

Allan Damm Piassi
Gerson Augusto Bertolin Filho

**PROCESSO DE APROXIMAÇÃO DE
SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
UTILIZANDO FUNÇÕES DE BASE RADIAL
EM ELEMENTOS ESTRUTURAIS
UNIDIMENSIONAIS**

Vitória - ES, Brasil

2014

Allan Damm Piassi
Gerson Augusto Bertolin Filho

**PROCESSO DE APROXIMAÇÃO DE SOLUÇÃO DE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS UTILIZANDO FUNÇÕES
DE BASE RADIAL EM ELEMENTOS ESTRUTURAIS
UNIDIMENSIONAIS**

Projeto de Graduação apresentado para obtenção do Grau de Engenheiro Mecânico pela Universidade Federal do Espírito Santo.

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
CENTRO TECNOLÓGICO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Orientador: Prof. D.Sc. Fernando César Meira Menandro

Vitória - ES, Brasil

2014

Projeto de Graduação sob o título PROCESSO DE APROXIMAÇÃO DE SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS UTILIZANDO FUNÇÕES DE BASE RADIAL EM ELEMENTOS ESTRUTURAIS UNIDIMENSIONAIS, definido por Allan Damm Piassi e Gerson Augusto Bertolin Filho e aprovado em 2014, em Vitória, Estado do Espírito Santo, pela banca examinadora constituída pelos professores:

**Prof. D.Sc. Fernando César Meira
Menandro**
Orientador

**Prof. D.Sc. Carlos Friedrich Loeffler
Neto**
Examinador

Prof. D.Sc. Antônio Bento Filho
Examinador

Às nossas famílias e amigos.

Agradecimentos

Agradecemos primeiramente à Deus que iluminou nosso caminho durante essa longa caminhada. Às nossas famílias pelo suporte dado durante todos esses anos. Aos amigos, que proporcionaram apoio nas horas difíceis e principalmente ao Prof. Fernando César Meira Menandro, nosso orientador, pelo incomparável apoio e paciência fornecidos no decorrer deste trabalho.

*“Que os vossos esforços desafiem as
impossibilidades, lembrai-vos de que as grandes
coisas do homem foram conquistadas do que
parecia impossível.
(Charles Chaplin)*

Resumo

A interpolação com Funções de Base Radial (FBR) nos chamados métodos livres de malha chama atenção da comunidade científica porque se tornou uma opção à formulação tradicional do Método dos Elementos Finitos (MEF) para solucionar problemas encontrados em diversas áreas de interesse da engenharia em geral. Também na aproximação de problemas de armazenamento com grande quantidade de dados discretos pode-se agora trabalhar com menos informações, gerando uma economia de processamento e tempo, com auxílio de FBRs. O propósito da pesquisa aqui elaborada é a implementação e a solução de problemas estruturais de solução analítica conhecida, em diferentes métodos numéricos, a solução pelo Método dos Elementos Finitos e a solução de um método sem malha, ou método direto de interpolação através de um programa computacional de cálculo desenvolvido em linguagem C++, visando testar as características desse método direto e de algumas FBR utilizadas.

Palavras-chaves: Interpolação. Funções de Base Radial. Métodos sem Malha.

DAMM PIASSI, Allan; BERTOLIN FILHO, Gerson Augusto, **APPROXIMATION PROCESS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS SOLUTIONS USING RADIAL BASIS FUNCTIONS IN ONE-DIMENSIONAL STRUCTURAL ELEMENTS**. 2014. Projeto de Graduação - Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória - ES, Brasil, 2014.

Abstract

Interpolation with Radial Basis Functions (RBF) in the so called Meshless methods draws the scientific community attention because it has become an option to traditional formulation of Finite Elements Methods (FEM) to solve problems found at several engineering areas. Also approximation of large amounts of discrete data storage problems can now be worked with less information, causing process and time economy with the help of RBF. The purpose of this research is the implementation and solution of structural problem with known analytic solution, in different numerical methods, the solution by Finite Elements Methods and the solution by a Meshless Method, or direct interpolation method through an analysis software developed in C++ language, in an attempt test to the characteristics of this direct method and some of the RBF's used.

Key-words: Interpolation. Radial Basis Functions. Meshless Method.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Gráfico "Curva de Sino"	17
Figura 2 – Elemento diferencial submetido a deslocamentos	26
Figura 3 – Tensão Normal gerada por uma Força na superfície da Barra	27
Figura 4 – Gráfico Tensão x Deformação	28
Figura 5 – Barra Engastada com Densidade Constante e Seção Constante	30
Figura 6 – Caso 1: Densidade Constante e Seção Constante: Seção Infinitesimal	30
Figura 7 – Barra Engastada com Densidade Constante e Seção Variável	34
Figura 8 – Caso 3: Densidade Constante e Seção Constante: Seção Infinitesimal	34
Figura 9 – Solid Quad 4 Node 182	37
Figura 10 – Caso 1: Densidade Constante e Seção Constante: Malha	38
Figura 11 – Caso 1: Densidade Constante e Seção Constante: Isométrico	38
Figura 12 – Caso 1: Densidade Constante e Seção Constante: Resultado	39
Figura 13 – Caso 3: Densidade Constante e Seção Constante: Malha	40
Figura 14 – Caso 3: Densidade Constante e Seção Variável: Resultado	40
Figura 15 – Barra com 6 pontos simetricamente distribuidos	42
Figura 16 – Barra com 6 pontos simetricamente distribuidos indicando o centro de cada função.	43
Figura 17 – Caso 1 : Gráfico de Convergência pela função Wendland	45
Figura 18 – Caso 1 : Gráfico de Convergência pela função Wu	46
Figura 19 – Caso 1 : Gráfico de Convergência pela função I_9	46
Figura 20 – Caso 1 : Gráfico de Convergência pela função R_4	47
Figura 21 – Caso 1 : Gráfico de Convergência pela função de Gauss	47
Figura 22 – Caso 2 : Gráfico de Convergência pela função Wendland	48
Figura 23 – Caso 2 : Gráfico de Convergência pela função Wu	49
Figura 24 – Caso 2 : Gráfico de Convergência pela função I_9	49
Figura 25 – Caso 2 : Gráfico de Convergência pela função R_4	50
Figura 26 – Caso 3 : Gráfico de Convergência pela função Wendland	51
Figura 27 – Caso 3 : Gráfico de Convergência pela função Wu	52
Figura 28 – Caso 3 : Gráfico de Convergência pela função I_9	52
Figura 29 – Caso 3 : Gráfico de Convergência pela função R_4	53
Figura 30 – Caso 1 : Gráfico do Erro pela função Wendland	54
Figura 31 – Caso 1 : Gráfico do Erro pela função Wu	54
Figura 32 – Caso 1 : Gráfico do Erro pela função I_9	55
Figura 33 – Caso 1 : Gráfico do Erro pela função R_4	55
Figura 34 – Caso 2 : Gráfico de Convergência pela função Wendland	56
Figura 35 – Caso 3 : Gráfico de Convergência pela função Wu	56

Figura 36 – Caso 2 : Gráfico de Convergência pela função I_9	57
Figura 37 – Caso 2 : Gráfico de Convergência pela função R_4	57
Figura 38 – Caso 3 : Gráfico de Convergência pela função Wendland	58
Figura 39 – Caso 3 : Gráfico de Convergência pela função Wu	58
Figura 40 – Caso 3 : Gráfico de Convergência pela função I_9	59
Figura 41 – Caso 3 : Gráfico de Convergência pela função R_4	59

Lista de tabelas

Tabela 1 – Funções de Wendland	18
Tabela 2 – Funções de Wu	19
Tabela 3 – Caso 1 : Convergência C	44
Tabela 4 – Caso 1 : Convergência p	44
Tabela 5 – Caso 2 : Convergência C	48
Tabela 6 – Caso 2 : Convergência p	48
Tabela 7 – Caso 3 : Convergência C	51
Tabela 8 – Caso 3 : Convergência p	51
Tabela 9 – Caso 1 : Tabela Deslocamento (u) em $x=L$	60
Tabela 10 – Caso 1 : Tabela Deslocamento (du/dx) em $x=0$	60
Tabela 11 – Caso 2 : Tabela Deslocamento (u) em $x=L$	61
Tabela 12 – Caso 2 : Tabela Deslocamento (du/dx) em $x=0$	61
Tabela 13 – Caso 3 : Tabela Deslocamento (u) em $x=L$	62
Tabela 14 – Caso 3 : Tabela Deslocamento (du/dx) em $x=0$	62

Lista de abreviaturas e siglas

EDO	Equações Diferenciais Ordinárias
FBR	Função de Base Radial
FBRC	Função de Base Radial Compacta
MEF	Métodos dos Elementos Finitos
MQM	Método dos Quadrados Mínimos

Lista de símbolos

ρ	Densidade do Material
Ω	Domínio Multidimensional
σ	Tensão
E	Módulo de Elasticidade
ε	Deformação
g	Gravidade
ν	Coefficiente de Poisson

Sumário

1	Introdução	15
2	Fundamentos e Teoria	16
2.1	Funções de Base Radial	16
2.2	Função de Gauss	17
2.3	Funções de Wendland	18
2.4	Funções de Wu	19
2.5	Método dos Resíduos Ponderados	20
2.6	Método da Colocação	21
2.7	Método dos Quadrados Mínimos	22
2.8	Método de Galerkin	24
2.9	Deformação Normal	25
2.10	Tensão Normal	26
2.11	Análise de Equilíbrio	27
2.12	Lei de Hooke	28
3	Análise de Caso e Simulação	29
3.1	Solução Analítica : Densidade Constante e Seção Constante	29
3.2	Solução Analítica : Densidade Variável e Seção Constante	32
3.3	Solução Analítica : Densidade Constante e Seção Variável	33
3.4	Ansys Multiphysics	36
3.4.1	Solução Ansys : Densidade Constante e Seção Constante	38
3.4.2	Solução Ansys : Densidade Variável e Seção Constante	39
3.4.3	Solução Ansys : Densidade Constante e Seção Variável	40
4	Testes e Resultados	41
4.1	Funções Escolhidas para Estudos	41
4.2	Metodologia Experimental	42
4.3	Convergência	43
4.3.1	Convergência : Densidade Constante e Seção Constante	44
4.3.2	Convergência : Densidade Variável e Seção Constante	48
4.3.3	Convergência : Densidade Constante e Seção Variável	51
4.4	Resultados de Simulação	54
4.4.1	Solução C++ : Densidade Constante e Seção Constante	54
4.4.2	Solução C++ : Densidade Variável e Seção Constante	56
4.4.3	Solução C++ : Densidade Constante e Seção Variável	58

4.4.4	Deslocamento : Densidade Constante e Seção Constante	60
4.4.5	Deslocamento : Densidade Variável e Seção Constante	61
4.4.6	Deslocamento : Densidade Constante e Seção Variável	61
5	Considerações Finais	63
6	Referências	65

1 Introdução

Com a necessidade de evolução da engenharia, estudam-se métodos de otimização de resultados e soluções aproximadas a fim de reduzir o gasto de tempo e recursos. Um dos métodos de interesse da ciência é o modelamento de corpos sem a criação das malhas usuais requeridas pelos diversos softwares do mercado, possibilitando assim uma nova abordagem numérica dos problemas correntes e aumentando o horizonte de soluções possíveis.

Métodos sem malha, de acordo com o trabalho de DUARTE (1995) podem ser entendidos como métodos numéricos para a solução de problemas de valor de contorno cujas equações básicas de governo do modelo discreto independem, ou quase, da definição de uma malha, tal qual a do método dos Elementos Finitos. A solução aproximada do problema é construída sem que haja, necessariamente, conectividade entre os pontos nodais pré-estabelecidos. A criação de um modelamento sem malha é possível devido à interpolação de dados com funções de base radial, que por sua vez são sobrepostas umas sobre as outras, em posições convenientemente localizadas no modelo. Esse resultado só é possível porque algumas funções de base radial, tomadas pela literatura, foram utilizadas para a aproximação de equações diferenciais do sistema proposto.

O principal objetivo deste trabalho é demonstrar a viabilidade de um método computacional sem malha, direto, implementado pelo Prof. D. Sc. Fernando César Meira Menandro¹, salientando não apenas suas vantagens como também suas deficiências. O método em questão é livre de malha, necessitando apenas de uma nuvem de pontos, e consiste em uma formulação diferencial direta pois utiliza a própria equação diferencial nas expressões de resíduos. Para demonstrar a eficiência do estudo, será feita a aplicação de funções de base radial em elementos estruturais. O trabalho a seguir desenvolvido não deve ser considerado uma solução definitiva, mas ao contrário, representará um caminho a ser seguido a fim de se obter uma ferramenta numérica capaz de otimizar de forma satisfatória as soluções de equações diferenciais sob a forma de problemas de valor de contorno.

¹ Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo

2 Fundamentos e Teoria

2.1 Funções de Base Radial

As funções de base radial (FBR) são funções que apresentam simetria radial. Esse raio é a diferença entre um ponto genérico x e o centro da função radial. Seja $R^+ = \{x \in \mathbf{R}, x \geq 0\}$ o conjunto de números não negativos e seja $f : R^+ \rightarrow R$ uma função contínua com $f(0) \geq 0$.

$$f(\|x - x_j\|). \quad (2.1)$$

Onde $(x, x_j) \in R^n$ e $\|\cdot\|$ denota a distância euclidiana entre x e x_j , isto é,

$$r = \|x - x_j\| = \sqrt{[(x - x_j) \cdot (x - x_j)]}. \quad (2.2)$$

Logo, pode-se afirmar que a função será a diferença entre o centro da função e o ponto genérico x , logo só a mesma só dependerá do raio, então $\phi(r)$.

Se escolhidos m pontos x_j com $j = 1$, podem-se encontrar os coeficientes reais c_j , tais que a combinação linear,

$$\hat{F}(x) = \sum_{j=1}^m c_j \cdot f(\|x - x_j\|) \quad (2.3)$$

interpola a função dada. Essa equação pode ser chamada de função de base radial, embora o termo preferível seja combinação linear de funções de base radial. As funções de base radial são classificadas como: Funções Globais (com suporte global) e Funções Locais (com suporte local ou compacto). Nas chamadas funções de suporte compacto, define-se o raio do suporte como sendo uma distância ao centro a partir da qual o valor da função e das suas derivadas se anulam. A utilização das funções de suporte compacto é vantajosa para manter as equações válidas apenas nas vizinhanças do centro daquela função. As funções de suporte Global não zeram em nenhum ponto, ou seja, todas as funções tem influência sobre todas as outras.

Sabendo que existem inúmeras funções clássicas (ou globais) e da mesma forma funções compactas, para o estudo de caso desse trabalho foram escolhidas algumas funções para uma análise mais aprofundada, que serão apresentadas mais a frente.

2.2 Função de Gauss

A função de Gauss pode ser usada para a interpolação de equações diferenciais e se caracteriza como uma função clássica ou com suporte global. Sua expressão matemática geral é dada pela equação 2.4.

$$f(x) = a.e^{-\frac{(x-b)^2}{2c^2}} \quad (2.4)$$

Parâmetros a , b e c são números reais constantes.

O gráfico da função de Gauss citada acima tem formato de uma "curva do sino" totalmente simétrica. O parâmetro a é a altura do pico da curva, b é a posição do centro do pico, e c controla a largura do "sino".

