoios são feitas em regiões muito pequenas, o que configura uma grande concentração de tensões. Conforme pode ser observado no gráfico 7-22, os pontos ficaram altamente carregados e busca gerar o momento que reage a carregamento imposto. É importante ressaltar que ambas as teorias determinam os mesmos valores para flecha no centro da viga e de tensões horizontais para desgaste. Portanto, suas linhas se sobrepõe.

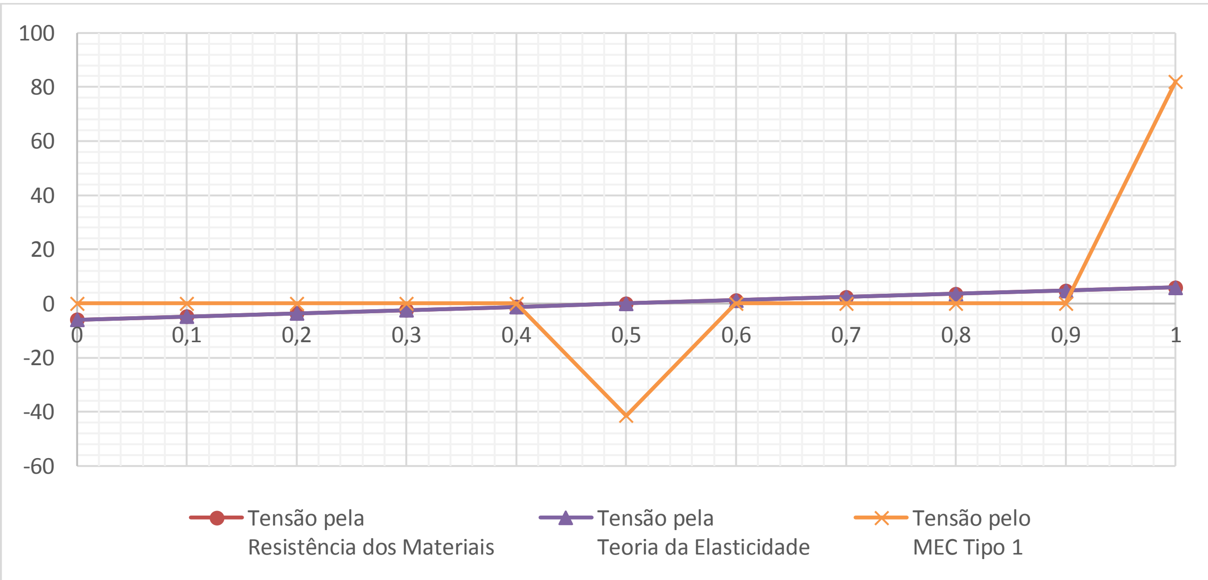

Gráfico 7-22: Campo de tensões horizontais no engaste da viga sob carregamento concentrado tipo 1.

Essa grande concentração de tensões ira influir na flecha gerada pelo MEC, sendo observado uma superestimação do valor de deslocamento vertical máximo, conforme o gráfico 7-23. Apesar de não estar claro nesse gráfico, nos gráficos subsequentes pode ser observado que a flecha máxima teórica é de -3, e para essa configuração se encontra um valor de -37.

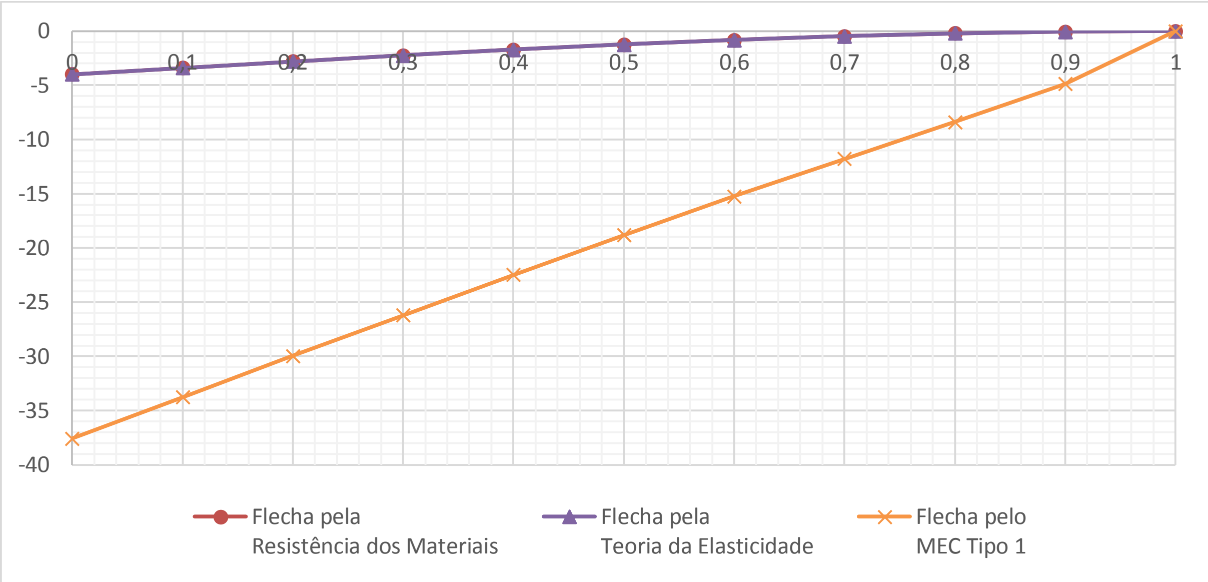

Gráfico 7-23: Flecha observada na viga engastada sob carga concentrada do tipo 1.

Como foi observado na seção 7.4.1, uma grande concentração de tensão nos apoios acabam deslocamento a flecha de uma maneira exagerada. De maneira análoga ao que se observa com esponja quadrada sendo esticada com a ponta dos dedos, a viga sofre grandes deformações nos pontos de concentração de tensão.

