

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

PEDRO VINICIUS MOREIRA PEREIRA

USO DE FUNÇÕES DE BASE RADIAL DE SUPORTE PLENO NA SOLUÇÃO
DAS INTEGRAIS DE DOMÍNIO DA EQUAÇÃO DE POISSON
USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

VITÓRIA-ES
2014

PEDRO VINICIUS MOREIRA PEREIRA

**USO DE FUNÇÕES DE BASE RADIAL DE SUPORTE PLENO NA SOLUÇÃO
DAS INTEGRAIS DE DOMÍNIO DA EQUAÇÃO DE POISSON
USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

**Projeto de graduação apresentado à
Universidade Federal do Espírito Santo, como
parte das exigências do Programa de
Graduação em Engenharia Mecânica, para
obtenção do título de Bacharel em Engenharia
Mecânica.**

**Orientador: Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler
Neto**

**VITÓRIA
2014**

FICHA CATALOGRÁFICA

Pereira, Pedro Vinicius Moreira

Uso de funções de base radial de suporte pleno na solução das integrais de domínio da equação de Poisson usando o Método dos Elementos de Contorno – Vitória, 2014.

Nº de páginas - 64

Área de concentração: Sistemas Mecânicos.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto.

Projeto de Graduação – Instituição com toda a hierarquia.

1.Método dos Elementos de Contorno; 2. Equação de Poisson; 3. Funções de base radial

PEDRO VINICIUS MOREIRA PEREIRA

**USO DE FUNÇÕES DE BASE RADIAL DE SUPORTE PLENO NA SOLUÇÃO
DAS INTEGRAIS DE DOMÍNIO DA EQUAÇÃO DE POISSON
USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

Projeto de graduação apresentado à Universidade Federal do Espírito Santo, como parte das exigências do Programa de Graduação em Engenharia Mecânica, para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

APROVADO POR:

Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto
(Orientador)
(Universidade Federal do Espírito Santo)

Prof. Dr. Fernando César Meira Menandro
(Universidade Federal do Espírito Santo)

Prof. Dr. Antônio Bento Filho
(Universidade Federal do Espírito Santo)

RESUMO

USO DE FUNÇÕES DE BASE RADIAL DE SUPORTE PLENO NA SOLUÇÃO DAS INTEGRAIS DE DOMÍNIO DA EQUAÇÃO DE POISSON USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

O presente trabalho objetiva apresentar o desenvolvimento matemático e avaliação da eficiência e viabilidade da aplicação de uma formulação alternativa do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para o tratamento aproximado do termo não homogêneo que caracteriza a Equação de Poisson. A formulação utilizada no tratamento da integral de domínio é denominada Método dos Elementos de Contorno com Integração de Contorno (MECIC). Com o intuito de avaliar a efetividade desta formulação, são realizados diversos testes, que calculam respostas numéricas para problemas bidimensionais simples, regidos pela Equação de Poisson. As soluções numéricas destes problemas são aferidas com a resposta analítica e assim, então, são gerados tabelas e gráficos de erros globais relativos, pelos qual se dá a análise da efetividade da nova formulação.

São utilizadas as funções de base radial simples e de placa fina para a interpolação do campo, ambas com suporte pleno. Há ainda testes com a variação da quantidade de elementos de contorno e dos pontos de interpolação para avaliar o comportamento da formulação com o refinamento da malha.

Palavras-Chaves: Método dos Elementos de Contorno, Funções de Base Radial, Equação de Poisson.

ABSTRACT

USE OF FULL SUPPORT RADIAL BASIS FUNCTIONS FOR SOLUTION OF FIELD INTEGRALS IN POISSON EQUATION USING BOUNDARY ELEMENT METHOD.

This study presents the mathematical development and evaluation of the efficiency and implementation feasibility of an alternative Boundary Element Method (BEM) formulation to approximate the inhomogeneous term related to the Poisson equation. The formulation used in the treatment of the integral domain is called the Direct Integration Boundary Element Method (DIBEM). In order to evaluate the effectiveness of this formulation, several tests that calculate numerical solutions of simple two-dimensional problems governed by the Poisson equation are carried out. The numerical solutions of these problems are compared with the analytical solution and global errors are computed on tables and graphics for more suitable analysis of the accuracy of the new formulation.

For the interpolation of the field, simple radial and thin plate radial basis functions are used, both with full support. Many tests by varying the amount of boundary elements and the interpolation points are implemented to evaluate the behavior of the formulation with the mesh refinement.

Keywords: Boundary Element Method, Radial Basis Functions, Poisson Equation.

LISTAS

Lista de Figuras

Figura 1 - Carga pontual em domínio infinito.	20
Figura 2 – Valor da função Delta de Dirac para domínio em uma dimensão.	20
Figura 3 – Tipos de elementos de contorno.....	23
Figura 4 – Contorno dividido em elementos lineares.	24
Figura 5 – Interpolação linear nos valores do potencial nos elementos discretizado.	25
Figura 6– Representação dos nós duplos.....	26
Figura 7– Afastamento dos nós duplos.....	26
Figura 8– Barra engastada com densidade constante.	33
Figura 9– Secções escolhidas para a computação dos erros	34
Figura 10 – Erro médio global para a variável potencial com uso da função de base radial simples no problema da barra tracionada com densidade constante. Referente à tabela 1.	35
Figura 11 - Erro médio global para a derivada normal com uso da função de base radial simples no problema da barra tracionada com densidade constante. Referente à tabela 2.	36
Figura 12 - Erro médio global para a variável potencial com uso da função de base radial placa fina no problema da barra tracionada com densidade constante. Referente à tabela 3.	37
Figura 13 - Erro médio global para a derivada normal com uso da função de base radial placa fina no problema da barra tracionada com densidade constante. Referente à tabela 4.	38
Figura 14 - Erro médio global para a variável potencial com uso da função de base radial simples no problema da barra tracionada com densidade variando linearmente. Referente à tabela 5.	40
Figura 15 - Erro médio global para a derivada normal com uso da função de base radial simples no problema da barra tracionada com densidade variando linearmente. Referente à tabela 6.	41
Figura 16 - Erro médio global (%) para a variável potencial com uso da função de base radial placa fina no problema da barra tracionada com densidade variando linearmente. Referente à tabela 7. .	42
Figura 17 - Erro médio global para a derivada normal com uso da função de base radial placa fina no problema da barra tracionada com densidade variando linearmente. Referente à tabela 8.	43
Figura 18 - Erro médio global para a variável potencial com uso da função de base radial simples no problema da barra tracionada com densidade variando senoidalmente. Referente à tabela 9.....	45
Figura 19 - Erro médio global para a derivada normal com uso da função de base radial simples no problema da barra tracionada com densidade variando senoidalmente. Referente à tabela 10.....	46
Figura 20 - Erro médio global para a variável potencial com uso da função de base radial placa fina no problema da barra tracionada com densidade variando senoidalmente. Referente à tabela 11.....	47
Figura 21 - Erro médio global para a derivada normal com uso da função de base radial placa fina no problema da barra tracionada com densidade variando senoidalmente. Referente à tabela 12.....	48
Figura 22– Membrana bi-engastada e carregada	49
Figura 23– Distribuição de carga na membrana bi-engastada.....	49
Figura 24 - Erro médio global para a variável potencial com uso da função de base radial simples no problema da membrana bi-engastada. Referente à tabela 13.....	51
Figura 25 - Erro médio global para a derivada normal com uso da função de base radial simples no problema da membrana bi-engastada. Referente à tabela 14.....	52
Figura 26 - Erro médio global para a variável potencial com uso da função de base radial placa fina no problema da membrana bi-engastada. Referente à tabela 15.....	53