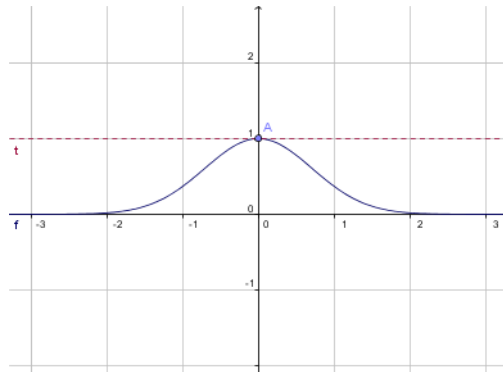


Figura 1 – Gráfico "Curva de Sino"

Sabendo que x está em função de r , a função gaussiana escolhida para a interpolação de valores é,

$$f(x) = e^{-r^2} \quad (2.5)$$

$$\frac{df}{dx} = -2r.e^{-r^2} \quad (2.6)$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = -2r.e^{-r^2}(1 + 2r^2) \quad (2.7)$$

2.3 Funções de Wendland

As funções de Wendland são funções de suporte compacto e foram testadas e propostas por Wendland (1996) e descritas também no artigo de Wong, Hong e Goldberg (WONG; HON; GOLDBERG, 2002, p.84)¹.

$$f(r) = (1 - r)_+^3 \quad (2.8)$$

$$f(r) = (1 - r)_+^4(4r + 1) \quad (2.9)$$

$$f(r) = (1 - r)_+^6(35r^2 + 18r + 3) \quad (2.10)$$

$$f(r) = (1 - r)_+^8(32r^3 + 25r^2 + 8r + 1) \quad (2.11)$$

$$f(r) = (1 - r)_+^{10}(429r^4 + 450r^3 + 210r^2 + 50r + 5) \quad (2.12)$$

$$f(r) = (1 - r)_+^{12}(2084r^5 + 2697r^4 + 1644r^3 + 566r^2 + 108r + 9) \quad (2.13)$$

Tabela 1 – Funções de Wendland

Função	C^n	Positivas Definidas
2.8	C^0	R^5
2.9	C^2	R^3
2.10	C^4	R^3
2.11	C^6	R^3
2.12	C^8	R^3
2.13	C^{10}	R^3

¹ A função 2.8 é dita positiva e definida em R^5 e as funções de 2.9 à 2.13 são ditas positivas e definidas em R^3 . A função 2.8 apresenta continuidade em C^0 , a função 2.9 apresenta continuidade em C^2 , a função 2.10 apresenta continuidade em C^4 , a função 2.11 apresenta continuidade em C^6 , a função 2.12 apresenta continuidade em C^8 , a função 2.13 apresenta continuidade em C^{10} .

2.4 Funções de Wu

As funções de Wu são funções de suporte compacto e foram testadas e propostas por Wu (1995) e descritas no artigo de Wong,Hong e Goldberg (WONG; HON; GOLDBERG, 2002,p.84)². Exemplos de funções de Wu:

$$f(r) = (1 - r)_+^5(1 + 5r + 9r^2 + 5r^3 + r^4) \quad (2.14)$$

$$f(r) = (1 - r)_+^4(4 + 16r + 12r^2 + 3r^3) \quad (2.15)$$

$$f(r) = (1 - r)_+^3(8 + 9r + 3r^2) \quad (2.16)$$

$$f(r) = (1 - r)_+^6(6 + 36r + 82r^2 + 72r^3 + 30r^4 + 5r^5) \quad (2.17)$$

$$f(r) = (1 - r)_+^7(48 + 336r + 928r^2 + 1120r^3 + 720r^4 + 245r^5 + 35r^6) \quad (2.18)$$

$$f(r) = (1 - r)_+^6(64 + 384r + 640r^2 + 515r^3 + 210r^4 + 35r^5) \quad (2.19)$$

$$f(r) = (1 - r)_+^5(128 + 325r + 345r^2 + 175r^3 + 35r^4) \quad (2.20)$$

Tabela 2 – Funções de Wu

Função	C^n	Positivas Definidas
2.14	C^4	R
2.15	C^2	R^3
2.16	C^0	R^5
2.17	C^4	R^3
2.18	C^4	R^5
2.19	C^2	R^7
2.20	C^0	R^9

² A função 2.14 é dita positiva e definida em R . As funções de 2.15 e 2.17 são ditas positivas e definidas em R^3 . As funções de 2.16 e 2.18 são ditas positivas e definidas em R^5 . A função 2.19 é dita positiva e definida em R^7 . A função 2.20 é dita positiva e definida em R^9 . As funções 2.16 e 2.20 apresentam continuidade em C^0 .As funções 2.15 e 2.19 apresentam continuidade em C^2 . As funções 2.14,2.17 e 2.18 apresentam continuidade em C^4 .

2.5 Método dos Resíduos Ponderados

O Método dos Resíduos Ponderados é um método utilizado para aproximação de funções, incluindo a solução de equações diferenciais. Dentre os diversos procedimentos deste método, se destacam: Método Geral, Método da Colocação, Método de Galerkin e Método dos Quadrados Mínimos.

Para a aproximação de uma função $F(\vec{x})$ no domínio Ω em um espaço multidimensional é necessário definir uma função resíduo.

$$R(\vec{x}) = F(\vec{x}) - \hat{F}(\vec{x}) \quad (2.21)$$

Onde

$$\hat{F}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^J c_j \cdot N_j. \quad (2.22)$$

$$N_j = f(\|x - x_j\|). \quad (2.23)$$

Na equação 2.23, tem-se a soma J de funções conhecidas $N_j(\vec{x})$. Os coeficientes c_j devem ser determinados pelo Método dos Resíduos Ponderados.

Para um perfeito ajuste de funções, o resíduo definido deve ser igual a zero em todo o domínio Ω . Portanto, os Métodos dos Resíduos utilizam essa propriedade para assumir que pelo método da soma,

$$S = \sum_{j=1}^n R(x_j)W_j(x_j) = 0, \quad (2.24)$$

ou pelo método da integral,

$$I = \int_{\Omega} R_{\Omega}(\vec{x})W_j(\vec{x})d\Omega = 0, \quad (2.25)$$

Nas equações acima as funções $W_j(\vec{x})$ representam uma série de funções peso arbitrárias. É necessário adotar J funções $W_j(\vec{x})$, para $j = 1, 2, 3, 4, \dots, J$ para que seja obtido o mesmo número de equações e incógnitas (J), sendo assim possível a solução do sistema de equações e por sua vez a determinação dos coeficientes c_j . Sendo assim, independentemente do Método dos Resíduos Ponderados escolhido, utilizando as equações 2.21 e 2.25 obtém-se:

$$I = \int_{\Omega} W_j(\vec{x})[F(\vec{x}) - \hat{F}(\vec{x})]d\Omega = 0, \quad (2.26)$$

$$j = 1, 2, 3, 4, \dots, J$$

$$\int_{\Omega} W_j(\vec{x}) F(\vec{x}) d\Omega = \int_{\Omega} W_j(\vec{x}) \hat{F}(\vec{x}) d\Omega \quad (2.27)$$

$$j = 1, 2, 3, 4, \dots, J$$

Utilizando a equação 2.23, tem-se que:

$$\int_{\Omega} W_j(\vec{x}) F(\vec{x}) d\Omega = \int_{\Omega} W_j(\vec{x}) \left(\sum_{j=1}^J c_j \cdot N_i \right) d\Omega \quad (2.28)$$

$$j = 1, 2, 3, 4, \dots, J$$

Rearranjando a equação,

$$\int_{\Omega} W_j(\vec{x}) [F(\vec{x})] d\Omega = \int_{\Omega} W_j(\vec{x}) \left[\sum_{j=1}^J c_j \cdot N_i \right] d\Omega \quad (2.29)$$

A equação 2.29 pode ser escrita também pela forma de matriz, assumindo que:

$$A_{ij} = \int_{\Omega} W_j(\vec{x}) [N_i(\vec{x})] d\Omega \quad (2.30)$$

$$b_j = \int_{\Omega} W_j(\vec{x}) [F(\vec{x})] d\Omega \quad (2.31)$$

Então:

$$[A_{ij}] \{c_j\} = \{b_i\} \quad (2.32)$$

2.6 Método da Colocação

O Método da colocação consiste na tentativa de zerar o resíduo em um determinado ponto $x_i(\vec{x})$, ou seja, igualar as funções $F(\vec{x})$ e $\hat{F}(\vec{x})$ nesse ponto. Para obter esse resultado, é necessário encontrar uma série de funções peso (W_j) de modo que

$$\int_{\Omega} R_{\Omega}(\vec{x}) W_j(\vec{x}) d\Omega = R(\vec{x}_i) \quad (2.33)$$

E sabendo que

$$\int_{\Omega} R_{\Omega}(\vec{x}) W_j(\vec{x}) d\Omega = 0 \quad (2.34)$$

então

$$R(\vec{x}_i) = 0 \quad (2.35)$$

A função $W(x)$ que obedece à propriedade acima é conhecida da teoria de funções de singularidade: trata-se da função Delta.

2.7 Método dos Quadrados Mínimos

O critério dos mínimos quadrados (ou Método dos Quadrados Mínimos (MQM)) é utilizado em situações onde há muito mais dados a serem avaliados do que parâmetros; nesse caso, a equiparação exata não deve ser levada em consideração. Para a utilização deste método é determinado que se a função não pode ser aproximada de forma exata, seu erro pode ser reduzido pela aproximação desta função.

Além disso, quando os dados são obtidos de forma experimental, ou seja, existe um erro substancial associado aos dados, o método mais correto a ser utilizado é o de mínimos quadrados. Inicialmente é apresentado o método para um conjunto contínuo de dados representando a função $F(\vec{x})$. Para isso define-se uma função resíduo, contínua, como:

$$R(\vec{x}) = F(\vec{x}) - \hat{F}(\vec{x}). \quad (2.36)$$

Esta função é identicamente nula caso $\hat{F}(\vec{x})$ represente analiticamente a função $F(\vec{x})$. O objetivo do método é fazer com que $\hat{F}(\vec{x})$ chegue o mais próximo possível desta solução analítica. Calcula-se o erro através de uma norma quadrática (sempre positiva).

Assim, o objetivo é encontrar os coeficientes c_j que minimizam a função:

$$Q = \int_{\Omega} (R(\vec{x}))^2 d\Omega \quad (2.37)$$

ou

$$Q = \int_{\Omega} (F(\vec{x}) - \hat{F}(\vec{x}))^2 d\Omega \quad (2.38)$$

Os coeficientes desejados representam o mínimo da função Q , e são encontrados aplicando as derivadas parciais em relação as incógnitas e igualando-as a zero, como a seguir:

$$\frac{dQ}{dc_i} = 0 \quad (2.39)$$

Assim,

$$\frac{dQ}{dc_i} = \frac{\partial}{\partial c_i} \int_{\Omega} [F(\vec{x}) - \hat{F}(\vec{x})]^2 = 0 \quad (2.40)$$

$$\frac{dQ}{dc_i} = \frac{\partial}{\partial c_i} [F(\vec{x}) - \hat{F}(\vec{x})]^2 d\Omega = 0 \quad (2.41)$$

$$\frac{dQ}{dc_i} = 2 \int_{\Omega} [F(\vec{x}) - \hat{F}(\vec{x})]^2 \left(-\frac{\partial \hat{F}(\vec{x})}{\partial c_i}\right) d\Omega = 0 \quad (2.42)$$

Substituindo a derivada parcial pelo resultado e dividindo por -2 , e lembrando que

$$\hat{F}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^m c_j \cdot f(\|x - x_j\|) \quad (2.43)$$

$$\hat{F}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^m c_j \cdot N_j \quad (2.44)$$

onde

$$N_j = f(\|x - x_j\|). \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \hat{F}(\vec{x})}{\partial c_i} = \frac{\partial}{\partial c_i} \left[\sum_{j=1}^m c_j \cdot N_j \right] d\Omega = N_i(\vec{x}) \quad (2.46)$$

$$\int_{\Omega} [F(\vec{x}) - \hat{F}(\vec{x})] N_i(\vec{x}) d\Omega = 0 \quad (2.47)$$

O Método dos Mínimos Quadrados para aproximação de funções desconhecidas, equivale ao chamado Método de Galerkin, desde que a seguinte condição seja realizada:

$$W_i(\vec{x}) = N_i(\vec{x}) \quad (2.48)$$

Sabendo que as equações ordinárias que regem os exemplos estudados nesse trabalho são Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), o Método dos Quadrados Mínimos para aproximação de valores não se faz necessário. Para a resolução de uma EDO com esse método, é necessário estabelecer um operador matemático para a solução do resíduo.

Define-se resíduo:

$$R_\Omega = \mathcal{L}(\hat{F}(\vec{x})) + p(\vec{x}) \quad (2.49)$$

$$R_\Omega = \mathcal{L}(\sum c_i N_i) + p \quad (2.50)$$

onde \mathcal{L} é um operador diferencial e p é uma função da variável dependente x .

Para o Método dos Quadrados Mínimos, se minimiza o resíduo, portanto:

$$\int_\Omega R_\Omega^2 d\Omega = \int_\Omega (\mathcal{L}(\sum c_j N_j) + p)^2 d\Omega \quad (2.51)$$

Para minimizar a função, faz-se:

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \int_\Omega (\mathcal{L}(\sum c_i N_i) + p)^2 d\Omega = 0 \quad (2.52)$$

Derivando a equação,

$$2 \int_\Omega (\mathcal{L}(\sum c_j N_j) + p) \mathcal{L}(N_i) d\Omega = 0 \quad (2.53)$$

Onde,

$$\mathcal{L}(N_i) = W_i \quad (2.54)$$

O Método dos Quadrados Mínimos foi escolhido como método padrão para análise dos exemplos comentados à frente.

2.8 Método de Galerkin

O método de Galerkin é utilizado quando se adota a aproximação de funções N_j , mutuamente ortogonais (duas funções são ditas ortogonais se a integral de seu produto sobre o domínio é nulo), no domínio do problema.

Para o Método de Galerkin adota-se:

$$W_i(\vec{x}) = N_i(\vec{x}). \quad (2.55)$$

$$i = 1, 2, 3, 4, \dots, J$$

Assim, a equação final do Método de Galerkin é

$$W_i(\vec{x}) = N_i(\vec{x}). \quad (2.56)$$

$$i = 1, 2, 3, 4, \dots, J$$

$$\int_{\Omega} N_i(\vec{x}) R(\vec{x}) d\Omega = 0 \quad (2.57)$$

$$i = 1, 2, 3, 4, \dots, J$$

Ou

$$\int_{\Omega} N_i(\vec{x}) [F(\vec{x}) - \sum_{j=1}^{j=1} c_j \cdot N_j(\vec{x})] d\Omega = 0 \quad (2.58)$$

$$i = 1, 2, 3, 4, \dots, J$$

Então

$$\int_{\Omega} N_i(\vec{x}) [\sum_{j=1}^{j=1} c_j \cdot N_j(\vec{x})] d\Omega = \int_{\Omega} N_i(\vec{x}) [F(\vec{x})] d\Omega \quad (2.59)$$

$$i = 1, 2, 3, 4, \dots, J$$

Como os coeficientes c_j independem dos pontos internos do domínio, e as funções são contínuas ao longo do domínio,

$$\sum_{j=1}^{j=1} [\int_{\Omega} N_i(\vec{x}) N_j(\vec{x}) d\Omega] c_j = \int_{\Omega} N_i(\vec{x}) [F(\vec{x})] d\Omega \quad (2.60)$$

Se forem adotadas funções que são mutuamente ortogonais, a matriz A_{ij} será de fato uma matriz diagonal. Para funções radiais de suporte compacto FRSCs não se tem a propriedade de ortogonalidade, porém ao se adotar o suporte compacto é garantido a localização do problema a funções onde o suporte se sobreponha, garantindo a obtenção de uma matriz esparsa, sendo ainda simétrica.

2.9 Deformação Normal

A deformação Normal é definida como a razão entre o comprimento do corpo deformado devido às forças atuantes e o seu valor de comprimento inicial, anterior à ação das forças, podendo ser forças trativas ou compressivas. Considere um elemento do sistema que receba deslocamento em uma de suas faces conforme a figura abaixo.