7.5.2. Análise da Condição Tipo 2

No momento em que se prescrevem as tensões observadas na Teoria da Elasticidade para a face engastada, as grandes concentrações nos apoios deixam de existir, conforme foi visto na seção acima. Mas, diferentemente do que se obteve na seção 7.4.2, essas tensões representam o problema com mais fidelidade, não causando tensões adicionais nos pontos dos apoios.

A justificativa está na região em que se prescreveu a carga. Essa carga, diferentemente do que se fez na seção 7.4, está a uma distância considerável dos apoios. Pelo princípio de Saint-Venan, a teoria se mostra muito precisa em sua avaliação. Apesar disso, como pode ser visto na figura 7-19, a viga ainda fica com uma aparência que não configura um engaste, mas sim uma face biapoiada.

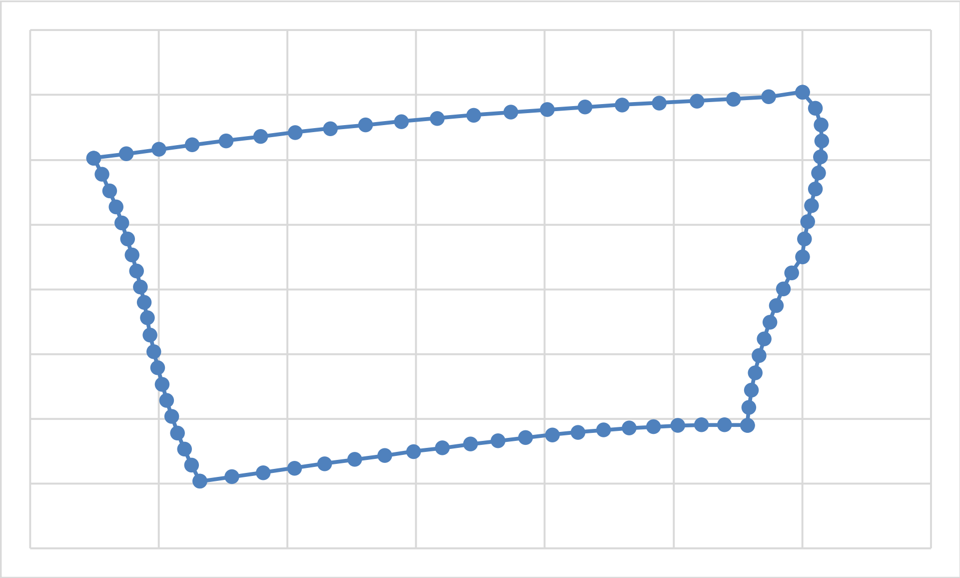

Figura 7-19: Estado da viga engastada com carga concentrada segundo o tipo 2 de configuração.

Conforme dito anteriormente, as tensões prescritas simulam a situação com precisão razoável, configurado o gráfico 7-24. Nele é possível observar que os resultados do MEC e os estimado através da teoria são muito próximos, divergindo apenas nos apoios, em que houve uma pequena inconsistência.

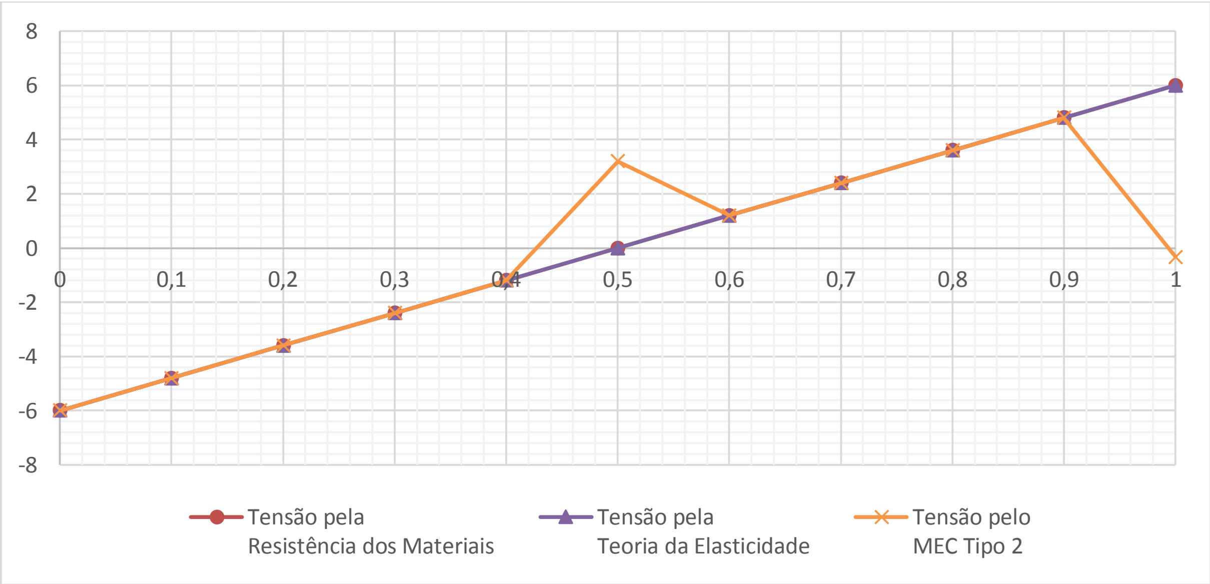

Gráfico 7-24:Campo de tensões horizontais no engaste da viga sob carregamento concentrado tipo 2.

Pelo fato de não haver grandes tensões concentradas nos apoios, a flecha gerada no MEC fica muito próxima da postulada na teoria. Ela não chega a se sobrepor, pelo gráfico 7-24 ainda observa-se alguma concentração de tensões, apesar de pequena intensidade. O gráfico7-25mostra as três flechas, pela Resistencia dos Materiais, pela Teoria da Elasticidade e pelo MEC.