Figura 27 - Erro médio global para a derivada normal com uso da função de base radial placa fina no problema da membrana bi-engastada. Referente à tabela 16.	54
Figura 28– Seção de uma barra quadrada sujeita a torção.	56
Figura 29 - Erro médio global com uso da função de base radial simples no problema da seção de barra quadrada sujeita a torção para diferentes afastamentos, as malhas menos refinadas. Referente à tabela 17.	58
Figura 30 - Erro médio global com uso da função de base radial simples no problema da seção de barra quadrada sujeita a torção para diferentes afastamentos, as malhas mais refinadas. Referente à tabela 17.	58
Figura 31 - Erro médio global com uso da função de base radial placa fina no problema da seção de barra quadrada sujeita a torção para diferentes afastamentos. Referente à tabela 18.	59
Figura 32 - Erro médio global com uso da função de base radial simples no problema da seção de barra quadrada sujeita a torção. Referente à tabela 19.	60
Figura 33 - Erro médio global com uso da função de base radial placa fina no problema da seção de barra quadrada sujeita a torção. Referente à tabela 20.	61

Lista de Tabelas

Tabela 1 - Erro médio global para a variável potencial com uso da função de base radial simples no problema da barra tracionada com densidade constante.	34
Tabela 2 - Erro médio global para a derivada normal com uso da função de base radial simples no problema da barra tracionada com densidade constante.	35
Tabela 3 - Erro médio global para a variável potencial com uso da função de base radial placa fina no problema da barra tracionada com densidade constante.	36
Tabela 4 - Erro médio global para a derivada normal com uso da função de base radial placa fina no problema da barra tracionada com densidade constante.	37
Tabela 5 - Erro médio global para a variável potencial com uso da função de base radial simples no problema da barra tracionada com densidade variando linearmente.	39
Tabela 6 - Erro médio global para a derivada normal com uso da função de base radial simples no problema da barra tracionada com densidade variando linearmente.	40
Tabela 7 - Erro médio global para a variável potencial com uso da função de base radial placa fina no problema da barra tracionada com densidade variando linearmente.	41
Tabela 8 - Erro médio global para a derivada normal com uso da função de base radial placa fina no problema da barra tracionada com densidade variando linearmente.	42
Tabela 9 - Erro médio global para a variável potencial com uso da função de base radial simples no problema da barra tracionada com densidade variando senoidalmente.	44
Tabela 10 - Erro médio global para a derivada normal com uso da função de base radial simples no problema da barra tracionada com densidade variando senoidalmente.	45
Tabela 11 - Erro médio global para a variável potencial com uso da função de base radial placa fina no problema da barra tracionada com densidade variando senoidalmente.	46
Tabela 12 - Erro médio global para a derivada normal com uso da função de base radial placa fina no problema da barra tracionada com densidade variando senoidalmente.	47
Tabela 13 - Erro médio global para a variável potencial com uso da função de base radial simples no problema da membrana bi-engastada.	51
Tabela 14 - Erro médio global para a derivada normal com uso da função de base radial simples no problema da membrana bi-engastada.	52

Tabela 15 - Erro médio global para a variável potencial com uso da função de base radial placa fina no problema da membrana bi-engastada.....	52
Tabela 16 - Erro médio global para a derivada normal com uso da função de base radial placa fina no problema da membrana bi-engastada.....	53
Tabela 17 - Erro médio global com uso da função de base radial simples no problema da seção de barra quadrada sujeita a torção para diferentes afastamentos.	57
Tabela 18 - Erro médio global com uso da função de base radial placa fina no problema da seção de barra quadrada sujeita a torção para diferentes afastamentos.	57
Tabela 19 - Erro médio global com uso da função de base radial simples no problema da seção de barra quadrada sujeita a torção.....	59
Tabela 20 - Erro médio global com uso da função de base radial placa fina no problema da seção de barra quadrada sujeita a torção.....	60

SUMÁRIO

RESUMO.....	5
ABSTRACT.....	6
LISTAS	7
Lista de Figuras.....	7
Lista de Tabelas	8
 1 INTRODUÇÃO	 12
1.1 Comentários Preliminares.....	12
1.2 Objetivo.....	14
1.3 Metas Decorrentes.....	14
1.4 Metodologia	14
1.5 Desenvolvimento	15
 2 O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	 16
2.1 Contexto Histórico.....	16
2.2 Discussões Preliminares.....	16
2.3 Equacionamento Básico do MEC	17
2.4 A Solução Fundamental	19
 3 MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO COM INTEGRAÇÃO DE CONTORNO	 22
3.1 Formulação MECIC	22
3.2 O Conceito de Discretização no MEC.....	23
3.3 Tipo de Interpolação nos Elementos de Contorno	24
3.4 Nós Duplos	25
3.5 Discretização da Equação Integral de Contorno.....	27
3.6 Procedimento Operacional da MECIC	28
3.7 Interpolações com Funções de Base Radial	29
 4. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS	 31
4.1 Aspectos Gerais	31

4.2 Parâmetros de Teste	31
4.2.1 Malhas	31
4.2.2 Critérios de Erro	32
4.3 Exemplos	32
4.3.1 Barra Tracionada Densidade Constante	32
4.3.2 Barra Tracionada com Densidade Variando Linearmente	39
4.3.3 Barra Tracionada com Densidade Variando Senoidalmente	44
4.3.4 Membrana Tracionada	48
4.3.5 Secção de Barra Quadrada Sujeita a Torção	55
5 CONCLUSÕES	62
6 REFERÊNCIAS	63

1 INTRODUÇÃO

1.1 Comentários Preliminares

A modelagem numérica e computacional é uma área da matemática na qual se encontram vários e diversificados métodos que se constituem em ferramentas para se determinar aproximadamente soluções de problemas modelados matematicamente. Num sentido mais amplo, a busca de soluções aproximadas tem sido muito importante na resolução destes problemas quando não existe a possibilidade de resolvê-los por técnicas exatas.

O uso de métodos numéricos é essencial para resolver problemas complexos e em larga escala relacionados à engenharia. Ferramentas podem ser construídas para que, de forma simples, se solucione um problema que demandaria uma quantidade numerosa de profissionais e muito tempo. Essas ferramentas são utilizadas há tempos na indústria, centros de pesquisas e universidades para automatizar os cálculos e fornecer resultados rápidos e confiáveis, eliminando erros que poderiam ser cometidos por pessoas, uma vez que máquinas não cometem erros simples de cálculo. O grande avanço da tecnologia permitiu o fácil acesso a essas ferramentas e softwares, que constituem hoje um recurso fundamental para a engenharia.