O deslocamento em x pode ser descrito como:

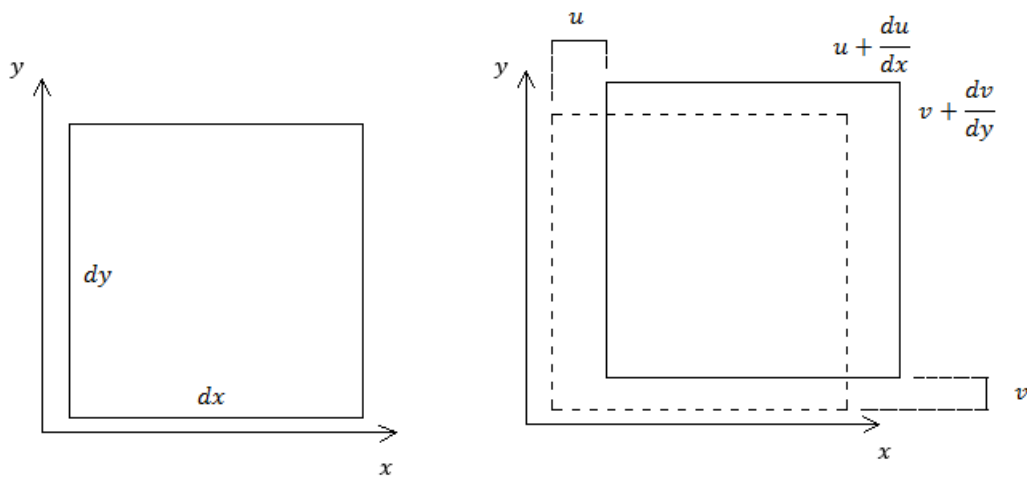


Figura 2 – Elemento diferencial submetido a deslocamentos

$$\varepsilon_x = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u}{dx} \quad (2.61)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.62)$$

O mesmo pode ser feito para a direção y:

$$\varepsilon_y = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial y} dy - v}{dy} \quad (2.63)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.64)$$

2.10 Tensão Normal

Para que a estrutura seja capaz de suportar a carga aplicada, cada uma das barras que a compõem devem ser capazes de suportar o esforço normal atuante. Para que isso seja verificado é necessário conferir se o material possui capacidade para resistir ao esforço normal em cada barra.

Porém, a capacidade de resistência de um material é caracterizada por um efeito pontual. Sabendo que o esforço interno é um esforço integral da seção transversal de uma barra, para determinar o efeito pontual da barra, é preciso dividir o esforço normal pela área da seção transversal. O resultado desta divisão é chamado Tensão Normal, que tem como equação:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (2.65)$$

onde F é o esforço normal na barra e A a área da seção transversal.

A tensão normal representa a sollicitação em um ponto da seção transversal de uma barra onde atua um esforço axial. Está sendo considerado, por hipótese, que as tensões normais provocadas por esforços axiais normais à superfície são constantes ao longo da seção transversal. Para tanto, é necessário que o ponto de aplicação do esforço normal seja no centro de gravidade da seção transversal.

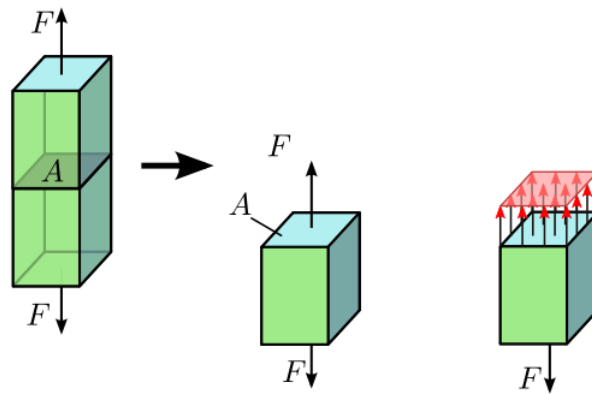


Figura 3 – Tensão Normal gerada por uma Força na superfície da Barra

2.11 Análise de Equilíbrio

O equilíbrio de Forças em um corpo é exigido para que o mesmo não apresente movimento acelerado ao longo de uma trajetória reta ou curva. Essas condições podem ser expressas matematicamente pela fórmula que representa a somatória de todas as forças que agem no corpo.

$$\sum F = 0; \quad (2.66)$$

Para impedir que um corpo gire, é necessário fazer o equilíbrio de Momentos em um ponto O dentro ou fora do corpo. A soma de todos os momentos em um corpo é matematicamente apresentada na equação:

$$\sum M = 0; \quad (2.67)$$

As análises de equilíbrio dos modelos estudados nesse trabalho serão apresentadas no capítulo seguinte, tendo em vista que os modelos são diferentes, e, portanto, apresentam particularidades para cada análise.

2.12 Lei de Hooke

Desenvolvida por Robert Hooke em 1676, a Lei de Hooke expressa matematicamente a relação linear, dentro da região elástica, que a deformação tem com a tensão. Hooke desenvolveu tal expressão ao observar o comportamento de um peso ligado a uma mola e observando que a variação da mola dependia diretamente da força que era exercida sobre ela.

Analogamente, para o caso de materiais distintos a mesma relação é obtida em ensaios em que se incrementa a magnitude das tensões em corpos de provas pré-determinados de materiais específicos. Com os resultados obtidos é gerado um gráfico tensão x deformação.

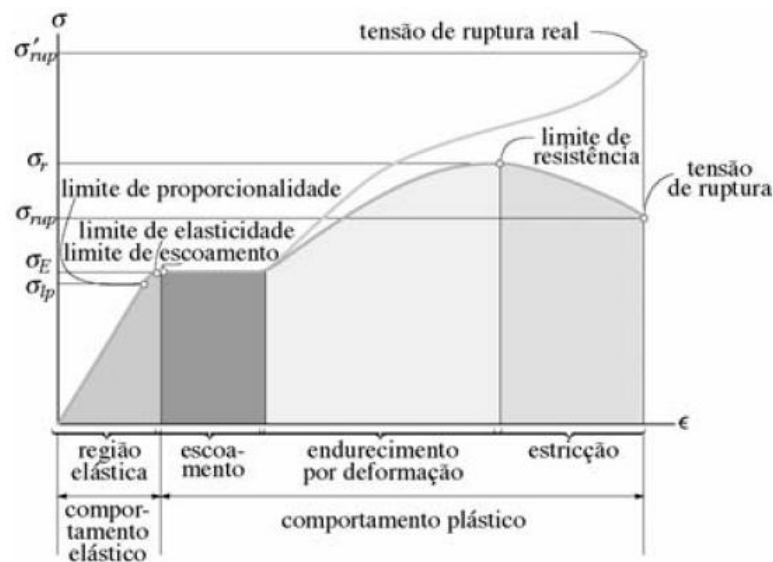


Figura 4 – Gráfico Tensão x Deformação

Observa-se a relação linear que existe na região elástica entre a deformação e a tensão. Baseado nesse gráfico, surgiu a expressão:

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad (2.68)$$

Onde E representa a constante de proporcionalidade, denominada Módulo de Elasticidade ou Módulo de Young.

3 Análise de Caso e Simulação

Para a realização da análise comparativa dos resultados de aproximação e eficiência de FBR's em problemas físicos, são usados como base a formulação analítica de uma barra engastada em uma de suas extremidades e os resultados gerados pelo software ANSYS MULTIPHYSICS para os mesmos modelos. A fim de aprofundar o estudo de caso, é tomado como base para as aproximações de valores um programa computacional de cálculo desenvolvido em linguagem C++ pelo Prof. D. Sc. Fernando César Meira Menandro¹.

Os modelos utilizados como estudo são barras engastadas verticalmente com 2500 milímetros de comprimento e as únicas forças atuantes sobre os corpos são a gravidade e o peso próprio. Adotou-se a densidade (ρ) de $3930\text{kg}/\text{m}^3$, que equivale a metade da densidade do aço estrutural ($\rho_{\text{açoestrutural}} = 7860\text{kg}/\text{m}^3$). Para o caso com densidade variável especificamente, o valor da mesma varia entre $3930\text{kg}/\text{m}^3$ e $7860\text{kg}/\text{m}^3$ para que não haja inconsistência nas condições de contorno e o valor máximo não seja mais denso que o aço. Foi adotado também o Módulo de Elasticidade (E) no valor de 210GPa e Coeficiente de Poisson (ν) igual a 0,3. Todos os casos considerados neste estudo tem material elástico linear.

Os casos atribuídos escolhidos para estudo foram:

1. Barra com densidade (ρ) constante e seção constante;
2. Barra com densidade (ρ) variável e seção constante;
3. Barra com densidade (ρ) constante e seção variável.

3.1 Solução Analítica: Densidade Constante e Seção Constante

Para esse primeiro estudo, foi considerado a densidade do material ($\rho = 3930\text{kg}/\text{m}^3$) e a seção da barra constantes. Com a intenção de determinar as equações analíticas que regem o deslocamento da barra, foram avaliados os esforços atuantes na seção infinitesimal através de um diagrama de equilíbrio na seção destacada.

As condições de contorno natural e essencial são, respectivamente:

Para $x = 0$:

$$u = 0; \tag{3.1}$$

¹ Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo



Figura 5 – Barra Engastada com Densidade Constante e Seção Constante

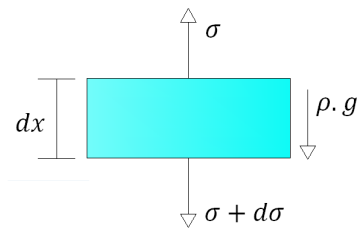


Figura 6 – Caso 1: Densidade Constante e Seção Constante: Seção Infinitesimal

Para $x = L$:

$$\frac{du}{dx} = 0; \quad (3.2)$$

Que corresponde à tensão,

$$\sigma = 0.; \quad (3.3)$$

Invocando a condição de equilíbrio na direção x :

$$\sum F_x = 0 \quad (3.4)$$

$$(\sigma + d\sigma)A - A\sigma + A\rho g dx = 0.; \quad (3.5)$$

Manipulando a equação 3.5 obtém-se :

$$d\sigma = -\rho g dx \quad (3.6)$$

$$\frac{d\sigma}{dx} = -\rho g \quad (3.7)$$

Pela Lei de Hooke (2.68) pode-se admitir que:

$$\sigma = E \frac{du}{dx}. \quad (3.8)$$

Derivando a equação 3.8 em relação a x ,

$$\frac{d\sigma}{dx} = E \frac{d^2u}{dx^2}. \quad (3.9)$$

Substituindo a equação 3.9 na equação 3.7,

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{\rho g}{E}. \quad (3.10)$$

A equação diferencial 3.10 descreve o deslocamento de qualquer ponto da barra estudada. Como explicitado anteriormente, a barra está submetida apenas ao peso próprio e à gravidade.

Assumindo a densidade constante (ρ) e integrando a equação 3.10 em relação a x , obtém-se:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\rho g}{E}x + C_1. \quad (3.11)$$

Integrando novamente, agora a equação (3.11),

$$u(x) = -\frac{\rho g}{E} \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2. \quad (3.12)$$

Para determinar $u(x)$ é necessário calcular as constantes a partir das condições de contorno do sistema. Portanto, utilizando as equações 3.1 para $x = 0$ e 3.2 e 3.3 para $x = L$,

$$C_2 = 0 \quad (3.13)$$

$$C_1 = \frac{\rho g L}{E}. \quad (3.14)$$

A equação que descreve o deslocamento de qualquer ponto da barra com seção e densidade constante é:

$$u(x) = -\frac{\rho g x^2}{E} + \frac{\rho g L}{E}x. \quad (3.15)$$

A fim de obter uma solução numérica como base e assumindo os valores já comentados no início da seção, $\rho = 3930 \text{ kg/m}^3$, $L = 2500 \text{ mm}$ e $E = 210 \text{ GPa}$ e substituindo os mesmos na equação 3.15:

$$u(L) = -\frac{3930.9,812,5^2}{210.10^9} + \frac{3930.9,812,5}{210.10^9}2,5 \quad (3.16)$$

$$u(L) = 5,737.10^{-7} \text{ m} \quad (3.17)$$

O deslocamento máximo da barra, na posição $x = L$ será de $5,737.10^{-7} \text{ m}$. O valor de derivada de u em relação a x na posição $x = 0$ é $4,5896.10^{-7}$.

3.2 Solução Analítica : Densidade Variável e Seção Constante

Para o estudo da barra com uma densidade variável foi feita uma consideração visando o valor não nulo na posição da barra onde $x = 0$. Portanto, adotou-se

$$\rho_x = \rho \frac{x}{L} + \rho. \quad (3.18)$$

Com essa consideração, para a posição $x = 0$, $\rho = 3930 \text{ kg/m}^3$. Para a posição $x = L = 2500 \text{ mm}$, $\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$. Portanto, utilizando a equação 3.10,

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{\rho_x g}{E}.$$

Substituindo a equação 3.10 pela equação 3.18,

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\left(\rho \frac{x}{L} + \rho\right) \frac{g}{E} \quad (3.19)$$

Manipulando a equação 3.19,

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{\rho g}{E} \left(\frac{x}{L} + 1\right). \quad (3.20)$$

Integrando e equação 3.20 em função de x ,

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\rho g}{E} \left(\frac{x^2}{2L} + x + C_1\right). \quad (3.21)$$

Integrando novamente em função de x , obtém a equação diferencial que descreve o deslocamento de qualquer ponto da barra estudada:

$$u(x) = -\frac{\rho g}{E} \left(\frac{x^3}{6L} + \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \right). \quad (3.22)$$

Para determinar $u(x)$ é necessário calcular as constantes a partir das condições de contorno do sistema. Portanto, utilizando as equações 3.1 para $x = 0$ e 3.2 e 3.3 para $x = L$,

$$C_2 = 0 \quad (3.23)$$

$$C_1 = \frac{-3L}{2} \quad (3.24)$$

a equação que descreve o deslocamento de qualquer ponto da barra com seção e densidade variável é:

$$u(x) = -\frac{\rho g}{E} \left(\frac{x^3}{6L} + \frac{x^2}{2} - \frac{3Lx}{2} \right) \quad (3.25)$$

A fim de obter uma solução numérica como base e assumindo os valores já comentados no início da seção, $\rho = 3930 \text{ kg/m}^3$, $L = 2500 \text{ mm}$ e $E = 210 \text{ GPa}$ e substituindo os mesmos na equação 3.25

$$u(L) = -\frac{3930 \cdot 9,81}{210 \cdot 10^9} \left(\frac{2,5^3}{6 \cdot 2,5} + \frac{2,5^2}{2} - \frac{3 \cdot 2,5^2}{2} \right) \quad (3.26)$$

$$u(L) = 9,562 \cdot 10^{-7} \text{ m} \quad (3.27)$$

O deslocamento máximo da barra, na posição $x = L$ será de $9,562 \cdot 10^{-7} \text{ m}$. O valor de derivada de u em relação a x na posição $x = 0$ é $6,8845 \cdot 10^{-7}$.

3.3 Solução Analítica : Densidade Constante e Seção Variável

Para esse terceiro estudo, foi considerado a densidade do material ($\rho = 3930 \text{ kg/m}^3$) e a seção da barra variável. Com a intenção de determinar as equações analíticas que regem o deslocamento da barra, foram avaliados os esforços atuantes na seção infinitesimal através de um diagrama de equilíbrio na seção destacada.