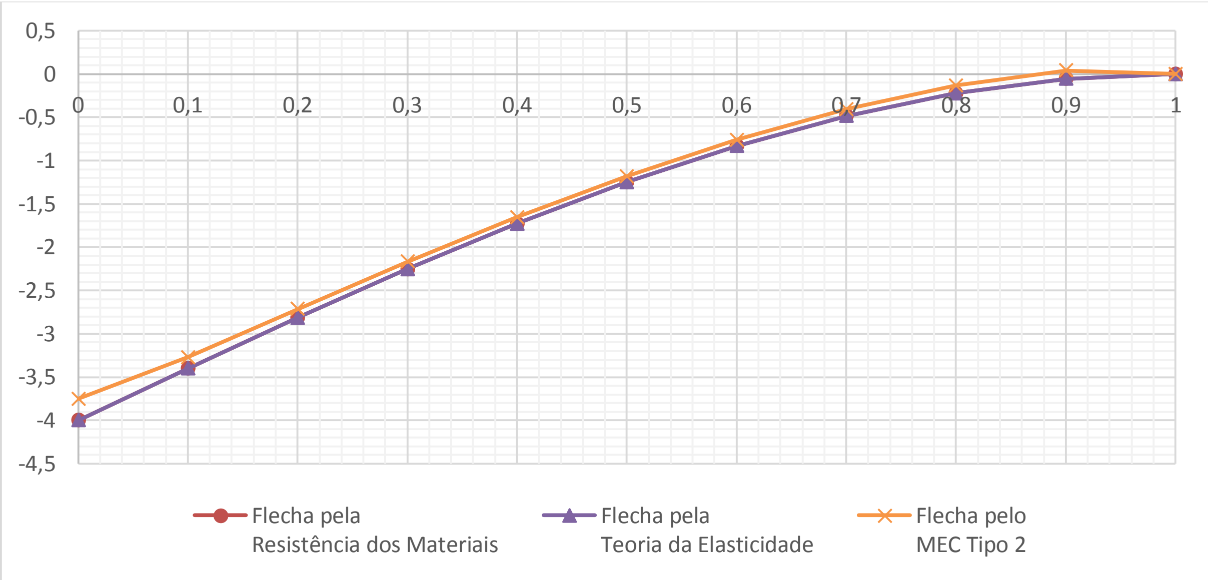

Gráfico 7-25: Flecha observada na viga engastada sob carga concentrada do tipo 2.

7.5.3. Análise da Condição Tipo 3

Para essa configuração, apenas o ponto central é fixo na direção vertical. Para a direção horizontal, se prescreve em toda face o deslocamento horizontal nulo. Nessa condição, é possível observar que há compressão na parte superior da viga e tração na parte inferior, da mesma forma que foi observado na seção 7.4.3. A figura 7-20 mostra um esboço da solução obtida com o MEC. Note que os deslocamentos nos nós da extremidade fixa estão concentrados na parte superior e mais espalhados na inferior.

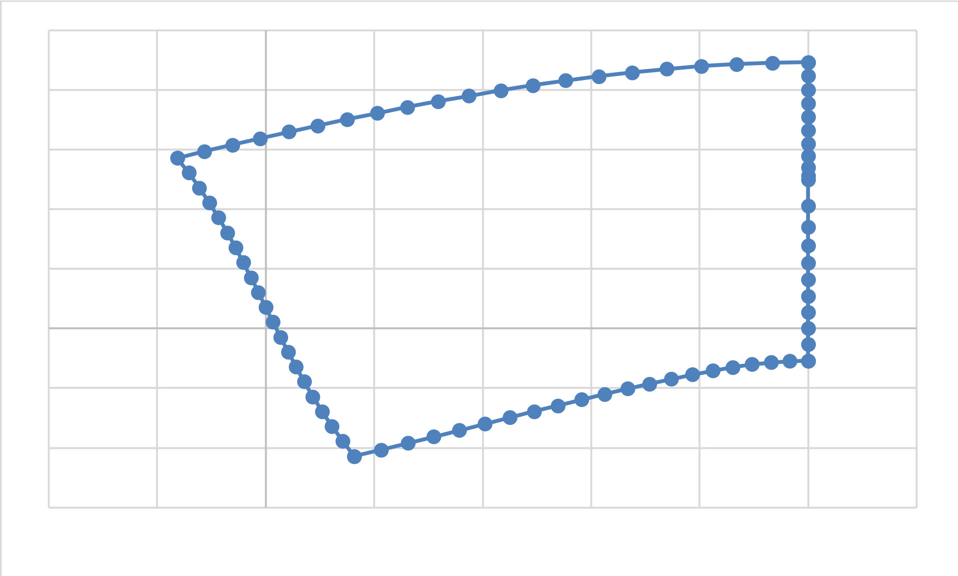

Figura 7-20: Estado da viga engastada com carga concentrada segundo o tipo 3 de configuração.

Nas tensões observada para a região engastada, nota-se um padrão similar ao que se obteve na seção 7.4.3. E, adicionalmente, esse carregamento configura o que está ilustrado na figura 7-16. O que se observa é as tensões aqui causadas estão vinculadas as deformações que garantem a ausência de deslocamentos. Então, conclui-se que os deslocamento que se observaria ao fixar apenas um ponto, conforme feito na Teoria da Elasticidade, podem ser traduzidos qualitativamente as tensões observadas no gráfico 7-26.