Alguns problemas comuns são regidos por equações de solução difícil, que envolvem muitas variáveis e extensos algebrismos. Algumas vezes, mesmo os problemas aparentemente triviais podem ser, na prática, insolúveis para determinadas geometrias. Mas a maior parte dos problemas concretos são, em geral, complexos e envolvem fenômenos não lineares. É comum, então, encontrarem-se situações em que os conhecimentos matemáticos disponíveis não são suficientes para a obtenção descoberta da solução de um problema real. Assim, deve-se fazer uso de um método numérico para obter a solução aproximada de um modelo ou sistema exato condizente com o problema.

Os principais métodos numéricos são baseados na ideia de discretização, ou seja, a representação do meio contínuo e infinito é substituída por uma quantidade finita e matematicamente consistente de pontos. Quanto à discretização, esses métodos podem ser classificados em discretização de domínio e contorno. O primeiro é representado por pontos amostrais em todo o problema, e o segundo apenas no contorno.

Para a viabilidade da utilização desses métodos em problemas reais, deve haver minimização dos erros de aproximação e redução do tempo de processamento, para que os métodos numéricos possam dar soluções úteis em tempos cada vez mais curtos, se tornando assim aceitáveis para aplicações na indústria, cada vez mais dinâmica e exigente quanto à exatidão dos resultados.

Para indústrias mais competitivas que fazem uso de tecnologia de ponta e estão sempre a explorar novas fronteiras, como a indústria do petróleo, é de suma importância o desenvolvimento de novos métodos eficientes. A descoberta das

jazidas de óleo nas camadas do pré-sal trouxe grandes expectativas de verdadeira auto-suficiência do país quanto à disponibilidade energética em termos da matriz de produção de óleo e gás combustível. Mas ampliou do mesmo modo os desafios com relação ao desenvolvimento de tecnologias que permitam a otimização de todos os componentes da cadeia de produção do petróleo, desde a prospecção até o processamento. No que tange à prospecção, particularmente, há necessidade de metodologias cada vez mais eficientes, que garantam precisão com custos reduzidos.

Em termos de modelagem matemática, o emprego do método sísmico de reflexão é o mais utilizado atualmente na indústria do petróleo. A razão disso provém da sua relativa eficiência e baixo custo. No entanto, é contínua a busca por técnicas que permitam uma definição cada vez mais precisa das feições geológicas, de forma a haver melhor identificar das regiões mais propícias ao acúmulo de hidrocarbonetos.

Os métodos numéricos mais importantes da Mecânica Computacional, inicialmente gerados para análise e solução de problemas estruturais e projetos de máquinas e equipamentos, são ferramentas fundamentais nessa fase de processamento dos dados de campo e construção das imagens geológicas. Sabe-se que é possível prever do ponto de vista teórico a resposta sísmica do meio heterogêneo, utilizando uma modelagem matemática adequada. Para tal torna-se necessário conhecer os vários parâmetros físicos associados às camadas geológicas e, em particular, a velocidade de propagação de ondas.

Ao mesmo tempo em que se busca aprimorar a precisão dessas ferramentas computacionais, intenta-se igualmente a redução do custo computacional despendido nessa fase, seja no armazenamento de dados sismográficos, quanto no próprio processamento para obtenção da resposta sísmica.

O presente trabalho se inclui no contexto de desenvolvimento de uma pesquisa relacionada ao aprimoramento de uma técnica numérica baseada no Método dos Elementos de Contorno, com vistas futuras à simulação sísmica, mais precisamente na simulação da propagação das ondas de choque através das camadas rochosas heterogêneas do solo. Entretanto, embora a intenção seja o desenvolvimento de uma formulação voltada para a dinâmica, este processo de elaboração passa, necessariamente, pela solução efetiva de problemas mais simples, como os governados pela Equação de Poisson.

A formulação aqui proposta, Método dos Elementos de Contorno com Integração de Contorno (MECIC), permite a utilização de funções de base radial plena ou compacta para a interpolação de cargas de domínio atuantes em um corpo. Tais funções são hoje largamente aplicadas nos procedimentos de aproximação com os mais diversos métodos e são muito versáteis. Através de um procedimento matemático artificioso, mostrado no decorrer deste trabalho, os termos referentes às cargas de domínio são transformados de modo a serem integrados apenas no contorno do problema.

1.2 Objetivo

Buscando um nível mais elevado de precisão e alcance dos métodos numéricos é aqui apresentada uma formulação alternativa do Método dos Elementos de Contorno (MEC) voltada à abordagem mais eficiente de problemas com ações de domínio. Nesse contexto, serão apresentadas simulações de problemas de campo escalar governados pela Equação de Poisson, usando uma formulação do Método dos Elementos de Contorno com Integração de Contorno (MECIC) com o objetivo de testar sua eficiência na solução de tais problemas.

1.3 Metas Decorrentes

Com o desenvolvimento do MECIC, procura-se obter uma alternativa para as atuais técnicas relacionadas ao Método dos Elementos de Contorno que são aplicadas para solução dos Problemas de Poisson, como as integrações em células, a formulação com Dupla Reciprocidade e outras [1]. Espera-se que essa formulação apresente exatidão em seus resultados e velocidade de processamento de dados satisfatória, de forma a se tornar uma opção viável na solução de tais problemas. Mas, na realidade, o objetivo final é a concepção de uma formulação flexível e efetiva na modelagem de problemas dinâmicos, particularmente os problemas de análise sísmica. Entretanto, antes de chegar à plenitude deste objetivo, é importante aferir as suas potencialidades resolvendo-se problemas governados pela equação de Helmholtz, envolvendo cálculo de autovalores ou resposta acústica e os casos dependentes do tempo, que se constituem em seguimento natural deste trabalho.

1.4 Metodologia

Com o intuito de determinar a eficácia desse novo método, foram estabelecidos problemas simples, com geometria simplificada, para os quais existem soluções analíticas conhecidas. Estes resultados analíticos foram comparados com os obtidos numericamente através da formulação MECIC.

Em se tratando de métodos discretos, é importante aferir os efeitos do refinamento da malha e do aumento do número dos pontos de informação ou interpolação, usados pelas funções de base radial para aproximar o termo de domínio com mais precisão. Portanto, várias malhas compostas de diferentes quantidades de pontos de contorno e pontos internos de interpolação foram utilizadas.

Devido ao erro apresentado nas soluções do MEC não ser uniforme na geometria do problema (o erro é maior nos vértices), o erro utilizado em cada configuração de teste foi o erro médio aritmético de todos os pontos amostrais. A medida de erro adotada para cada ponto foi a diferença entre o valor obtido numericamente e o valor obtido analiticamente, divididos pelo maior valor analítico em todo o problema. Esse valor percentual obtido avalia a eficácia da formulação em questão na aproximação da solução real do problema.

1.5 Desenvolvimento

A estrutura desse trabalho se dá na forma de cinco capítulos. No primeiro é apresentada a motivação da pesquisa, a metodologia adotada e os resultados esperados.

No segundo capítulo é apresentada a formulação básica do MEC, na forma de uma revisão bibliográfica. Já no terceiro são abordados a formulação do MECIC, e considerações utilizadas na discretização dos problemas.