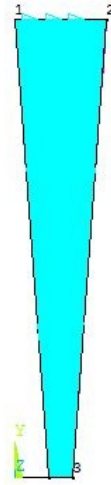


Figura 7 – Barra Engastada com Densidade Constante e Seção Variável

A barra sendo engastada na sua parte superior, as condições de contorno exatas para posicionar o sistema são:

Para $x = 0$:

$$u = 0; \quad (3.28)$$

Para $x = L$:

$$\frac{du}{dx} = 0; \quad (3.29)$$

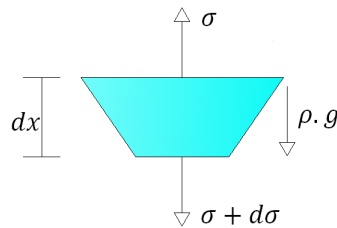


Figura 8 – Caso 3: Densidade Constante e Seção Constante: Seção Infinitesimal

Pela figura do trapézio infinitesimal pode-se fazer o diagrama de equilíbrio na seção para descobrir a equação que rege o deslocamento da barra.

$$A(x)(\sigma + d\sigma) - \sigma(A - dA) + \rho g A(x) dx = 0. \quad (3.30)$$

Manipulando a equação 3.30,

$$A(x)d\sigma + \sigma dA + \rho g A(x) dx = 0 \quad (3.31)$$

$$A(x) \frac{d\sigma}{dx} + \sigma \frac{dA}{dx} + \rho g A(x) = 0. \quad (3.32)$$

Para achar $A(x)$ é necessário encontrar a equação da reta da lateral da barra de seção transversal variável, sabendo que a relação da área superior com a inferior é de 4 vezes o tamanho da segunda, portanto:

Para $x = L$:

$$A = A_0 \quad (3.33)$$

Para $x = 0$:

$$A = 4A_0 \quad (3.34)$$

Analogamente à equação da reta,

$$A(x) = A_0 \left(4 - \frac{3x}{L}\right) \quad (3.35)$$

$$A_0 \left(4 - \frac{3x}{L}\right) \frac{d\sigma}{dx} + \sigma \frac{dA}{dx} + \rho g A_0 \left(4 - \frac{3x}{L}\right) = 0 \quad (3.36)$$

Substituindo agora as equações 3.8 e 3.9 na equação 3.36 e derivando A em relação a x ,

$$A_0 \left(4 - \frac{3x}{L}\right) E \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{du}{dx} E \frac{3A_0}{L} + \rho g A_0 \left(4 - \frac{3x}{L}\right) = 0 \quad (3.37)$$

É obtida a equação diferencial para o caso da barra engastada de densidade constante e seção variável.

$$\left(4 - \frac{3x}{L}\right) \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{3}{L} \frac{du}{dx} = -\frac{\rho g}{E} \left(4 - \frac{3x}{L}\right) \quad (3.38)$$

Para a solução da EDO descrita na equação 3.38, foi utilizado o programa Wolfram Alpha.

$$u(x) = \frac{2gL\rho x}{3E} - \frac{g\rho x^2}{4E} + \frac{1}{9}c_1 \ln(3x - 4L) + c_2 \quad (3.39)$$

Encontrando as constantes c_1 e c_2 encontra-se a equação que rege o deslocamento da barra de seção variável:

$$u(x) = \frac{g\rho(2L^2 \ln(3x - 4L) - 2L^2 \ln(-4L) + 3x(8L - 3x))}{36E} \quad (3.40)$$

Para encontrar o deslocamento máximo, $x = L$:

$$u(L) = \frac{g\rho(2L^2 \ln(3L - 4L) - 2L^2 \ln(-4L) + 3L(8L - 3L))}{36E} \quad (3.41)$$

Manipulando a equação 3.41

$$u(L) = \frac{\rho g}{36E} (2L^2 \ln\left(\frac{1}{4}\right) + 15L^2) \quad (3.42)$$

Substituindo valores:

$$u(L) = \frac{3930.9, 81}{36.210.10^9} (2.2, 5^2 \ln\left(\frac{1}{4}\right) + 15.2, 5^2) \quad (3.43)$$

$$u(L) = 3, 8972.10^{-7} \text{ metros} \quad (3.44)$$

O deslocamento total da barra com densidade constante e seção variável será de $3, 8972.10^{-7}m$. O valor de derivada de u em relação a x na posição $x = 0$ é $2, 8685.10^{-7}$.

3.4 Ansys Multiphysics

O software ANSYS é um programa comercial de elementos finitos que permite diversos tipos de análises, como análises em primeira e segunda ordem, estáticas ou dinâmicas. É possível também incluir no modelo os efeitos da não-linearidade geométrica e física bem como as imperfeições geométricas e tensões residuais. Possui também uma biblioteca de elementos finitos os quais devem ser utilizados de acordo com a situação de estudo, isto é, com a geometria do problema e as variáveis que se deseja avaliar.

O software ANSYS Mechanical versão 14.0 é utilizado para simulação neste trabalho pois possui melhor processamento e resultado frente aos outros softwares disponíveis. Por possuir resultados bastante satisfatórios em geral, o ANSYS pode ser considerado como um simulador extremamente fiel ao que ocorre na realidade para os exemplos abordados neste trabalho. Podemos afirmar então, que para os casos estudados, tanto a solução demonstrada analiticamente quanto a solução pelo software estão corretas.

Para os casos analisados a seguir, será utilizado o elemento finito da biblioteca do software denominado Solid quad 4 node 182. Este elemento é utilizado para modelagem 2D de estruturas sólidas, podendo ser utilizado tanto para elementos planos (tensão no plano ou deformação no plano) como em um elemento axissimétrico. O Solid quad 4 node 182 é definido por quatro nós com dois graus de liberdade em cada nó: translação no nó nas direções x e y . O elemento possui plasticidade, enrijecimento, deflexão e capacidade de deformação.

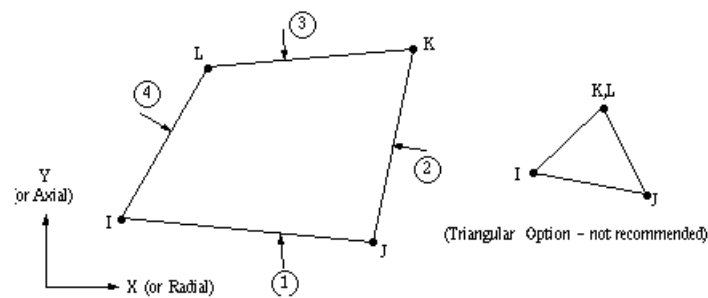


Figura 9 – Solid Quad 4 Node 182

A seguir estão demonstrados os resultados obtidos pelo ANSYS, os três exemplos abordados seguem os mesmos parâmetros utilizados nas outras soluções para que a comparação entre métodos se torne possível.

A análise computacional é desenvolvida seguindo a linha de raciocínio mostrada abaixo:

- As barras são modeladas no ambiente ANSYS de forma a se obter fielmente uma réplica das condições de análise reais. As simulações são realizadas de modo a demonstrar a deformação total nos três casos.
- A malha gerada para cada modelo tem granulação intermediária, devido à não complexidade do modelo.
- As condições de contorno são aplicadas a partir do momento que se engasta a superfície superior dos modelos.
- Os pesos são considerados distribuídos igualmente por todo o modelo.
- Para os casos é considerada a força da gravidade.
- Os resultados são apresentados na forma de deslocamento na direção vertical da barra (unidimensional).
- Todos os modelos são em 2 Dimensões.

3.4.1 Solução Ansys : Densidade Constante e Seção Constante

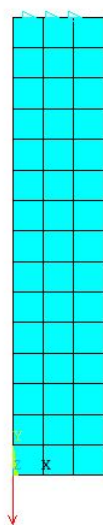


Figura 10 – Caso 1: Densidade Constante e Seção Constante: Malha



Figura 11 – Caso 1: Densidade Constante e Seção Constante: Isométrico

O deslocamento do modelo utilizando o software Ansys foi de $0,57 \cdot 10^{-6}$ metro, sendo igual ao resolvido analiticamente, provando que a abordagem do caso de barra com Densidade Constante e Seção Constante está correta.

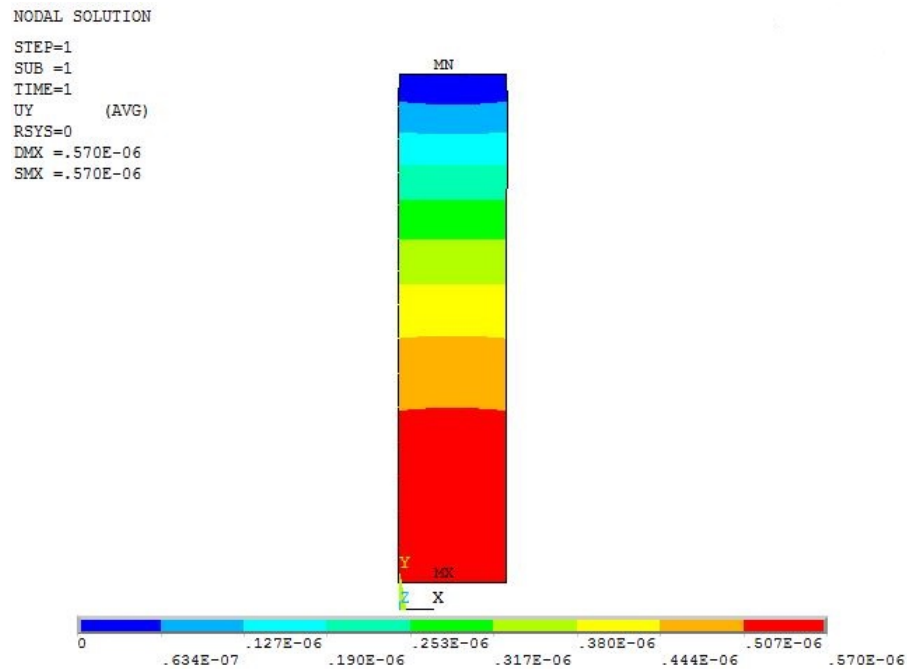


Figura 12 – Caso 1: Densidade Constante e Seção Constante: Resultado

3.4.2 Solução Ansys : Densidade Variável e Seção Constante

Para este exemplo em particular é definido como solução correta apenas a analítica, logo não se logrou obter a solução no software. Usando como base o exemplo anterior, os resultados analíticos e os resultados do ANSYS estão convergindo, portanto, caso seja possível variar a densidade do corpo no software, será esperado um resultado muito próximo ao demonstrado analiticamente.

3.4.3 Solução Ansys : Densidade Constante e Seção Variável

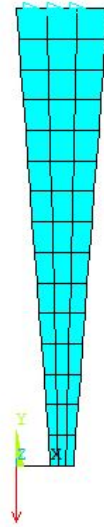


Figura 13 – Caso 3: Densidade Constante e Seção Constante: Malha

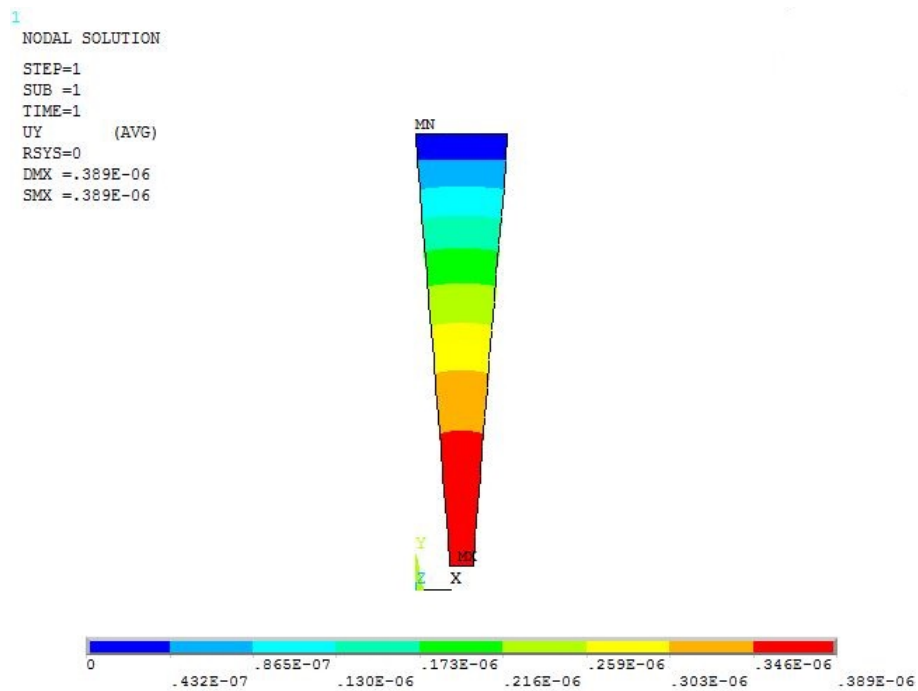


Figura 14 – Caso 3: Densidade Constante e Seção Variável: Resultado

O deslocamento do modelo utilizando o software Ansys foi de $0,389 \cdot 10^{-6}$ metro, provando que a abordagem do caso de barra com Densidade Constante e Seção Variável está correta.

4 Testes e Resultados

4.1 Funções Escolhidas para Estudos

Antes da realização dos testes, são necessárias as escolhas das funções que seriam utilizadas para estudo. Arbitrariamente, foram escolhidas 5 funções, tendo em vista que não seria necessária a utilização das funções presentes na literatura para uma conclusão do caso proposto. As funções escolhidas obedecem a continuidade na sua terceira derivada, portanto, são denominadas C4PD3. Para os exemplos já citados, são escolhidas uma função de Gauss, que por sua vez tem suporte global, uma função de Wendland e uma de Wu, ambas com suporte compacto e duas funções propostas pelo Prof. D. Sc. Fernando César Meira Menandro¹, uma de característica Inversa, denominada I_9 e uma de característica Racional R_4 , ambas também de suporte compacto. Portanto, as funções citadas são analisadas no programa computacional de cálculo desenvolvido em linguagem C++ pelo Prof. D. Sc. Fernando César Meira Menandro.

1. Função de Wu:

$$f(r) = (1 - r)_+^6 (6 + 36r + 82r^2 + 72r^3 + 30r^4 + 5r^5) \quad (4.1)$$

2. Função de Wendland:

$$f(r) = (1 - r)_+^6 (35r^2 + 18r + 3) \quad (4.2)$$

3. Função de R_4 :

$$f(r) = \frac{1 - 4r + 6r^2 - 4r^3 + r^4}{1 - 4r + 6r^2 - 4r^3 + 2r^4} \quad (4.3)$$

4. Função de I_9 :

$$f(r) = -\frac{182}{5(1 - r^9)} + \frac{702}{5(1 - r^8)} - \frac{918}{5(1 - r^7)} + \frac{408}{5(1 - r^6)} - 1 \quad (4.4)$$

5. Função de Gauss:

$$f(r) = e^{\left(\frac{-r}{r_{\text{máx}}}\right)^2} \quad (4.5)$$

¹ Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo

4.2 Metodologia Experimental

Para a simulação dos exemplos estudados em C++ foi necessário definir quais parâmetros afetariam o comportamento do programa, para que a resposta fosse significativa em cada caso, tomando como parâmetro os métodos analíticos e de simulação com o Ansys. Feitos os testes, através de uma série de análises preliminares, não significativas para este trabalho, concluiu-se que o resultado depende do raio do suporte e do número de funções. A dependência do número de funções já era esperada devido ao fato que todo método numérico tende a apresentar uma taxa de convergência. Um aprofundamento de Convergência será apresentado mais adiante.

Com relação ao suporte, os testes apresentaram que, como esperado, existe a dependência entre o resultado e o tamanho do raio. A partir dessa análise buscou-se observar quais seriam os valores do raio que apresentavam uma melhor resposta. Após diversos experimentos, foi identificado que valores mínimos de raios geravam resultados bastante inexpressivos. Com isso, optou-se pelo descarte de análises destes. Após nova bateria de testes, dessa vez com raios maiores, optou-se por fazer a varredura do resultado com raios variando entre 0,5 e 16 vezes o comprimento do domínio, no caso, o comprimento da barra. Portanto, os valores dos raios estudados variam de 1,25 a 40 metros. Os resultados serão apresentados à frente.

Uma vez feitas as análises fixou-se cada um dos raios e partiu-se para a análise de Convergência em função do número de funções, a fim de identificar a taxa de convergência das funções, para, assim, definir o tamanho do raio ideal para a simulação no programa C++.

Escolhidas as funções de estudo de caso, citadas no tópico 4.1, se fez necessário arbitrar a quantidade de funções que seriam tomadas como centro dos raios ao longo dos 2,5 metros da barra estudada. Primeiramente foram escolhidas divisões de 0,5 metro ao longo da barra de forma simétrica, resultando em 6 pontos. Como é possível ver na figura 15, o ponto 2 tem raio 0,5 metro, e assim sucessivamente.

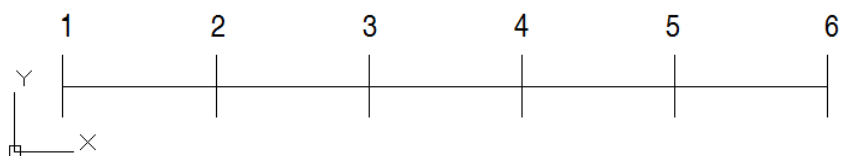


Figura 15 – Barra com 6 pontos simetricamente distribuidos

Objetivando uma análise detalhada, arbitrou-se maiores quantidades de funções. Portanto, foi escolhida a quantidade de funções de tal forma que o valor da distância entre os centros sempre fosse a metade do valor do raio da quantidade de funções anterior, ou seja, o raio de 6 funções são 5 divisões de 0,5 metro cada. Então, o próximo raio adotado

será de 0,25 metros, que levará a 10 divisões e consequentemente a 11 funções. Assim seguirá até o valor de 0,03125 metro com 81 funções.