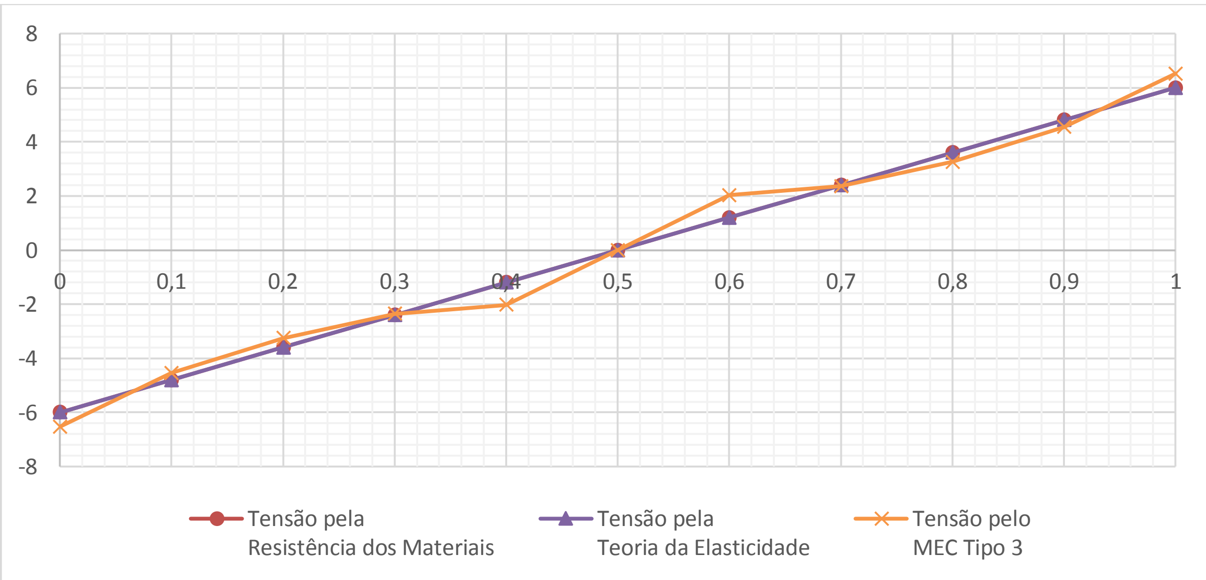

Gráfico 7-26: Campo de tensões horizontais no engaste da viga sob carregamento concentrado tipo 3.

Note, que ainda há concentração das cargas verticais em um único ponto de apoio. E isso configura em resultados mais intensos na flecha gerada no MEC, fazendo com que os valores obtidos sejam inferiores aos observados na seção 7.5.2. A partir do gráfico 7-27, nota-se que o deslocamento vertical máximo no MEC é próximo a -8, enquanto a teoria prega um valor de -3.5.

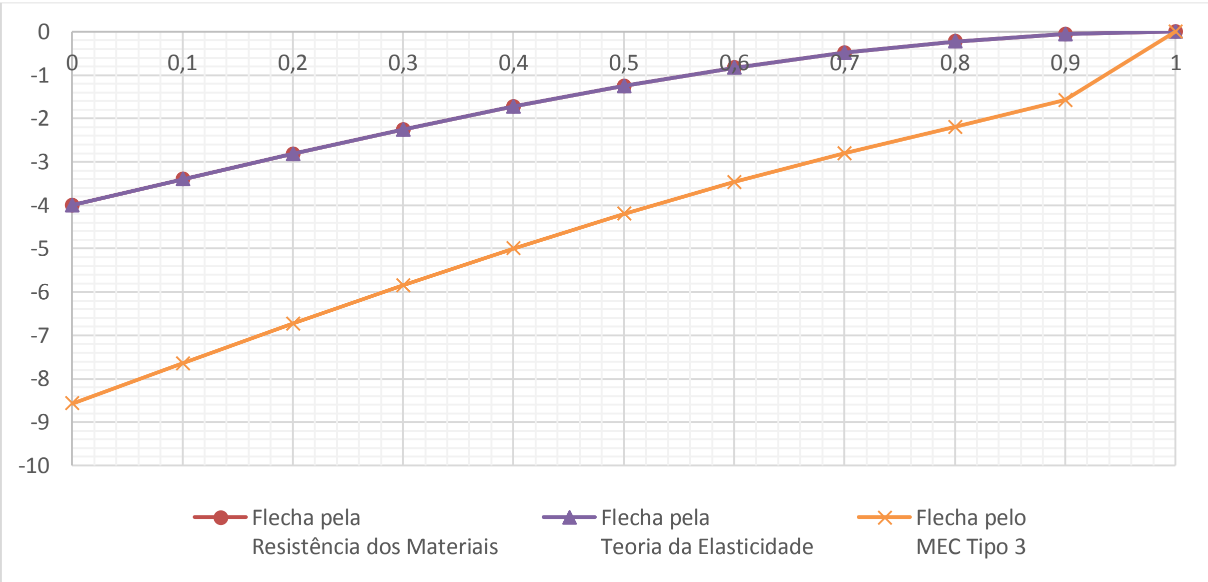

Gráfico 7-27: Flecha observada na viga engastada sob carga concentrada do tipo 3.

7.5.4. Análise da Condição Tipo 4

Como último tipo de configuração, a viga é submetida a um engaste total na face de apoio. Da mesma forma que foi observado na seção 7.4.4, a fixação dos deslocamentos verticais determinam uma tensão adicional pelo fato de estar-se restringindo o movimento do elemento carregado. A figura A-6 esboça a solução obtida pelo MEC. Nota-se que ela não está em escala, seu objetivo é apenas de elucidação.

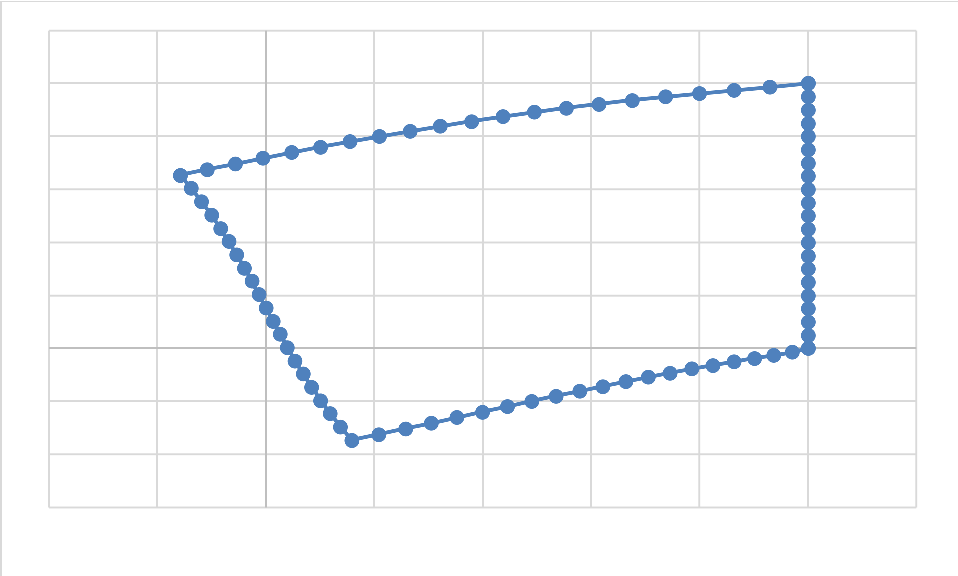

Figura 7-21: Estado da viga engastada com carga concentrada segundo o tipo 4 de configuração.