O quarto capítulo traz os experimentos numéricos realizados para a validação do método com breves discussões sobre os resultados obtidos.

Em seguida, o quinto capítulo, apresenta as conclusões obtidas com o desenvolvimento do trabalho, com considerações e ponderações.

2 O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

2.1 Contexto Histórico

As bases do método dos elementos de contorno são encontradas nos trabalhos dos matemáticos russos e alemães sobre equações integrais, feitos principalmente no final do século XIX e início do século XX.

Estudos fundamentaram a área de conhecimentos da Teoria dos Potenciais. Em princípio essa disciplina tinha como um dos seus principais tópicos a busca de soluções singulares, conhecidas como funções de Green, geradas a partir de cargas ou fontes pontualmente localizadas. Tais funções permitiam construir soluções analíticas a partir da composição integral da resposta obtida para diversas fontes, numa ideia similar ao conceito de coeficientes de influência. Por força da formulação integral, o Teorema da Divergência foi empregado como principal estratégia de solução, por estabelecer o problema em termos de integrais de contorno, mais fáceis de serem resolvidas.

Contudo, a dificuldade em se encontrar uma função de Green para os casos mais complexos, assim como dificuldades para resolução do problema de valor de contorno para geometrias complicadas, fez com que esse procedimento se limitasse a abordagem de casos simples.

Pesquisas se sucederam, ampliando as fronteiras de aplicação dos métodos que envolviam integrais de contorno, em paralelo com o desenvolvimento dos grandes computadores, que permitiram viabilizar soluções aproximadas dos problemas, aproveitando a ideia de discretização.

Exatamente pelos vínculos históricos entre as técnicas integrais de contorno e a teoria dos potenciais, a penetração das técnicas de contorno é bastante grande junto aos problemas de campo escalar, tais como proteção catódica, transferência de calor, escoamentos potenciais, acústica, percolação em meios porosos e outros, não obstante o emprego relevante junto à área estrutural.

Enfoques mais gerais, ligados não só à teoria das equações integrais, mas também ao método dos resíduos ponderados, unificam a maior parte das técnicas numéricas mais destacadas, incluindo o Método dos Elementos Finitos, Método das Diferenças Finitas e Método dos Elementos de Contorno. Isto posiciona estas técnicas como ramificações distintas de uma mesma formulação global, o que permite melhor compreender as estruturas matemáticas envolvidas e avaliar as potencialidades de cada uma delas.

2.2 Discussões Preliminares

Uma das principais características do Método dos Elementos de Contorno consiste em discretizar o problema apenas em seu contorno, reduzindo em uma dimensão o problema. Por exemplo, um problema bidimensional se reduz somente a

linha unidimensional de contorno do domínio necessário a ser discretizado dentro dos elementos e um problema tridimensional se reduz à superfície do domínio que necessita ser discretizado. Isto significa que, comparado à análise de um domínio tipo Método dos Elementos Finitos (MEF), uma análise de contorno resulta em uma substancial redução na preparação dos dados e um sistema algébrico de equações menor, a ser resolvido numericamente.

Por fundamentar-se apenas na discretização do contorno, é possível apontar vantagens em relação às “técnicas de domínio”, como a menor entrada de dados, matrizes menores e abordagem de problemas de fronteira móvel. Por outro lado, tais matrizes não são simétricas e não são esparsas, o que resulta em maior custo computacional, especialmente para grandes aplicações.

O MEC apresenta ainda vantagens de menor importância, como melhor representação de concentração de ações (tensões e gradientes de outras grandezas em geral), adequação para problemas de domínio aberto, precisão de resultados, cálculo simultâneo da variável básica e sua derivada.

O MEC também possui desvantagens em relação às técnicas de domínio, como em problemas não homogêneos, não-linearidades das equações, necessidade de cálculo de soluções fundamentais para cada caso, corpos esbeltos (muito contorno e pouco domínio), cascas e cabos, além de esbeltos, são complicados em sua formulação, e ações de domínio não são representadas com elevada precisão. O aprendizado do MEC exige um conhecimento mais elaborado de análise vetorial. Além disso, pela sua essência, o método não pode ser estendido genericamente a problemas cujo operador não possua certas propriedades, como ser auto-adjunto por exemplo. Outro grande fator que desestimula o uso do MEC na indústria é a falta de programas comerciais abrangentes e a implementação computacional mais difícil.

Cabe ressaltar que o MEC, assim como outros métodos importantes, é uma técnica aproximada que resolve equações diferenciais, comumente associadas a problemas físicos, que são reescritas em conveniente forma integral. Logo, para aplicar o MEC é necessário que esteja disponível o modelo matemático ou equação diferencial referente ao problema que se quer resolver.

Como resultado do aprimoramento constante do MEC, atualmente é possível a abordagem de casos escalares e vetoriais, problemas não-lineares e transientes. A aplicação do MEC é vasta e diversas áreas estão sendo beneficiadas com sua aplicação: fraturas, contatos, aerodinâmica, mecânica dos solos, proteção catódica, elasticidade, entre outros. Isto significa que é preciso constantemente desenvolver novas abordagens, para atender à crescente demanda da engenharia por métodos mais efetivos.

2.3 Equacionamento Básico do MEC

Em contrapartida a métodos mais conhecidos para a solução de equações diferenciais parciais, como o Método dos Elementos Finitos e o Método das

Diferenças Finitas, ao longo das últimas décadas o MEC tem recebido maior atenção dos pesquisadores e se tornou uma alternativa destacada para a solução de problemas de física e engenharia. Ainda que não possa ser usado para a solução de uma grande variedade de equações diferenciais parciais como os outros métodos.

O MEC compreende uma formulação integral onde uma função com propriedades especiais é empregada – a solução fundamental. Entre estas propriedades está o fato de ser solução de um problema correlato. Sob a ótica do Método dos Resíduos Ponderados [1] é possível enxergar a causa da excelente exatidão do MEC no fato da solução fundamental atender muito satisfatoriamente aos requisitos necessários a uma função de ponderação. Esse bom desempenho permite usar elementos de contorno de ordem baixa (elementos constantes, por exemplo) e se obter ótimos resultados.

Existem basicamente duas maneiras de se formular matematicamente o método dos elementos de contorno. A primeira delas alicerça-se na Teoria das Equações Integrais e a segunda fundamenta-se no Método dos Resíduos Ponderados. Esses métodos, embora contenham enfoques distintos, conduzem às mesmas equações, o que permite se construir um entendimento global do MEC a partir de conceitos envolvidos em ambas as formulações.

No presente trabalho tem-se o objetivo de apresentar a viabilidade da formulação MECIC para a solução de problemas regidos pela equação de Poisson.

Seja a equação de Poisson, a seguir:

$$\nabla^2 u = p \quad (01)$$

A equação do potencial ou equação de Poisson é uma equação diferencial parcial (EDP) do tipo elíptica. Via de regra, as EDP's não possuem um método de solução geral. Suas soluções podem ser encontradas de forma analítica para cada caso em particular ou por meio de métodos numéricos.