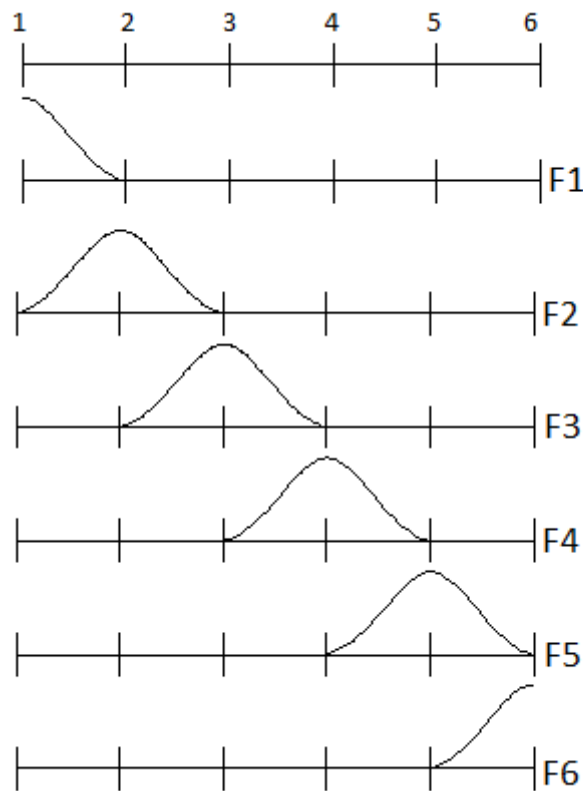


Figura 16 – Barra com 6 pontos simetricamente distribuídos indicando o centro de cada função.

4.3 Convergência

O objetivo de realizar a convergência de funções é identificar o comportamento das mesmas em relação aos raios adotados e determinar qual a faixa do raio de suporte é ideal para a simulação a fim de obter o menor erro possível. A análise de convergência é fundamental para casos com soluções analíticas pois é possível obter a taxa de convergência, e a tomando como base, torna-se viável eventualmente a solução computacional de equações sem soluções analíticas pois seu erro estará reduzido.

Toma-se como base a equação do erro, que relaciona o coeficiente C com o número de funções n e a taxa de convergência p .

$$e = Cn^{-p} \quad (4.6)$$

Para valores de C discrepantes a convergência inicial se apresenta com um valor alto o suficiente para indicar imprecisão de dados, não adiantando aumentar o número de

pontos para buscar uma maior precisão. O ideal é que C possua valores mais próximos possíveis de 0, minimizando o erro. Para a taxa de convergência p , o valor ideal é o maior possível, a fim de obter uma alta convergência e minimização do erro de forma mais rápida, com menor número de funções.

Nesse trabalho são desenvolvidos gráficos que linearizam a equação 4.6 (Escala bi-logarítmicas), para mostrar o comportamento da convergência de todas as funções arbitradas no capítulo 4. Os gráficos de escalas bi-logarítmicas servem para apresentar de forma clara as retas de convergência das funções.

4.3.1 Convergência : Densidade Constante e Seção Constante

Seguem abaixo os valores dos coeficientes C e p e gráficos de Convergência para o caso da barra de Densidade Constante e Seção Constante.

Tabela 3 – Caso 1 : Convergência C

Raio	We	Wu	I_9	R_4
1,25	363,05	687,838	46161,5	-
2,50	583,073	150,084	320,934	-
5,00	3,15192	1,82737	21,905	9,24903
10,00	1,03391	0,685435	12,588	1,13482
20,00	0,418073	0,29828	8,10201	1,08682
40,00	0,214975	$3,30988e^{-9}$	$4,47805^{-9}$	0,510447

Tabela 4 – Caso 1 : Convergência p

Raio	We	Wu	I_9	R_4
1,25	1,56614	2,07217	4,07619	-
2,50	2,86704	2,70422	3,41521	-
5,00	1,5569	1,5537	2,99513	1,330943
10,00	1,57866	1,60535	3,17796	1,35983
20,00	1,5785	1,66459	3,25415	1,82312
40,00	1,6532	-3,60517	3,28299	1,78081

Observação: os valores de C e p para a função R_4 retornaram 0 como apresentado nas tabelas anteriores pois foram obtidos através do programa Gnuplot que faz o ajuste de pontos. Como claramente os dados apresentaram uma reta, nesse caso o ajuste provavelmente não funcionou pois os pontos divergem e não foi possível fazer os ajustes razoáveis destes pontos em uma reta.

Os valores de C e p possuem uma aparente dependência em relação ao raio, uma vez que C é menor do que o maior número de raios, excetuando algumas situações onde ocorrem divergência dos pontos. A mesma divergência é observada na tabela p para os

maiores valores de raio, ocasionando em um número muito grande de pontos e mascarando o valor de C . No entanto, o valor de p é aproximadamente constante, ou seja, a taxa de convergência é aproximadamente constante para todas as funções, independente do raio.

As funções de Wu e Wendland apresentam números parecidos de taxas de convergência pois são duas equações polinomiais e possuem características semelhantes. A função R_4 apresentou característica de convergência inferior às demais (taxa de convergência menor que as funções de Wu e Wendland). A função I_9 por sua vez apresentou taxa de convergência melhor que a função de Wu, Wendland e R_4 .

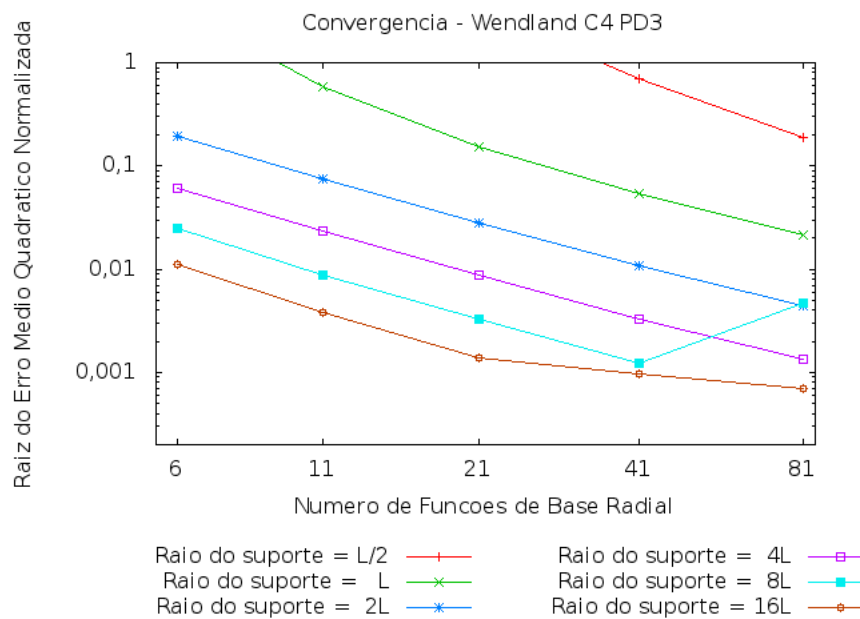


Figura 17 – Caso 1 : Gráfico de Convergência pela função Wendland

Os gráficos mostram que a convergência de R_4 não mantém um padrão satisfatório quando comparada às outras funções. As curvas de Wu e Wendland são boas, porém quando o número de pontos aumenta, as mesmas começam a divergir (raios maiores) devido a problemas numéricos. Para raios pequenos, o erro das funções de Wu e Wendland fica grande (valores de C grandes). No gráfico da função I_9 é apresentado o mesmo problema de divergência das funções anteriores, porém este apresenta uma taxa de convergência claramente maior.

Apesar de o raio influenciar na dispersão das funções, a solução da função de Gauss claramente não apresenta Convergência significativa a medida em que o raio do suporte é alterado. É possível concluir que a solução da função de Gauss independe do número de pontos adotados e piora com o aumento do raio. A função de Gauss apresenta um resultado satisfatório com poucas funções, porém, com o aumento das mesmas não há diminuição do erro por não haver convergência, levando as próximas análises com as funções de Gauss a serem descartadas.

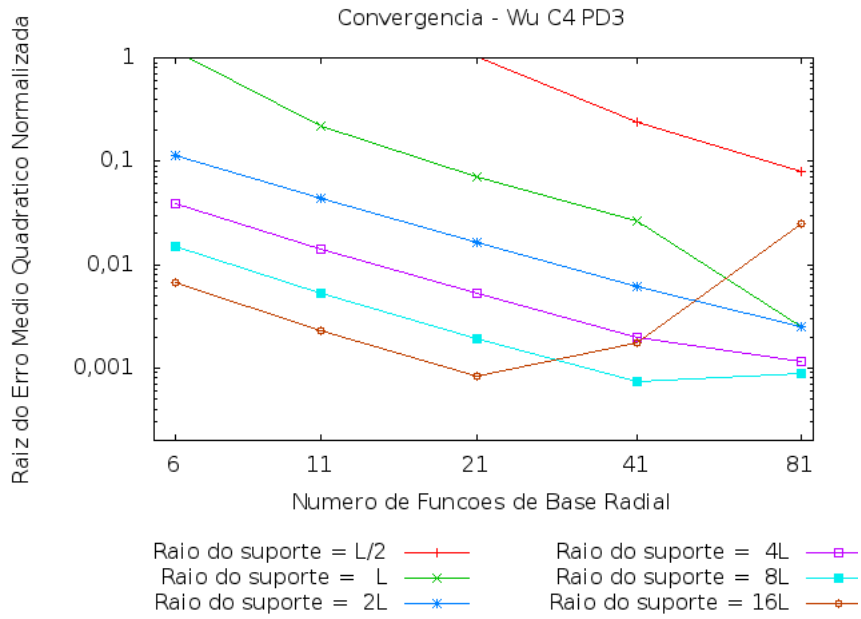


Figura 18 – Caso 1 : Gráfico de Convergência pela função Wu

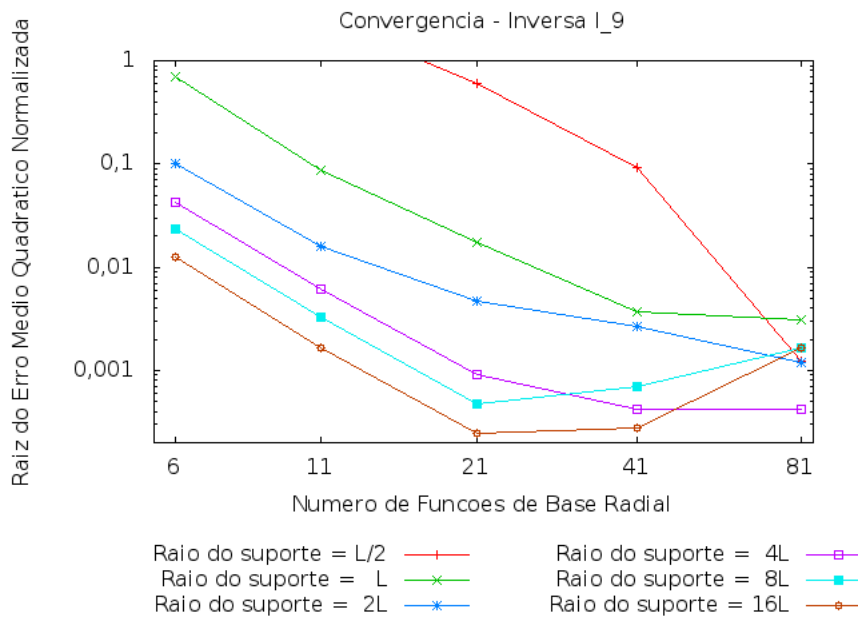


Figura 19 – Caso 1 : Gráfico de Convergência pela função I_9

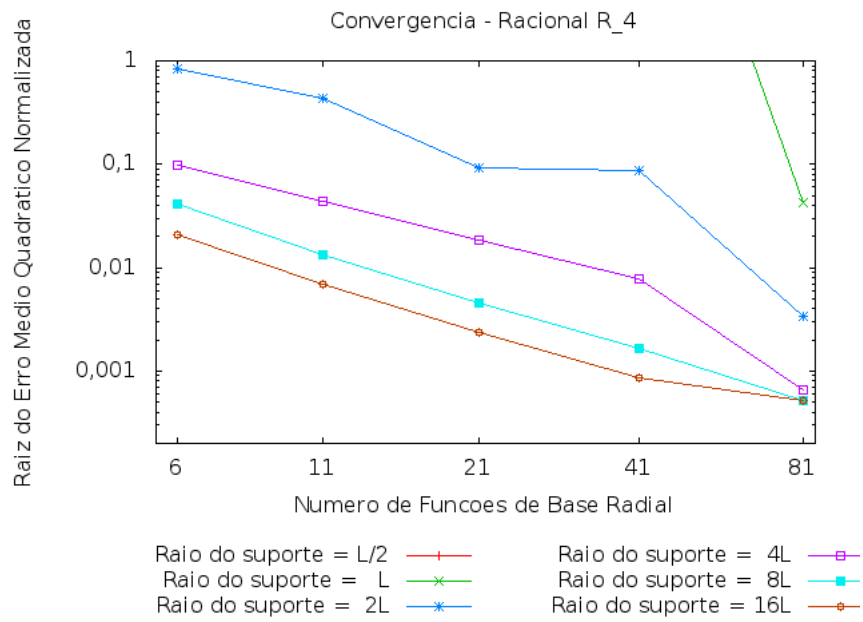


Figura 20 – Caso 1 : Gráfico de Convergência pela função R_4

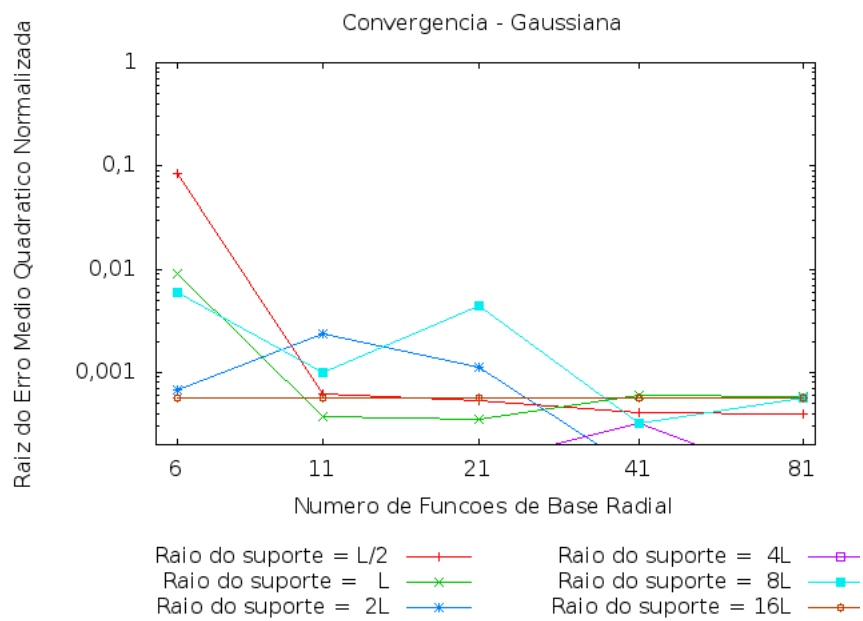


Figura 21 – Caso 1 : Gráfico de Convergência pela função de Gauss

4.3.2 Convergência : Densidade Variável e Seção Constante

Seguem abaixo os valores dos coeficientes C e p e gráficos de Convergência para o caso da barra de Densidade Variável e Seção Constante:

Tabela 5 – Caso 2 : Convergência C

Raio	We	Wu	I_9	R_4
1,25	2,52349	3,38971	4,66711	1,53628
2,50	6,07603	9,94144	22,3723	3,94308
5,00	7,64075	6,33148	89,3637	6,54676
10,00	4,17428	2,85604	60,6154	4,50578
20,00	1,87997	1,36259	41,5305	5,527
40,00	0,671504	4,45939e ⁻⁵	23,2775	2,6309