Para as tesões da região engastada, observa-se uma concentração de tensões nas extremidades advindo da restrição adicional que causa tensões residuais que se acumulam até alcançar a superfície. O gráfico 7-28 mostra de a solução obtida pelo MEC e a estimada pela Teoria da Elasticidade e Resistencia dos Materiais.

Quando se analisa a flecha, os valores são similares ao do caso anterior, porém a ausência de concentração de tensão vertical permite que se observe curvatura de flecha obtida pelo MEC similar ao que se obtém através da teoria. Porém, o valor máximo encontrado difere muito do que se foi estimado teoricamente. No gráfico 7-29 se insere essas flechas.

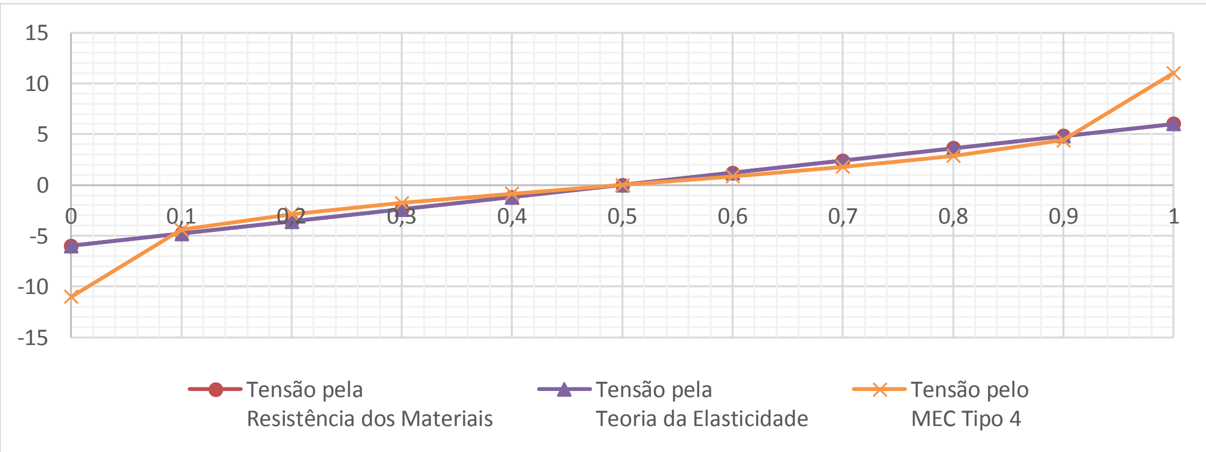

Gráfico 7-28:Campo de tensões horizontais no engaste da viga sob carregamento concentrado tipo 4.

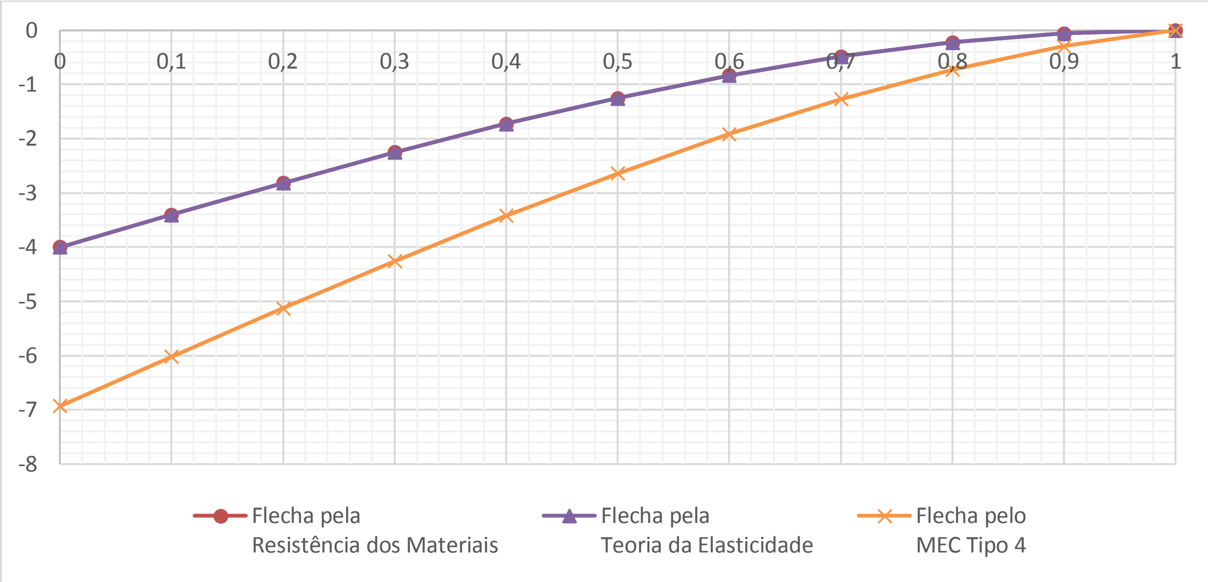

Gráfico 7-29: Flecha observada na viga engastada sob carga concentrada do tipo 4.

Capítulo 8- Conclusão

Os métodos numéricos são hoje utilizados por uma grande quantidade de profissionais, não apenas de engenharia, mas também de várias outras áreas do conhecimento. Vários programas computacionais estão presentes nas empresas de projeto e indústrias de transformação, com potencialidades que realizam uma ampla faixa de funções e objetivos produtivos, incluindo o dimensionamento no projeto e a análise das variáveis de processo. Até a mídia hoje difunde informação sobre as modernas simulações e os programas de uma maneira que soa como que os métodos numéricos e computacionais são a panacéia dos problemas ainda não resolvidos.