Essa equação é o modelo matemático de diversas aplicações de engenharia e física, como problemas de distribuição de temperatura no caso estacionário, torção, potencial gerado por cargas elétricas, etc. Então, a variável de interesse u pode representar diversas grandezas, como temperatura, pressão ou deslocamento.

Como ilustração dos procedimentos matemáticos do MEC, primeiro será deduzida a formulação clássica do MEC para o lado esquerdo da equação, referente ao laplaciano da variável u , e posteriormente será tratado o termo não homogêneo da equação, através do procedimento MECIC.

Assim sendo, o procedimento habitual do MEC consiste na formulação integral da equação diferencial do problema, gerando a seguinte sentença:

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = \int_{\Omega} p u^* d\Omega \quad (02)$$

Vê-se que no núcleo da formulação integral foi introduzida a função auxiliar u^* , também denominada de solução fundamental do problema. Esta função

corresponde à solução fundamental de um problema escalar governado pela equação de Poisson, no qual a fonte é unitária e concentrada no ponto fonte ξ . X identifica as variáveis espaciais cartesianas x_i , e ξ representam pontos campo e fonte no domínio.

Sob a ótica do método dos resíduos ponderados, o valor do potencial u é calculado aproximadamente, havendo uma diferença entre o valor do potencial obtido e a solução da equação de Laplace. A minimização desse erro ocorre na forma integral, que ortogonaliza esse erro no espaço da solução do problema correlato dado pela solução fundamental. A solução fundamental atende bem a esse quesito, por ser a solução analítica de um problema afim.

Fazendo uso da regra da derivação do produto, a saber:

$$u_{,i}u^* = (u u^*)_{,i} - u u^*_{,i} \quad (03)$$

Pode-se levar da forma Integral Forte a forma Integral Fraca:

$$\int_{\Omega} \left[(u_{,i}u^*)_{,i} - u_{,i}u^*_{,i} \right] d\Omega = \int_{\Omega} p u^* d\Omega \quad (04)$$

Onde o Ω representa todo o domínio regido pela equação. Aplicando mais uma vez, obtem-se a forma Integral Inversa:

$$\int_{\Omega} \left[(u_{,i}u^*)_{,i} - (u u^*_{,i})_{,i} + (u u^*_{,ii}) \right] d\Omega = \int_{\Omega} p u^* d\Omega \quad (05)$$

De acordo com o Teorema da Divergência [2] e tomando Γ como representativo do contorno do problema, tem-se:

$$\int_{\Omega} (v_i)_{,i} d\Omega = \int_{\Gamma} v_i n_i d\Gamma \quad (06)$$

Pode-se então levar o problema do domínio para o contorno. Aplicando o Teorema da Divergência à forma Integral Inversa obtém-se:

$$\int_{\Omega} \left[(u_{,i}u^*)_{,i} - (u u^*_{,i})_{,i} + (u u^*_{,ii}) \right] d\Omega = \int_{\Gamma} u_{,i}u^* n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} u u^*_{,i} n_i d\Gamma + \int_{\Omega} u u^*_{,ii} d\Omega = \int_{\Omega} p u^* d\Omega \quad (07)$$

2.4 A Solução Fundamental

A função auxiliar u^* deve possuir propriedades que facilitem a eliminação da integral de domínio restante e, de acordo com a Técnica dos Resíduos Ponderados, garanta a minimização dos erros na obtenção da solução aproximada. Dessa forma se utiliza para essa função a solução de um problema correlato, que será a solução

de um problema de Poisson com a ação de domínio concentrada sobre um ponto ξ em um domínio infinito.

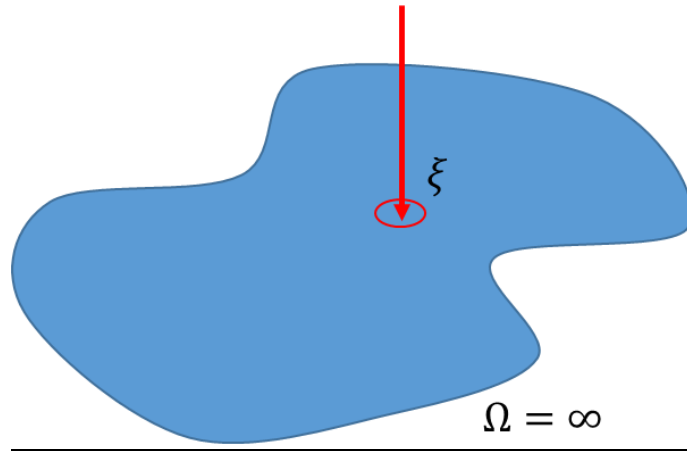


Figura 1 - Carga pontual em domínio infinito.

A função auxiliar, $u^*(\xi; x)$, é a solução em um domínio infinito da equação 08:

$$u_{,ii}^* = -\Delta(\xi; X) \quad (08)$$

A função $-\Delta(\xi; X)$ é conhecida como Delta de Dirac, e representa a ação externa pontual em $X = \xi$. A função Delta de Dirac possui as propriedades dadas a seguir:

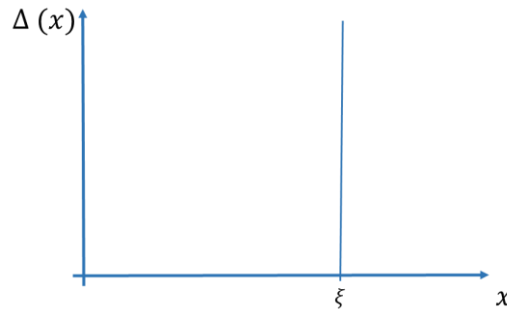


Figura 2 – Valor da função Delta de Dirac para domínio em uma dimensão.

$$x = \xi \Rightarrow \Delta \rightarrow \infty \quad (09a)$$

$$x \neq \xi \Rightarrow \Delta = 0 \quad (09b)$$

Também:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Delta(\xi; x) dx = f(\xi) \quad (10)$$

A representação matemática do problema correlato é dada tomando-se a equação 08, em coordenadas polares (no caso bidimensional):

$$\frac{d^2 u^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du^*}{dr} = -\Delta(\xi; X) \quad (11)$$

A solução da equação anterior é:

$$u^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi} \ln r(\xi; X) \quad (12)$$

E para problemas tridimensionais:

$$u^*(\xi; X) = -\frac{1}{4\pi r(\xi; X)} \quad (13)$$

Considerando as propriedades da equação Delta de Dirac aplicada a integral de domínio restante:

$$\int_{\Omega} u_{,ii}^* u d\Omega = - \int_{\Omega} \Delta(\xi; X) u d\Omega = -C(\xi) u(\xi) \quad (14)$$

Onde $C(\xi)$ assume diferentes valores em relação à posição na geometria do problema, como determina a função Delta de Dirac, assumindo os seguintes valores de acordo com sua localização.

$$C(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi \in \Omega(X) \\ \frac{1}{2} & \text{se } \xi \in \Gamma(X) \\ 0 & \text{se } \xi \notin (\Omega(X) + \Gamma(X)) \end{cases} \quad (15)$$

Os valores de $C(\xi)$ só terão os valores indicados em casos de contornos suaves. Logo:

$$- \int_{\Gamma} u_{,i} u^* n_i d\Gamma + \int_{\Gamma} u u_{,i}^* n_i d\Gamma + C(\xi) u(\xi) = - \int_{\Omega} p u^* d\Omega \quad (16)$$

Fazendo:

$$q = u_{,i} n_i \quad (17a)$$

$$q^* = u_{,i}^* n_i \quad (17b)$$

Obtém-se a forma Integral Inversa, típica do MEC:

$$- \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma + C(\xi) u(\xi) = - \int_{\Omega} p u^* d\Omega \quad (18)$$

Assim, o lado esquerdo da equação que compreendia uma integral relacionada a todo o domínio fica reduzido a um problema de contorno, dando então razão ao nome do método.