Tabela 6 – Caso 2 : Convergência p

Raio	We	Wu	I_9	R_4
1,25	0,237851	0,394986	0,56551	0,00604886
2,50	0,775861	1,12328	1,62689	0,458375
5,00	1,35058	1,4905	2,91722	0,88373
10,00	1,58306	1,62521	3,11478	1,23087
20,00	1,58711	1,65512	3,21782	1,76246
40,00	1,34642	-1,68815	3,2513	1,74875

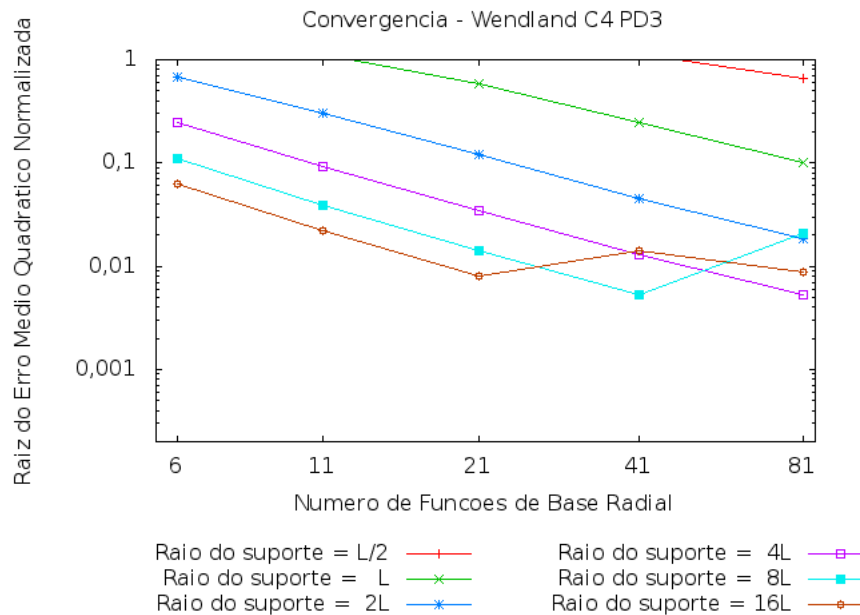


Figura 22 – Caso 2 : Gráfico de Convergência pela função Wendland

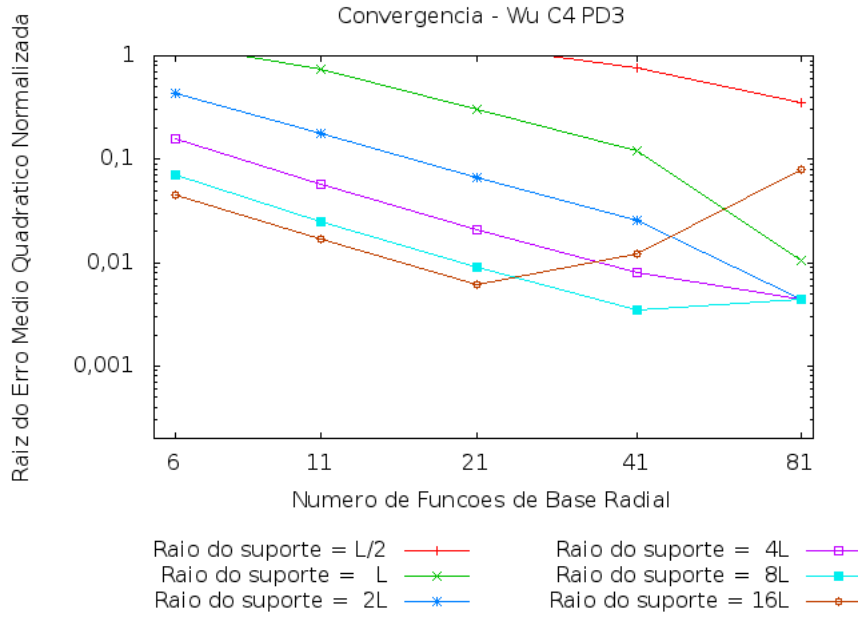


Figura 23 – Caso 2 : Gráfico de Convergência pela função Wu

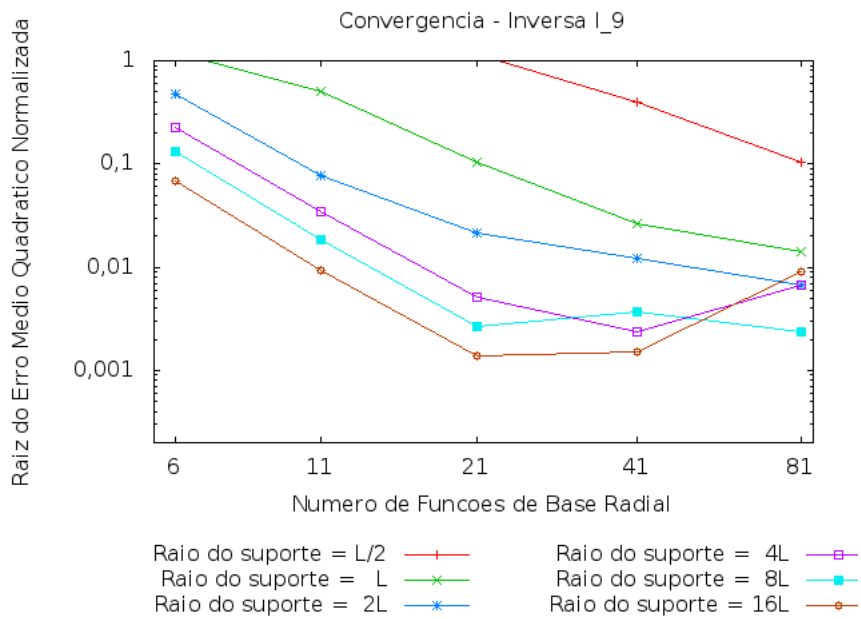


Figura 24 – Caso 2 : Gráfico de Convergência pela função I₉

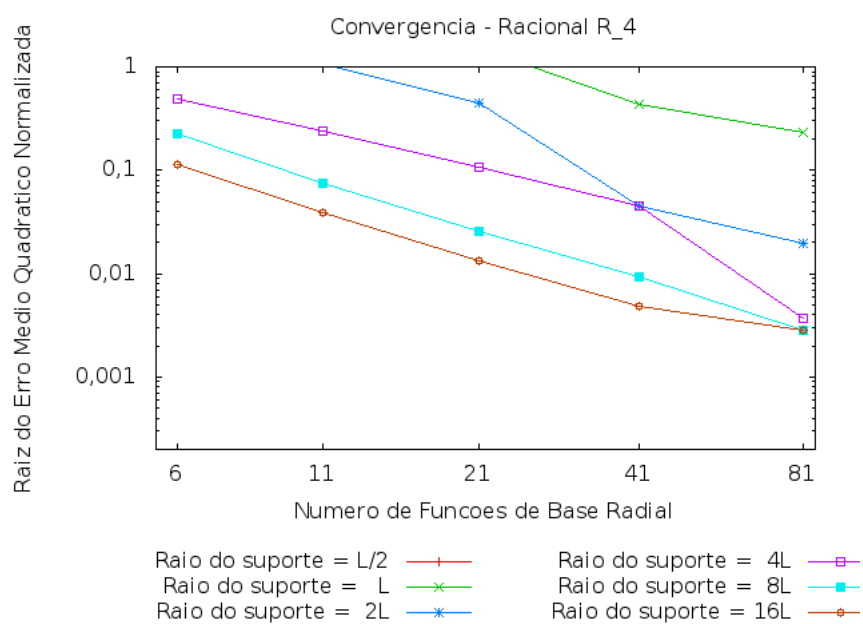


Figura 25 – Caso 2 : Gráfico de Convergência pela função R₄

4.3.3 Convergência : Densidade Constante e Seção Variável

Seguem abaixo os valores dos coeficientes C e p e gráficos de Convergência para o caso da barra de Densidade Constante e Seção Variável:

Tabela 7 – Caso 3 : Convergência C

Raio	We	Wu	I_9	R_4
1,25	1,72059	0,407318	1,96485	0,928626
2,50	4,00086	0,934786	48,509	0,846997
5,00	3,98058	1,33478	21,6952	1,6715
10,00	1,95713	1,49214	15,3664	1,08653
20,00	0,920395	1,56487	10,9118	1,25202
40,00	0,0156589	-0,0494192	4,59145	0,472577

Tabela 8 – Caso 3 : Convergência p

Raio	We	Wu	I_9	R_4
1,25	0,407318	0,5175	0,63366	0,0911004
2,50	0,934786	1,24749	2,49535	0,004145851
5,00	1,33478	1,42892	2,61201	0,715083
10,00	1,49214	1,50918	2,97312	1,09462
20,00	1,56487	1,38306	3,1226	1,82832
40,00	-0,0494192	0,581862	2,98807	1,7255