Os métodos numéricos são ferramentas, da mesma forma que são a Teoria da Elasticidade e a Resistência dos Materiais. Por isso, a correta utilização e o pleno domínio do conhecimento por trás desse ferramental é fundamental para se resolver os desafios existentes da maneira correta, sem cometer deslizes.

Uma aplicação de condições de contorno incorreta numa peça irá fazer com que o programa gere uma solução duvidosa que qualitativamente parece correta. Por isso, o engenheiro deve dominar o que está fazendo a fim de garantir a correta avaliação dos resultados obtidos, certificando-se que não existe discrepâncias numéricas e físicas.

As vigas são elementos muito aplicados em vários sistemas mecânicos. Certificar-se de que as normas são obedecidas e que não existem grandes flechas são responsabilidades que o profissional deve ter na hora de dimensionar corretamente o equipamento. E mesmo que hoje existam os modernos programas de análise numérica, não se deve negligenciar o uso da teoria e das normas envolvidas no processo.

As normas, além de levarem em conta efeitos de processo produtivo e de fabricação, possuem respaldo legal que protege o engenheiro de falhas de projeto decorridas após o equipamento estar operando. Os métodos numéricos permitem análises mais minuciosas, como, por exemplo, avaliar os pontos críticos que precisam de algum reforço.

Nesse trabalho, várias situações de carregamento comuns de serem vistos na engenharia foram analisados utilizando diversos métodos (Resistência dos Materiais, Teoria da Elasticidade e Método dos Elementos de Contorno), mudando as condições de contorno e observando os resultados.

Percebeu-se que as soluções analíticas, sobretudo aquelas resultantes da Resistência dos Materiais, oferecem soluções para os campos de deslocamento na maior parte dos problemas estudados, em amplitude inferior ao observado pelas simulações computacionais. De outro modo, uma vez que a teoria de vigas da Resistência dos Materiais é unidimensional, ela se torna impotente para prever variações na imposição das condições de contorno, que nos casos práticos – rigorosamente tridimensionais e que podem ser simplificados satisfatoriamente como bidimensionais – podem variar bastante em função da arquitetura da estrutura ou do modo com que se façam as conexões entre as diversas vigas de sustentação.

Nota-se, portanto, que existe grande importância na correta avaliação das condições nas quais a viga está submetida. Se, por exemplo, uma viga é soldada apenas nas extremidades superior e inferior ao invés de toda a face, a flecha e as tensões observadas mudam drasticamente do que foi previsto com uma viga engasta submetida ao mesmo carregamento.

Quanto ao campo de tensões, foram observados resultados muito próximos entre os modelos simplificados da Resistência dos Materiais, dos modelos mais rigorosos da Teoria da Elasticidade e dos modelos mais flexíveis do método numérico discreto que é o Método dos Elementos de Contorno.

Saber avaliar a situação presente e saber utilizar as ferramentas disponíveis são coisas que os engenheiros devem possuir para resolver os desafios presentes no dia a dia.

Não se devem descartar as soluções obtidas pelos métodos teóricos e substituí-los totalmente pelos métodos numéricos, pois muitas vezes uma estimativa rápida pode ser suficiente numa análise preliminar ou para se ter uma idéia simplificada sobre o comportamento da estrutura, em curto intervalo de tempo. Entretanto, embora sejam técnicas versáteis e que permitem obter uma solução rápida, as soluções simplificadas da Resistência dos Materiais devem ser avaliadas criteriosamente com outras ferramentas a fim de que eles apresentem resultados confiáveis que irão otimizar as situações nas quais estão sendo aplicados.

Escorço Bibliográfico

1. BATHE, K.-J. **Finite element procedures in engineering analysis**. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1982.

2. BREBBIA, C. A. **The boundary element method for engineers**. London: Pentech, 1984.

3. BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. **Boundary element techniques: theory and applications in engineering.** [S.l.]: Springer, 1984.

4. CAPUTO DE MOURA, L. **Aplicações Do Método Dos Elementos De Contorno Em Problemas Axis-simétricos Elásticos**. Vitoria: Universidade Federal do Espírito Santo, 2010.

5. CASTRO DOS S., J. **Solução numérica de problemas darcianos convectivos não lineares através do método dos elementos de contorno.** Vitoria: Universidade Federal do Espírito Santo, 2011.

6. FREITAS, A. B.; LOEFFLER, C. F.; VALOTO, L. Performance of the Recursive Procedure in Elastic Problems Modeled by the Boundary Element Method. 2013.

7. HIBBELER, R. C. **Mechanics of materials**. 5th ed ed. Upper Saddle River, N.J: Pearson Education, 2003.

8. LOEFFLER, C. F. O Método Dos Elementos de Contorno, Revista Militar de Ciência e Tecnologia. v. VII, 1990.

9. MALISKA, C. R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**. [s.l.] Livros Tecnicos e Cientificos, 2004.

10. ODEN, J. T.; RIPPERGER, E. A. **Mechanics of Elastic Structures**. 2nd. ed. [s.l.] McGraw-Hill Inc.,US, 1981.

11. REDDY, J. N. **An introduction to the finite element method**. New York, NY: McGraw-Hill Higher Education, 2006.

12. REYNA VERA-TUDELA, C. A. **Elastodinâmica Bidimensional através do Método dos Elementos de Contorno com dupla reciprocidade**. Vitoria: Universidade Federal do Espírito Santo, 1999.

13. TIMOSHENKO, S. **Strength of Materials, Part 1: Elementary Theory and Problems**. [s.l.] D. Van Nostrand Company, Inc., 1940. v. 1

14. TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. **Theory of elasticity**. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 1970.

15. VALOTO, L. **Aplicação do Esquema Recursivo do Método dos Elementos de Contorno em Problemas de Elasticidade**. Vitoria: UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO, 2011.