3 MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO COM INTEGRAÇÃO DE CONTORNO

3.1 Formulação MECIC

A formulação aqui proposta realiza a discretização do termo de campo da equação de Poisson, que não pode ser diretamente transformada numa integral de contorno. Com a MECIC, a partir da utilização de funções de base radial plena ou compacta para a interpolação de cargas de campo atuantes em um corpo é possível realizar a transformação mencionada.

Considere novamente a equação de Poisson na sua forma Integral Inversa, conforme deduzido previamente:

$$C(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X)d\Gamma - \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X) d\Gamma = - \int_{\Omega} p(X)u^*(\xi; X)d\Omega \quad (19)$$

O proposto é resolver a integral de domínio do termo fonte usando funções de base radial, ao invés de realizar a integração por células ou empregar outras formulações já utilizadas comumente no âmbito do MEC como a Dupla Reciprocidade [1]. Para isto, todo o núcleo da integral de domínio é interpolado por funções de base radial, escolhidas de acordo com propriedades de interesse:

$$p(X)u^*(\xi; X) = F^j(X^j; X) \xi_{\alpha^j} \quad (20)$$

Diferentemente do que é feito na Dupla Reciprocidade [1], agora a ação de domínio vem acompanhada da solução fundamental, que depende do ponto fonte. Mas, similarmente à Dupla Reciprocidade, o método proposto também usa uma função Ψ_j primitiva, para a solução do termo integral do lado direito da Eq. 02 com base no procedimento proposto, todo o núcleo da integral de domínio é aproximado da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \left(\xi_{\alpha^j} \Psi_{,ii}^j(X) \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\xi_{\alpha^j} \Psi_{,i}^j(X) n_i(X) \right) d\Gamma = \xi_{\alpha^j} \int_{\Gamma} \eta^j(X) d\Gamma \quad (21)$$

Então, tem-se a equação analítica do problema de Poisson apenas com integrais de contorno:

$$C(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X)d\Gamma - \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X) d\Gamma = - \xi_{\alpha^j} \int_{\Gamma} \eta^j(X) d\Gamma \quad (22)$$

Para avançar a partir deste ponto, é preciso introduzir o conceito de discretização das integrais.

3.2 O Conceito de Discretização no MEC

Uma vez obtida a equação em sua forma inversa, o próximo passo se dá através da discretização da equação integral e formação de um sistema de equações lineares para posterior solução computacional.

A discretização consiste na aproximação de um meio contínuo por uma quantidade finita de pontos que o representem, os nós funcionais.

Nos nós funcionais são definidas variações da grandeza básica ou sua derivada normal em função de valores em determinados pontos. Esses pontos podem se posicionar de diferentes maneiras, em função do nível de refinamento desejado, da ordem de interpolação e outros aspectos. Quanto maior for a quantidade de elementos utilizados na discretização melhor se torna a aproximação do contínuo, que é idealizado como uma quantidade infinita de pontos discretos. Uma quantidade muito reduzida de elementos pode gerar uma representação geométrica distorcida ou não propiciar uma aproximação eficiente da variável de interesse. A partir destes pontos, com o auxílio das funções de interpolação, podem-se expressar valores para todo o domínio através de uma nova interpolação, utilizando os valores funcionais.

As interpolações se caracterizam pelo tipo de elemento utilizado, a disposição e a quantidade dos nós funcionais dentro desses elementos. No caso de elementos de contorno em duas dimensões, podem ser, por exemplo: constante, caso haja apenas um nó funcional centralizado e seu valor seja extrapolado para todo o elemento; linear, tendo dois nós nas extremidades, com seus valores interpolados linearmente no restante do elemento, etc.

A conformação geométrica dos elementos de contorno pode ser adaptada segundo as necessidades de melhor representação do domínio físico do problema, podendo variar em tamanho, quantidade e o tipo de elemento que é utilizado. Os elementos mais simples e mais empregados são os retilíneos, mas também é frequente o uso de elementos quadráticos, cúbicos e isoparamétricos em geral.

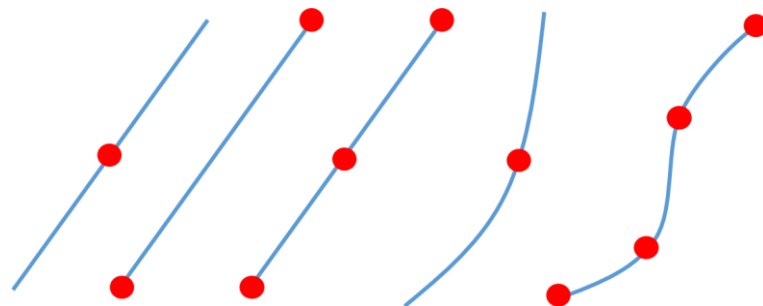


Figura 3 – Tipos de elementos de contorno.

As integrais do contorno são, então, aproximadas pelo somatório de um número finito de integrais dos elementos discretizados. A figura a seguir mostra um exemplo de um contorno discretizado com elementos lineares aplicados ao contorno.

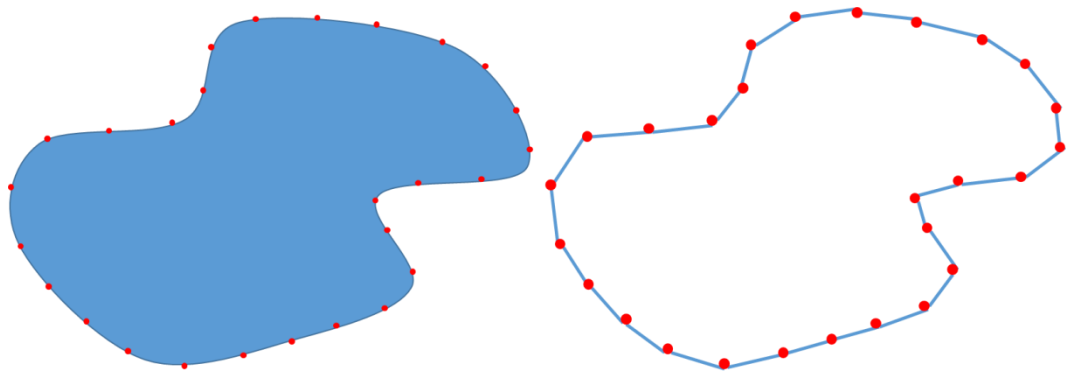


Figura 4 – Contorno dividido em elementos lineares.