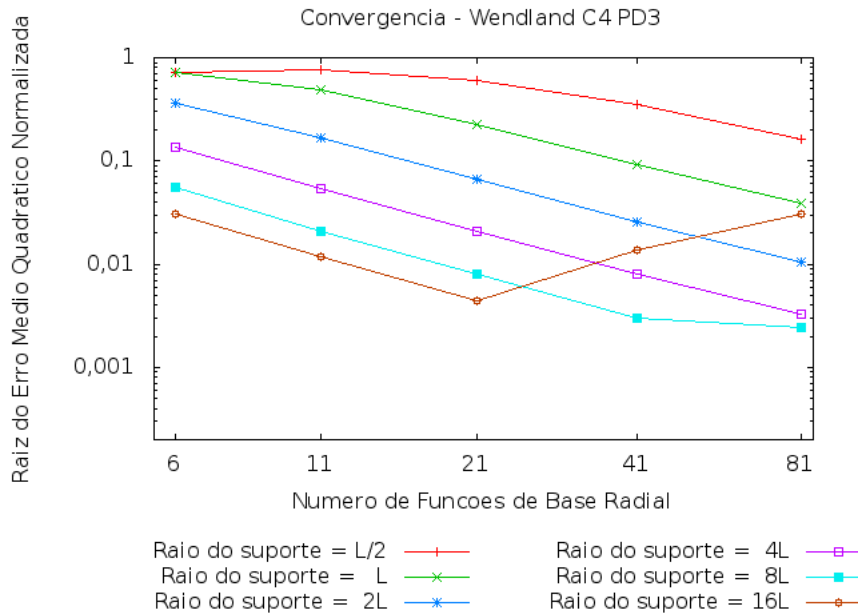


Figura 26 – Caso 3 : Gráfico de Convergência pela função Wendland

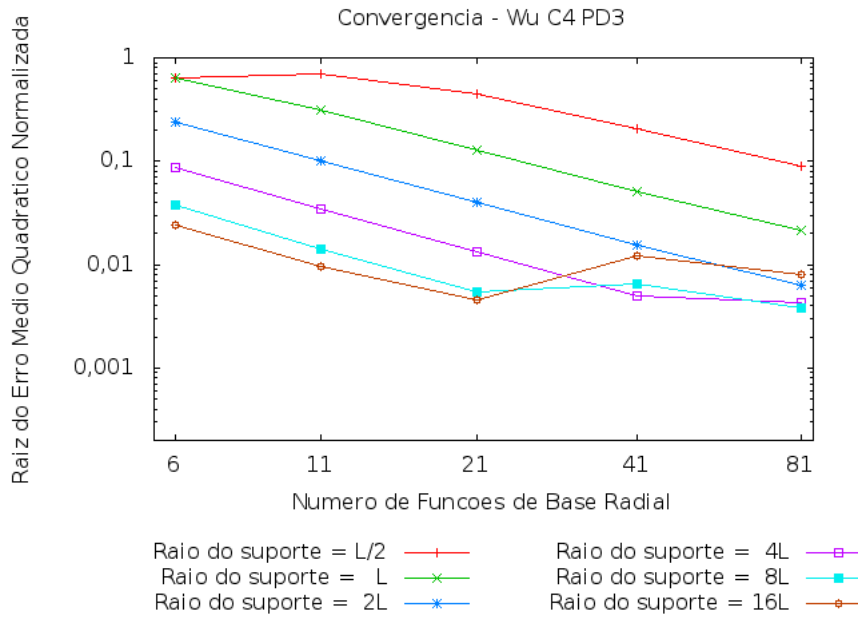


Figura 27 – Caso 3 : Gráfico de Convergência pela função Wu

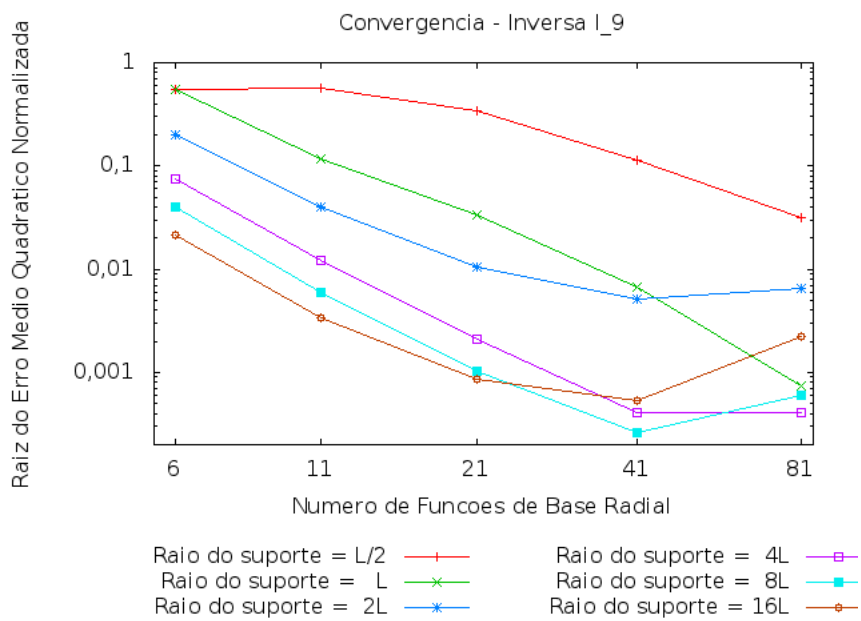


Figura 28 – Caso 3 : Gráfico de Convergência pela função I_9

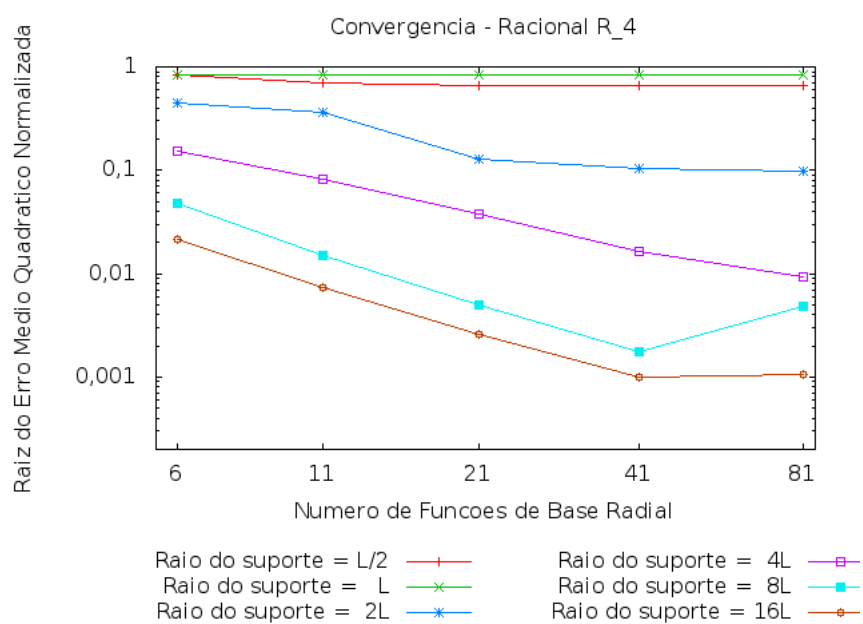


Figura 29 – Caso 3 : Gráfico de Convergência pela função R_4

4.4 Resultados de Simulação

4.4.1 Solução C++ : Densidade Constante e Seção Constante

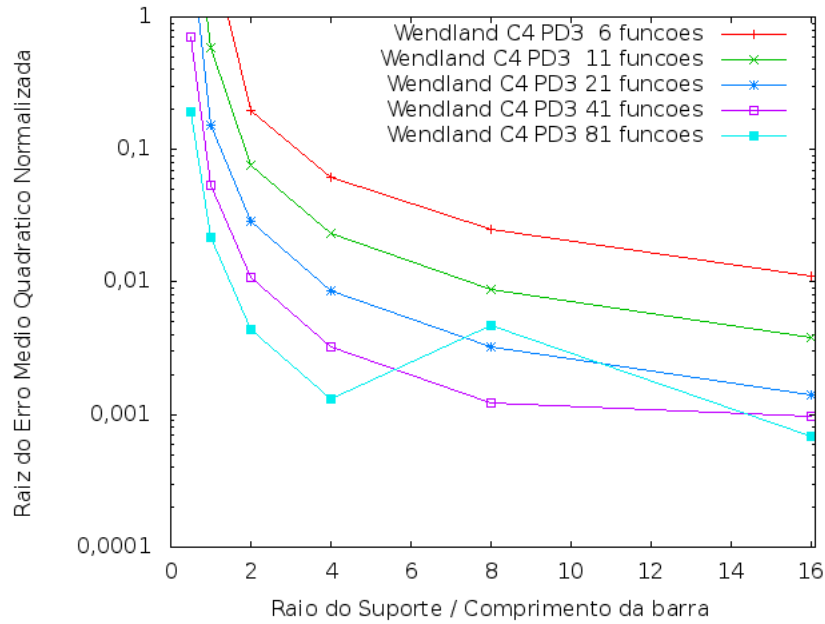


Figura 30 – Caso 1 : Gráfico do Erro pela função Wendland

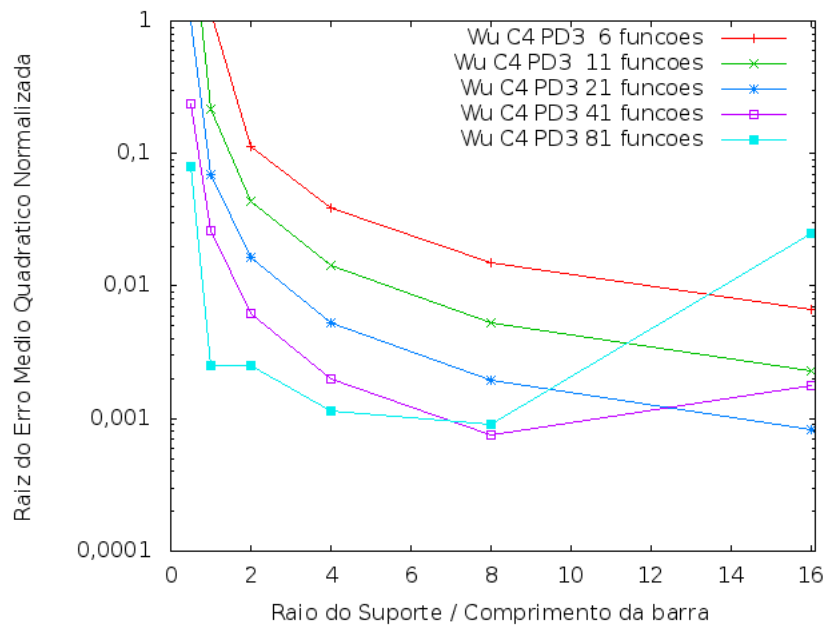


Figura 31 – Caso 1 : Gráfico do Erro pela função Wu

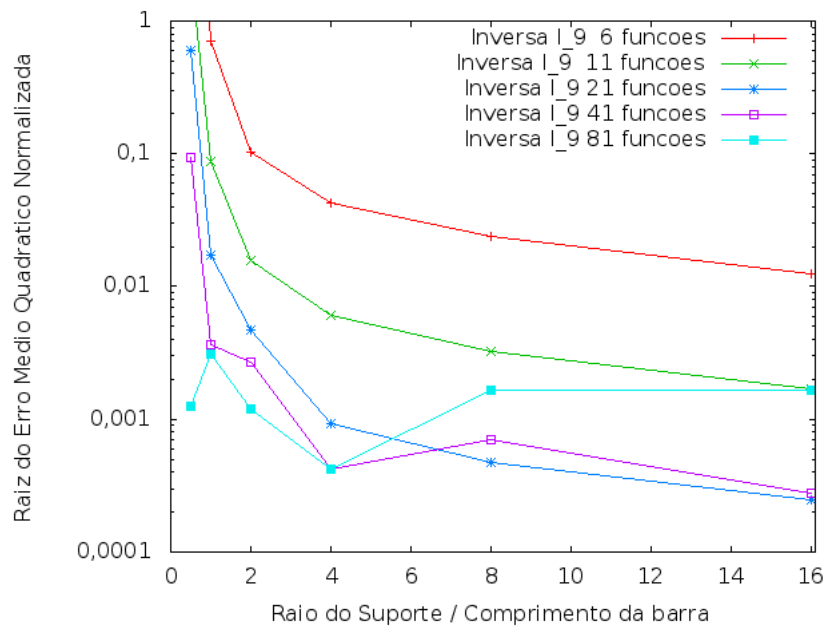


Figura 32 – Caso 1 : Gráfico do Erro pela função I_9

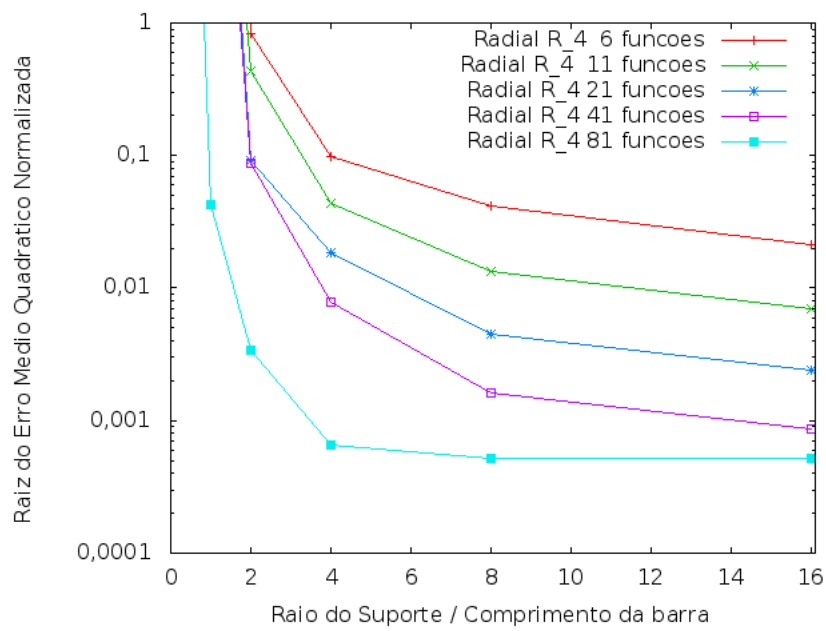


Figura 33 – Caso 1 : Gráfico do Erro pela função R_4

4.4.2 Solução C++ : Densidade Variável e Seção Constante

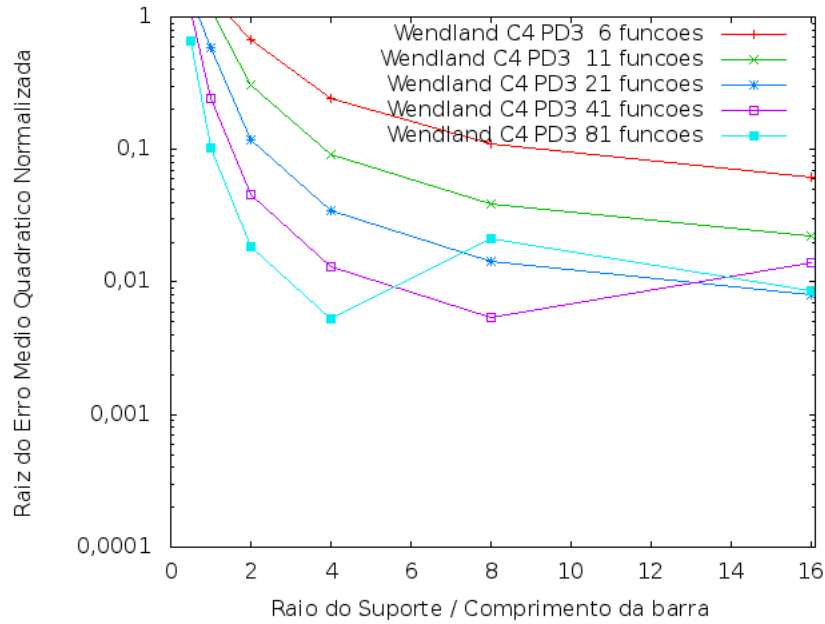


Figura 34 – Caso 2 : Gráfico de Convergência pela função Wendland

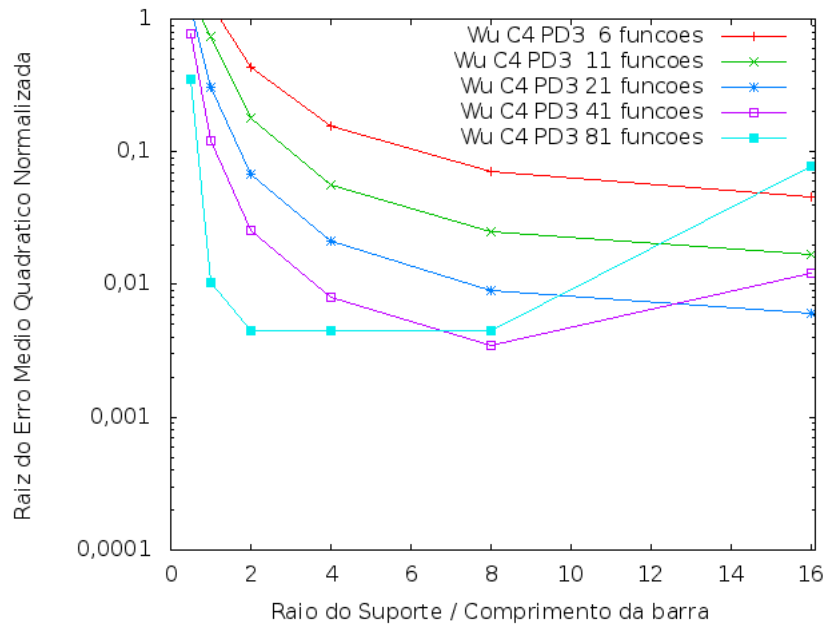


Figura 35 – Caso 3 : Gráfico de Convergência pela função Wu

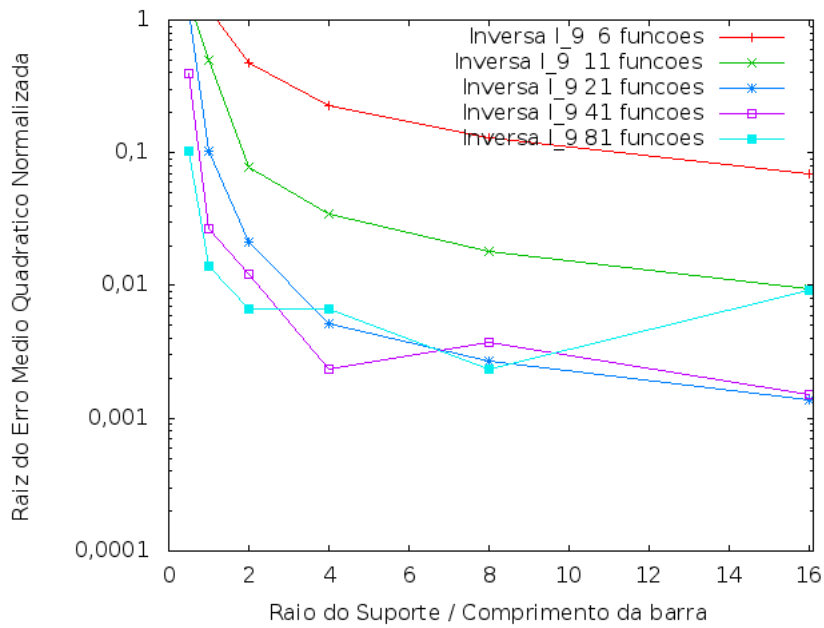


Figura 36 – Caso 2 : Gráfico de Convergência pela função I_9

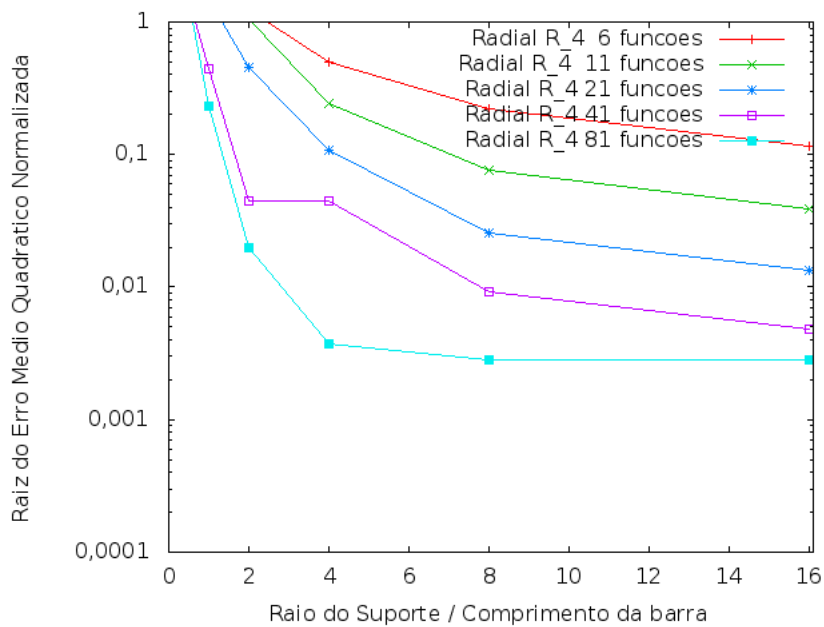


Figura 37 – Caso 2 : Gráfico de Convergência pela função R_4

4.4.3 Solução C++ : Densidade Constante e Seção Variável

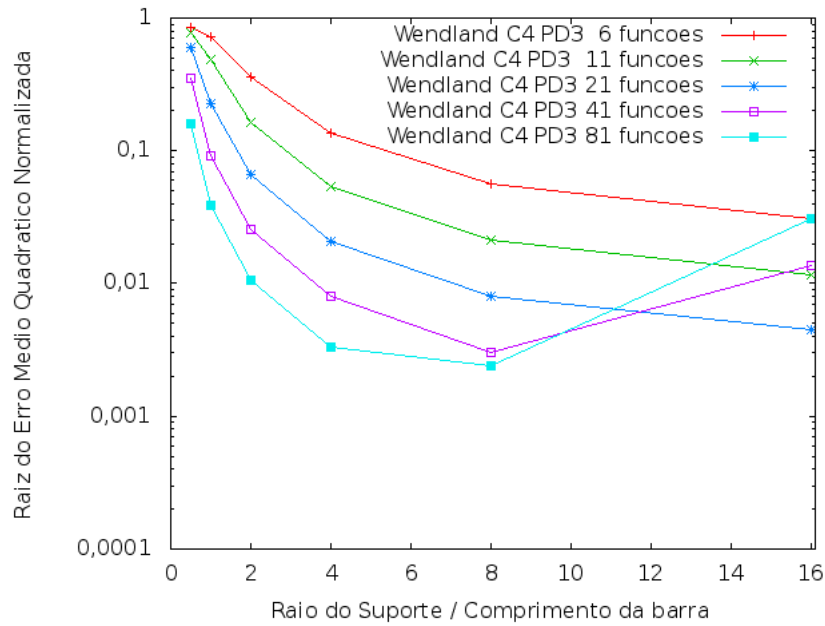


Figura 38 – Caso 3 : Gráfico de Convergência pela função Wendland

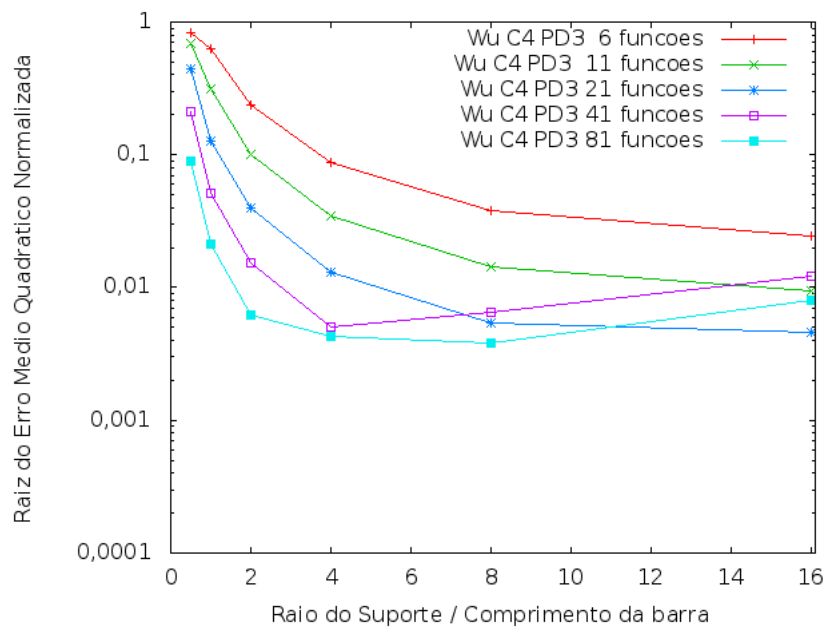


Figura 39 – Caso 3 : Gráfico de Convergência pela função Wu

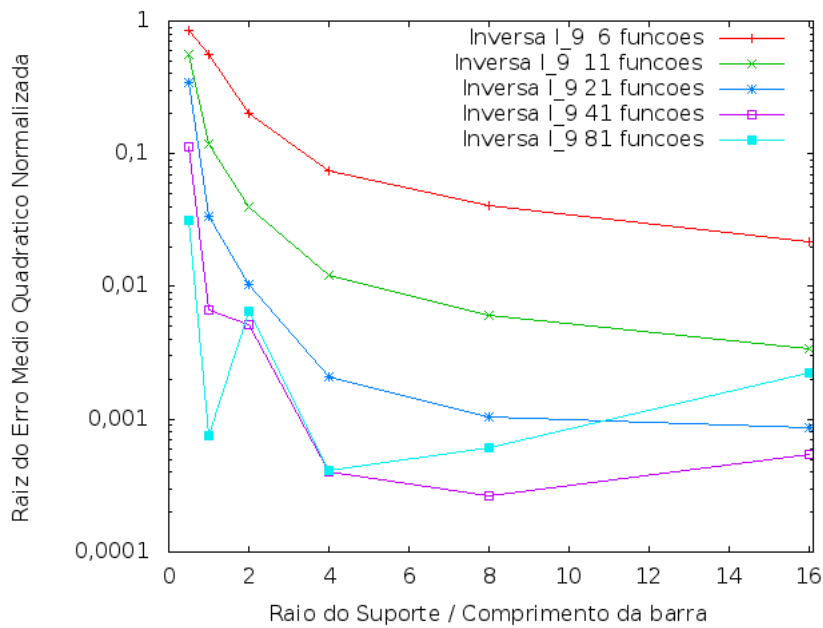


Figura 40 – Caso 3 : Gráfico de Convergência pela função I_9

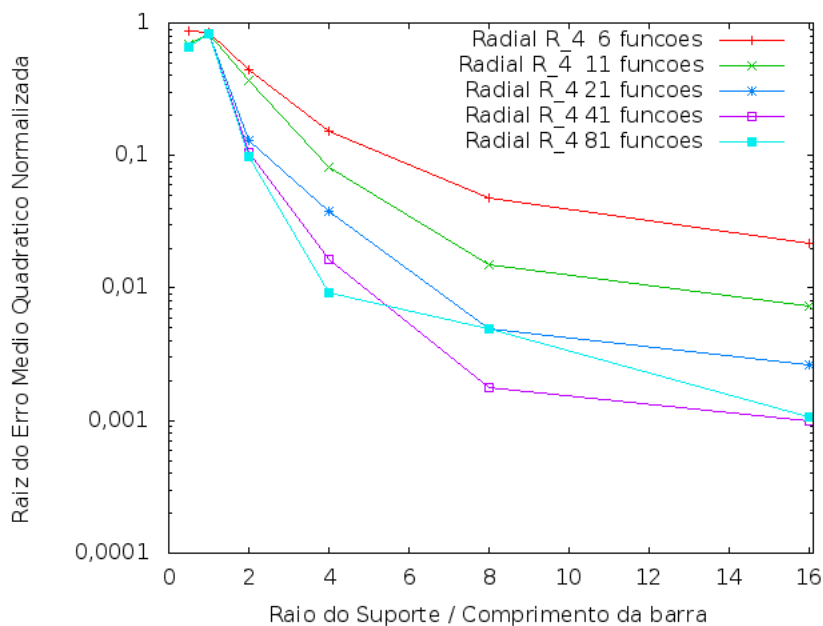


Figura 41 – Caso 3 : Gráfico de Convergência pela função R_4

Dos gráficos apresentados, nota-se que o erro decresce em quase uma ordem de grandeza (potência de 10) a cada aumento do domínio L até o domínio $4L$. Após isso, o erro decresce com uma taxa menor. Vale ressaltar que os gráficos apresentados nessa seção são gráficos de escala logarítmica, os mesmos gráficos em representação com escala linear, demonstram claramente um comportamento quase assintótico das funções, diminuindo o erro a medida em que há o aumento das mesmas.

Uma análise mais cuidadosa dos gráficos mostra que para raios muito grandes a

curva das funções apresenta comportamento divergente em diversos casos, ou mesmo que convirjam, elas não se apresentam estáveis e a taxa de convergência diminui, fazendo com que a diminuição de erro muitas vezes não seja compensatória. Já para raios muito pequenos, apesar de uma elevada taxa de convergência, o erro é muito grande. Posteriormente a essas análises, é determinado que o tamanho do raio limite escolhido para a solução das EDO's e comparação dos resultados é de $4L$, ou 10 metros de raio de suporte, pois está é a solução com menor erro que apresenta convergência estável das funções.

A seguir são apresentados os dados dos deslocamentos dos casos estudados:

4.4.4 Deslocamento : Densidade Constante e Seção Constante

O deslocamento máximo da barra de Densidade Constante e Seção Constante na posição $x = L$ será de $5,737 \cdot 10^{-7} m$. Segue abaixo as tabelas dos resultados de deslocamento obtidos manipulando o programa em C++. A tabela compara os resultados de cada função estudada. É possível ver a precisão de cada função, com a quantidade de funções indicadas por N.

Tabela 9 – Caso 1 : Tabela Deslocamento (u) em $x=L$

N	We	Wu	I_9	R_4
6	5.62266e-7	5.69935e-7	5.56572e-7	4.98079e-7
11	5.72316e-7	5.73425e-7	5.72936e-7	5.52321e-7
21	5.73605e-7	5.73762e-7	5.73618e-7	5.67821e-7
41	5.73748e-7	5.73766e-7	5.73684e-7	5.71874e-7
81	5.73741e-7	5.73743e-7	5.73695e-7	5.7357e-7

A tabela abaixo mostra o resultado da derivada de u com relação a x , que na solução analítica tem como valor : $4,5896 \cdot 10^{-7}$. A tabela mostra a derivada de u com relação a x onde $x = 0$.

Tabela 10 – Caso 1 : Tabela Deslocamento (du/dx) em $x=0$

N	We	Wu	I_9	R_4
6	-4.43664e-7	-4.53192e-7	-4.50862e-7	-4.24215e-7
11	-4.57294e-7	-4.58597e-7	-4.58754e-7	-4.50288e-7
21	-4.59083e-7	-4.59152e-7	-4.58959e-7	-4.57083e-7
41	-4.5917e-7	-4.59114e-7	-4.58962e-7	-4.58602e-7
81	-4.59086e-7	-4.59047e-7	-4.58958e-7	-4.58921e-7

4.4.5 Deslocamento : Densidade Variável e Seção Constante

O deslocamento máximo da barra de Densidade Variável e Seção Constante na posição $x = L$ será de $9,562 \cdot 10^{-7} m$. Segue abaixo as tabelas dos resultados de deslocamento obtidos manipulando o programa em C++. A tabela compara os resultados de cada função estudada. É possível ver a precisão de cada função, com a quantidade de funções indicadas por N.

Tabela 11 – Caso 2 : Tabela Deslocamento (u) em $x=L$

N	We	Wu	I_9	R_4
6	9.39712e-7	9.50234e-7	9.25717e-7	8.17009e-7
11	9.54568e-7	9.56006e-7	9.54802e-7	9.16534e-7
21	9.5631e-7	9.56467e-7	9.56019e-7	9.45253e-7
41	9.56391e-7	9.56382e-7	9.56136e-7	9.52769e-7
81	9.56304e-7	9.56288e-7	9.5611e-7	9.55936e-7

A tabela abaixo mostra o resultado da derivada de u com relação a x , que na solução analítica tem como valor : $6,8845 \cdot 10^{-7}$. A tabela mostra a derivada de u com relação a x onde $x = 0$.

Tabela 12 – Caso 2 : Tabela Deslocamento (du/dx) em $x=0$

N	We	Wu	I_9	R_4
6	-6.69212e-7	-6.81556e-7	-6.74125e-7	-6.2487e-7
11	-6.86591e-7	-6.88183e-7	-6.88077e-7	-6.72359e-7
21	-6.88715e-7	-6.88765e-7	-6.88436e-7	-6.84943e-7
41	-6.88764e-7	-6.88674e-7	-6.88442e-7	-6.87763e-7
81	-6.88627e-7	-6.8857e-7	-6.88441e-7	-6.88381e-7

4.4.6 Deslocamento : Densidade Constante e Seção Variável