Apêndices

Apêndice A Soluções Numéricas do MEC Versus Soluções Analíticas

Neste apêndice são apresentadas as soluções numéricas obtidas com o MEC usando elementos lineares em problemas simples da elasticidade linear bidimensi-onal, particularmente resolvendo problemas de vigas que possuem soluções analí-ticas. Foram testadas diversas malhas: com 8, 16, 32, 40 e 80 elementos de contorno lineares. Os pontos internos foram posicionados exatamente na linha média das vigas. Nós duplos foram utilizados nos cantos de todas as malhas.

Três exemplos são apresentados para demonstrar o desempenho do MEC e o efeito do refinamento da malha. O último exemplo, no qual uma carga distribuída horizontalmente possui distribuição senoidal, não foi utilizado nos testes apresentados no decorrer do trabalho, mas ilustra a potencialidade do método na simulação de pro-blemas elásticos mais complexos.

Na avaliação de desempenho, foi calculado o erro médio percentual entre o valor analítico e o valor numérico de deslocamento vertical para todos os pontos nodais.. A expressão de erro percentual considerou o maior valor da flecha analítica no de-nominador, para eliminar distorções provenientes de valores próximos de zero em alguns pontos. Os valores dos nós duplos foram computados no cálculo do erro, pois não foram prescritos valores de deslocamento nas arestas examinadas.

Poder-se-á perceber pelos gráficos que se seguem, nos quais mostra-se grande concordância entre os resultados analíticos e numéricos, que o MEC possui capa-cidade para simular com precisão problemas elásticos, sendo capaz de simular com efetividade casos com condições de contorno e carregamentos mais complexos, para os quais não há solução analítica de referência.

Viga sob flexão pura

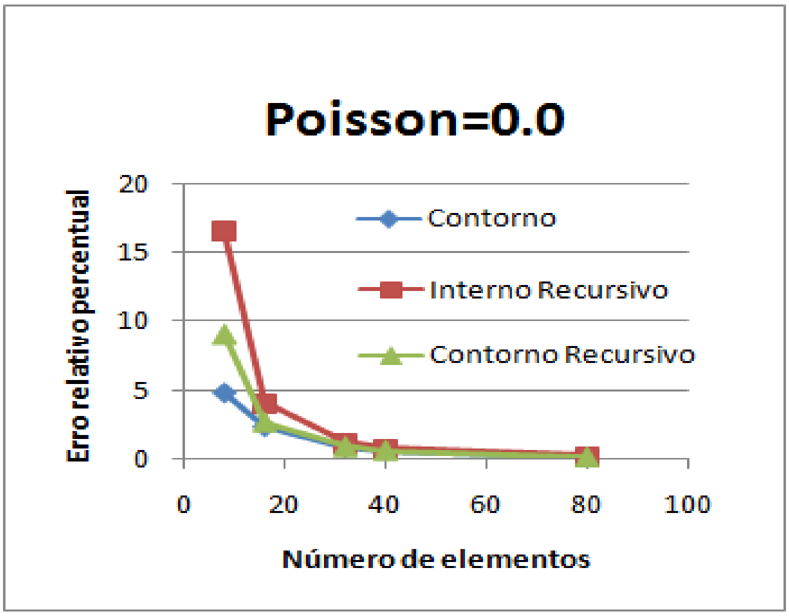

Figura A-1: Erro percentual no cálculo do deslocamento vertical u_y (flecha) para valores de v=0 par a viga sob flexão pura, incluindo os nós do canto.

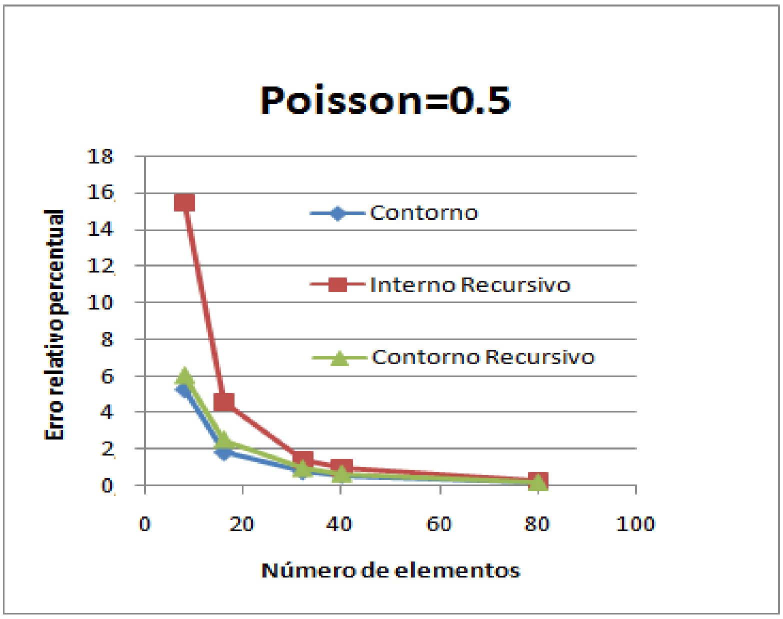

Figura A-2:Erro percentual no cálculo do deslocamento vertical uy (flecha) para valores de v=0,5 par a viga sob flexão pura, incluindo os nós do canto.

Viga sob ação de carga constante

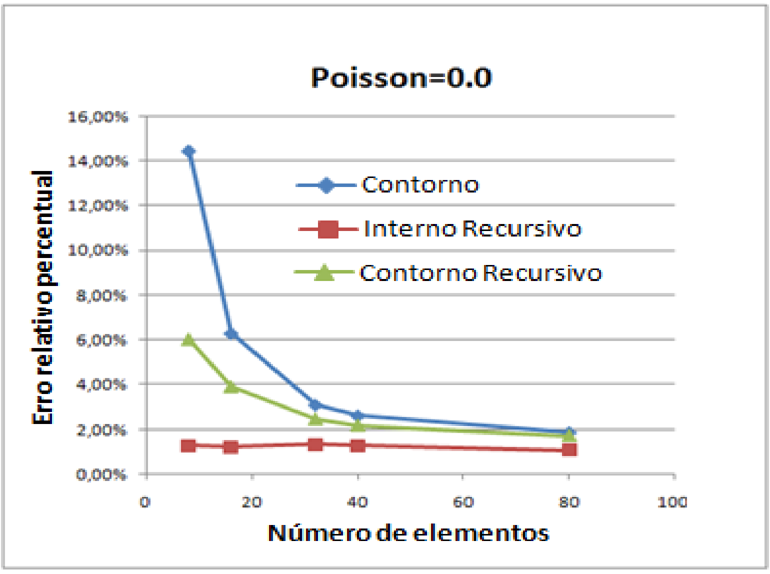

Figura A-3:Curvas de erro percentual no cálculo do deslocamento vertical u_y (flecha) para valores d v=0, para o problema da viga sob carga constante.