Diante do exposto, pode-se, então, escrever que o contorno é dividido por segmentos de modo que:

$$\int_{\Gamma} d\Gamma \approx \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} d\Gamma_i \quad (23)$$

Matematicamente, caracterizam-se as interpolações dos valores nodais sobre todos os elementos através do arranjo matricial:

$$u(X_j) = Nu_j^{(n)} \quad (24a)$$

$$q(X_j) = Nq_j^{(n)} \quad (24b)$$

Onde N contém as funções de interpolação, n indica o ponto nodal ao longo do elemento j de coordenadas X.

3.3 Tipo de Interpolação nos Elementos de Contorno

Os elementos utilizados para a discretização do contorno neste trabalho são elementos isoparamétricos lineares. Esses possuem dois nós geométricos que coincidem com os dois nós funcionais, que recebem os valores das variáveis prescritas, seja valores de potencial ou de sua derivada normal. Os valores intermediários são aproximados através de uma interpolação usando funções lineares, utilizando os nós funcionais que se localizam nas extremidades dos elementos como referência para descrever a variável de interesse ao longo do elemento.

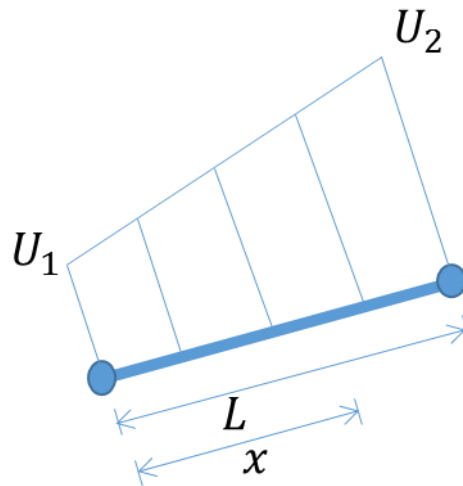


Figura 5 – Interpolação linear nos valores do potencial nos elementos discretizado.

O uso de elementos isoparamétricos lineares foi escolhido por ter uma boa representação do contorno e fornecer bons resultados para o método com um custo computacional moderado.

A interpolação dos valores dos nós funcionais para o elemento se dá através da seguinte função de interpolação:

$$u = \left(1 - \frac{x}{L}\right) U_1 + \frac{x}{L} U_2 \quad (25)$$

3.4 Nós Duplos

Os elementos lineares são mais efetivos do que os elementos constantes quando há mudança do tipo de condição de contorno em elementos consecutivos ou onde há alteração brusca na direção da normal ao contorno, desde que se utilize de nós duplos nestas situações. Isto porque na presença de vértices haveria uma indefinição no tipo de condição de contorno e mesmo no estabelecimento da normal ao contorno. Para contornar esses problemas, deve-se usar a técnica dos nós duplos, que consiste na sobreposição de dois nós funcionais, com as mesmas coordenadas geométricas. Desta forma, cada nó se localiza em um elemento distinto, podendo tomar valores de variáveis de tipos diferentes e tendo suas normais perpendiculares aos elementos perfeitamente definidas.

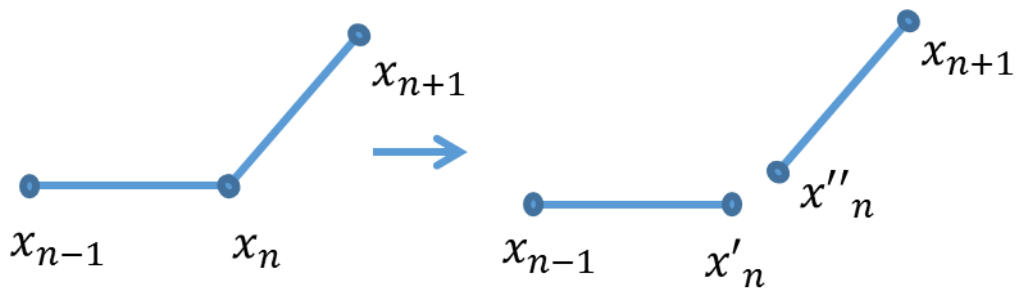


Figura 6– Representação dos nós duplos.

Essa técnica soluciona os problemas criados com o uso dos elementos lineares, mas introduz singularidades quando as condições impostas nos nós duplos são ambas do tipo essencial ou, então, quando se usam técnicas de interpolação como a Dupla Reciprocidade, em que se constroem matrizes baseadas diretamente na distância euclidiana entre pontos.

Por outro lado, caso haja a ocorrência de condições de contorno do tipo essencial em ambos os nós duplos, as equações integrais geradas para estes ficam iguais, devido à matriz de interpolação de funções de base radial ter as mesmas coordenadas para esses pontos. Isso leva à construção do sistema linear com duas linhas iguais. Os vetores da linha dessa matriz deixam de ser linearmente independentes e o sistema deixa de ter uma solução única não trivial, causando essa singularidade.

Para ambas as condições naturais ou mistas, o termo $C(\xi)u(\xi)$ não permite que o conjunto de vetores formados pelas linhas da matriz H se torne linearmente dependentes mesmo com os resultados das integrais sendo os mesmos. Desta forma não ocorre singularidade.

A ocorrência da singularidade pode ser evitada com um afastamento entre esses nós duplos, que não mais apresentariam as mesmas coordenadas geométricas, mas ainda seriam próximos. Esse afastamento, porém, se muito pequeno, distorce os resultados por se aproximar da singularidade e, se muito grande muda a geometria do problema e também se afasta do resultado exato.

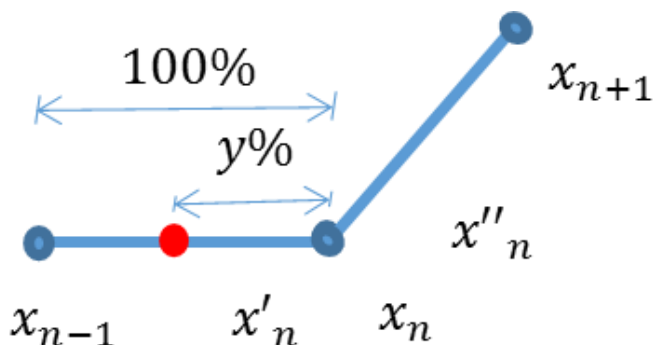


Figura 7– Afastamento dos nós duplos

Entre os testes realizados apenas o de torção apresentou uma configuração em que se tornou necessário o uso do afastamento para superar os problemas

causados pela singularidade. Os resultados desse procedimento serão discutidos na seção correspondente a esse teste.

Essa mesma técnica pode ser usada nos casos em que as formulações do tipo Dupla Reciprocidade e outras que usam funções radiais são empregadas.