O deslocamento máximo da barra de Densidade Constante e Seção Variável na posição $x = L$ será de $3,8972 \cdot 10^{-7} m$. Segue abaixo as tabelas dos resultados de deslocamento obtidos manipulando o programa em C++. A tabela compara os resultados de cada função estudada. É possível ver a precisão de cada função, com a quantidade de funções indicadas por N.

Tabela 13 – Caso 3 : Tabela Deslocamento (u) em $x=L$

N	We	Wu	I_9	R_4
6	3.75245e-7	3.79976e-7	3.76688e-7	3.4356e-7
11	3.87788e-7	3.88463e-7	3.89217e-7	3.76881e-7
21	3.89577e-7	3.89676e-7	3.89705e-7	3.86439e-7
41	3.89798e-7	3.89804e-7	3.89723e-7	3.88784e-7
81	3.8978e-7	3.89799e-7	3.89724e-7	3.89442e-7

A tabela abaixo mostra o resultado da derivada de u com relação a x , que na solução analítica tem como valor : $2,8685 \cdot 10^{-7}$. A tabela mostra a derivada de u com relação a x onde $x = 0$.

Tabela 14 – Caso 3 : Tabela Deslocamento (du/dx) em $x=0$

N	We	Wu	I_9	R_4
6	-2.80451e-7	-2.83921e-7	-2.83288e-7	-2.71965e-7
11	-2.8624e-7	-2.8668e-7	-2.86827e-7	-2.82884e-7
21	-2.86981e-7	-2.86977e-7	-2.86876e-7	-2.86123e-7
41	-2.8699e-7	-2.86951e-7	-2.86861e-7	-2.86816e-7
81	-2.86931e-7	-2.86914e-7	-2.86858e-7	-2.86916e-7

5 Considerações Finais

O método proposto simula adequadamente os problemas de tensão e deslocamento unidimensional, e para fazer essa análise de forma precisa foi necessário aprofundar no estudo do raio do suporte e do número de pontos, e através disto, verificar a existência ou não de convergência para as funções estudadas. Por um lado, essa é uma desvantagem do método pois, para a análise da convergência, foi necessário não só o estudo da quantidade de pontos para centros das funções, como também o valor do raio do suporte. Por outro lado a precisão dos resultados é satisfatória, tendo em vista que o método utilizado não é comum quando se trata de solução de problemas unidimensionais de estruturas.

Nas análises feitas foram notadas que existe uma convergência clara do processo, apesar de chegar em um ponto em que a taxa de convergência já não se torna mais satisfatória e a medida de erro permanece praticamente constante. Baseado nisso, foram arbitradas simulações em um determinado raio de suporte considerado ideal, porém grande para os casos estudados. Adotando uma grande quantidade de pontos e um valor alto de raio de suporte, há um comprometimento da solução, e em algumas situações ocorre divergência de dados. Este comportamento divergente é atribuído, nesse trabalho, a problemas numéricos, mas um estudo mais detalhado seria necessário para confirmar essa afirmação.

Foi observado pelos resultados que nas aplicações deste trabalho, a função inversa I_9 proposta pelo Prof. D.Sc. Fernando César Meira Menandro claramente obtém melhor convergência dentre as estudadas, inclusive a função de Wendland C4PD3. Notamos também que a função de Gauss não apresenta grande convergência, o que impossibilita sua utilização em problemas sem soluções analíticas que necessitam de funções com grande convergência para redução dos erros nas interpolações. Vale ressaltar que não era esperado o descarte da função de Gauss pois a mesma é uma função clássica e muito utilizada.

Para os problemas aqui estudados, a aplicação do método sem malha para problemas unidimensionais não se mostrou vantajosa, pois, para que obtivéssemos resultados que tornassem possível a validação deste modelo, tivemos de optar por um raio maior do que o tamanho do domínio estudado. Isso fez com que as funções de suporte compacto fossem grandes como as funções de suportes globais.

Após a realização deste trabalho nota-se, em todos os casos, uma concordância grande dos resultados de grandezas físicas com os resultados analíticos. A comparação com o software Ansys também fornece valores muito próximos, validando assim todos os modelos utilizados.

Não se fazem verdades absolutas e definitivas as conclusões aqui apresentadas. Muito

se tem a aprofundar nos estudos de simulação de corpos sem malha. Para futuros trabalhos, algumas sugestões tornam-se interessantes, tais como a análise dos conjuntos de funções Racionais e Inversas propostas pelo Prof. D.Sc. Fernando César Meira Menandro, aplicações do programa em C++ para a solução de problemas bi e tridimensionais, aplicações para as teorias de vigas, problemas que envolvem outras grandezas físicas e o teste com diversas aplicações com soluções analíticas ou não.

6 Referências

1. BASTOS, R.P.R. **Otimização Do Processo De Interpolação Com Função De Base Radial Aplicado À Prospecção de Petróleo**. Vitória: Universidade Federal do Espírito Santo,2010.
2. BELYTSCHKO, T.Y.Y.; GU.L. **Elemente-Free Galerkin Methods**. Ewanston: Northwestern University ,1993.
3. DUARTE, C.A.;ODEN,J.T. **Numerical Methods for Partial Differential Equations**. H-p Clouds - an h-p Meshless Method, 1996.
4. FREITAS, A.B. **Avaliação do Efeito Das Condições De Contorno e Das Simplificações Da Teoria Unidimensional De Vigas Através Do Método Dos Elementos De Contorno**. Vitória: Universidade Federal do Espírito Santo, 2013.
5. GUEDES,C.M.F.F.M.**Métodos Sem Malha Em Problemas De Mecânica Computacional. Aplicação a Processos de Enformação Plástica**. Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2006.
6. HIBBELER, R.C. **Mechanical of materials**. 5th ed ed. Upper Saddle River, N.J: Pearson Education, 2003.
7. SOUZA, L.Z.**Utilização De Funções De Base Radial De Suporte Compacto Na Modelagem Direta De Integrais De Domínio Com O Método Dos Elementos Finitos**. Vitória: Universidade Federal do Espírito Santo,2013.
8. TIAGO, C. M.; LEITÃO V.M.A. **Utilização De Funções De Base Radial Em Problemas Unidimensionais De Análise Estrutural**. Lisboa: Instituto Superior Técnico,2002.
9. TIMOSHENKO,S. **Strength of Materials, Part 1 : Elementary Theory and Problems**. [s.l.]D.Van Nostrand Company, Inc.,1940.v.1
10. WONG, S.;HON,Y.; GOLDBERG,M. **Compactly supported radial basis functions for shallow water equations**. Applied Mathematics and Computation,v.127, 2002.