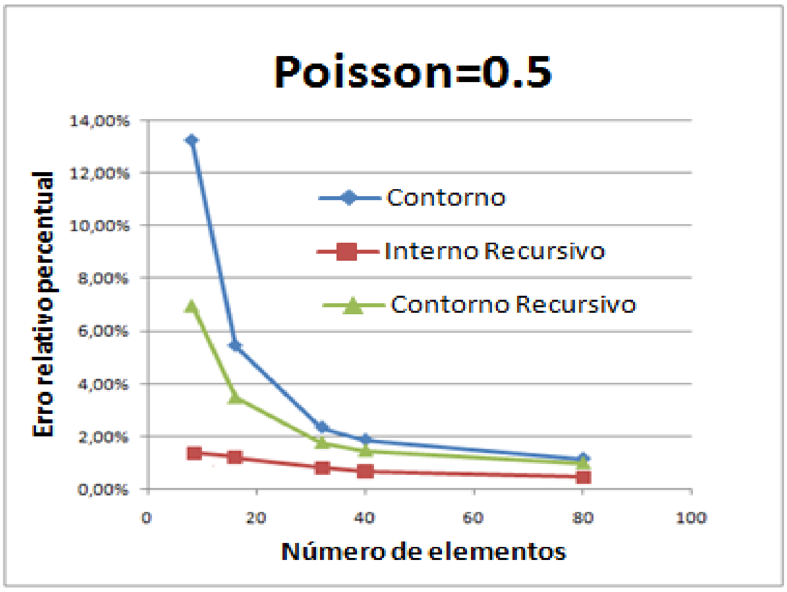

Figura A-4:Curvas de erro percentual no cálculo do deslocamento vertical u_y (flecha) para valores d v=0,5, para o problema da viga sob carga constante.

Viga sob ação de carga senoidal

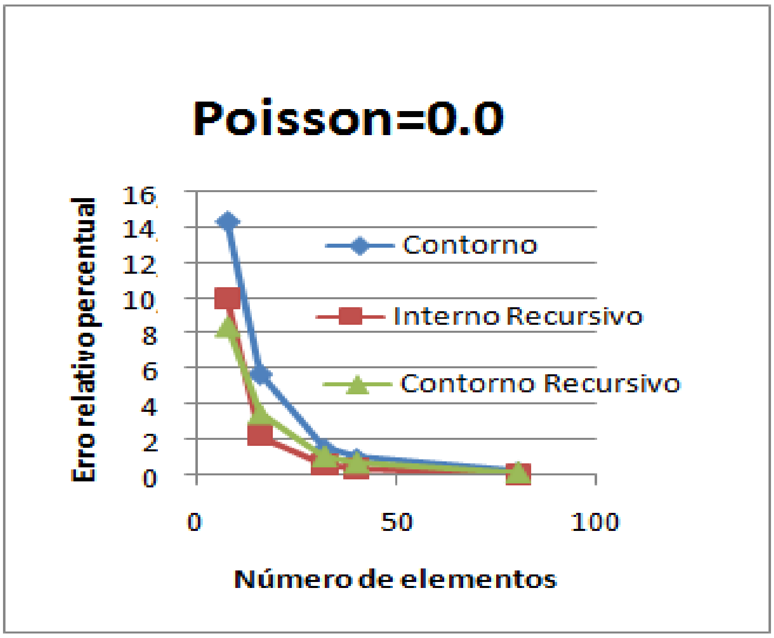

Figura A-5:Curvas de erro percentual no cálculo do deslocamento vertical u_y (flecha) para valores d v=0, para o problema da viga sob carga senoidal.

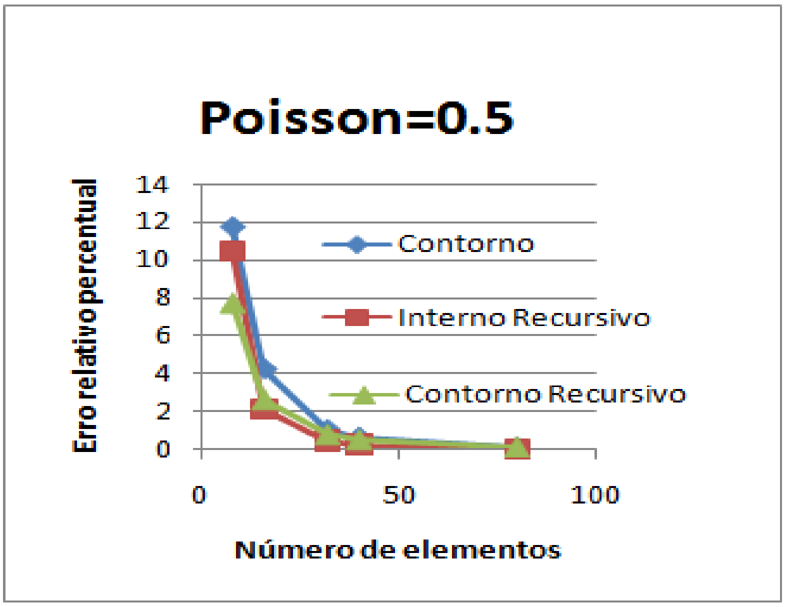

Figura A-6:Curvas de erro percentual no cálculo do deslocamento vertical u_y (flecha) para valores d v=0,5, para o problema da viga sob carga senoidal.