3.5 Discretização da Equação Integral de Contorno

Voltando-se, então a equação integral de contorno na forma inversa. Dada a equação de Poisson no contorno:

$$C(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X)d\Gamma - \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X)d\Gamma = -\xi\alpha^j \int_{\Gamma} \eta^j(X)d\Gamma \quad (26)$$

Aplicando a discretização ao contorno em M elementos, a equação integral passa a ser:

$$C(\xi)u(\xi) + \sum_{j=1}^M \left[\int_{\Gamma_j} q^*(\xi; X_j)Nd\Gamma \right] u^{(n)} = \sum_{j=1}^M \left[\int_{\Gamma_j} u^*(\xi; X_j)Nd\Gamma \right] q^{(n)} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \xi\alpha^i \left[\int_{\Gamma_j} \eta_j^i d\Gamma_j \right] \quad (27)$$

Faz-se ξ coincidente com os pontos nodais, como é de praxe com o MEC. Tem-se então que o somatório das integrais faz com que para cada elemento j interaja com ele próprio e os demais. É realizada uma integração sobre si mesmo quando j coincide com ξ , ou seja, o ponto fonte recai sobre o elemento de integração. Quando não há esta coincidência a integração é feita entre pontos fonte distantes dos pontos de integração.

Nomeando as integrais como:

$$H_{\xi j} = \int_{\Gamma_j} q^*(\xi; X_j)Nd\Gamma \quad (28a)$$

$$G_{\xi j} = \int_{\Gamma_j} u^*(\xi; X_j)Nd\Gamma \quad (28b)$$

$$N_i = \sum_{j=1}^M \left[\int_{\Gamma_j} \eta_j^i d\Gamma_j \right] \quad (28c)$$

Tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} & C(\xi)u(\xi) + H_{\xi 1}u_1(\xi; X_1) + H_{\xi 2}u_2(\xi; X_2) + \\ & \dots H_{\xi n}u_n(\xi; X_n) - G_{\xi 1}u_1(\xi; X_1) - G_{\xi 2}u_2(\xi; X_2) - \dots G_{\xi n}u_n(\xi; X_n) = \xi\alpha^1 N_1 + \xi\alpha^2 N_2 + \\ & \dots \xi\alpha^N N_N \end{aligned} \quad (29)$$

A avaliação numérica das integrais é muito simples e é bem conhecida. Assim:

$$\begin{aligned}
H_{11}u_1 + \dots H_{1n}u_n - G_{11}u_1 - \dots G_{1n}u_n &= {}^1\alpha^1 N_1 + {}^1\alpha^2 N_2 + \dots {}^1\alpha^n N_n \\
H_{21}u_1 + \dots H_{2n}u_n - G_{21}u_1 - \dots G_{2n}u_n &= {}^2\alpha^1 N_1 + {}^2\alpha^2 N_2 + \dots {}^2\alpha^n N_n \\
&\vdots \\
H_{n1}u_1 + \dots H_{nn}u_n - G_{n1}u_1 - \dots G_{nn}u_n &= {}^n\alpha^1 N_1 + {}^n\alpha^2 N_2 + \dots {}^n\alpha^n N_n
\end{aligned} \tag{30}$$

Em forma matricial, mais concisa:

$$\begin{pmatrix} H_{11} & \dots & H_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1} & \dots & H_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_{11} & \dots & G_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & \dots & G_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^1\alpha^1 & \dots & {}^1\alpha^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^n\alpha^1 & \dots & {}^n\alpha^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_n \end{pmatrix} \tag{31}$$

As funções de interpolação utilizadas $F_j(X_j, X)$ pertencem a classe das funções de base radial, isto é, o argumento da função é composto pela distância Euclidiana $r(X_j, X)$ entre os pontos de base X_j e os pontos de domínio X , daqui em diante denominados como pontos de informação, conforme será exposto detalhadamente mais à frente.

3.6 Procedimento Operacional da MECIC

De modo similar à formulação com Dupla Reciprocidade (MECDR) [1], toma-se uma função primitiva Ψ_j das funções radiais utilizadas na interpolação original, de modo que se pode utilizar o Teorema da Divergência [2]. Basta então avaliar, através de um esquema numérico, uma integral de linha. Naturalmente, é preciso verificar se esta transformação traz alguma imprecisão numérica ao modelo, o que é verificado através de experiências computacionais. O sistema linear matricial resultante pode ser representado pela Equação:

$$[H]\{u\} - [G]\{q\} = \begin{bmatrix} \xi_\alpha \end{bmatrix} \{N\} = \{P\} \tag{32}$$

Na Eq. 32, $\begin{bmatrix} \xi_\alpha \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada que armazena os valores do coeficiente de interpolação, que por sua vez depende do ponto fonte.

Na formulação proposta, as linhas da matriz são compostas por ξ_α vetores. Para os problemas de Poisson a obtenção desta matriz é bastante simples. O cálculo pode ser feito da seguinte maneira. Sabe-se que:

$$[F] \begin{bmatrix} \xi_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_\Lambda \end{bmatrix} p \tag{33}$$

Então:

$$\begin{bmatrix} \xi \alpha \end{bmatrix} = [F]^{-1} \begin{bmatrix} \xi \Lambda \end{bmatrix} [F] \alpha = [F]^{-1} \begin{bmatrix} \xi \Lambda \end{bmatrix} [p] \quad (34)$$

Ressalta-se que $\xi \Lambda$ é diagonal. Calculada F^{-1} , deve multiplica-la pelo produto da matriz diagonal composta pelos valores de $u^*(\xi; X)$ pelo vetor das cargas de domínio $p(X)$. O tempo de processamento é inferior ao da MECDR. Em ambas as formulações, F^{-1} deve ser calculada uma vez. Na MECIC se requer apenas o produto de $\xi \Lambda$ contra F^{-1} , para cada ponto fonte, enquanto na MECDR exige-se a construção de duas matrizes de interpolação e produtos delas por H e G , que são matrizes cheias.

$$[H]\{u\} - [G]\{q\} = [F]^{-1} \begin{bmatrix} \xi \Lambda \end{bmatrix} [p] \quad (35)$$

Em cada nó funcional é conhecido o valor do potencial ou de sua derivada normal (condições dadas de contorno). O sistema pode ser rearranjado, de modo que a solução do problema seja equivalente a solução de um sistema linear de forma:

$$Ax = b \quad (36)$$

Vale lembrar que as matrizes A , H e G são cheias e não simétricas, o que pode dificultar a solução, mas também possui um tamanho menor que outros métodos, pois o problema tem a dimensão reduzida quando levado ao contorno.

3.7 Interpolações com Funções de Base Radial

Uma função de base radial é uma função sobre números reais cujos valores dependem apenas da distância euclidiana a partir da origem ou ponto fonte e algum outro ponto do domínio, chamado de ponto campo. Assim a distância entre os dois pontos citados é expressa pela distância radial:

$$r = \sqrt{(x_\xi - x_j)^2 + (y_\xi - y_j)^2} \quad (37)$$

Existem diversos tipos de funções radiais, empregadas nas mais diversas áreas da física e engenharia:

$$F(r) = r \text{ (radial simples)} \quad (38a)$$

$$F(r) = r^3 \text{ (radial cúbica)} \quad (38b)$$

$$F(r) = r^2 \ln(r) \text{ (radial de placas finas)} \quad (38c)$$

$$F(r) = (r^2 + c^2)^{1/2} \text{ (radial multiquádrica)} \quad (38d)$$

$$F(r) = e^{-\alpha r^2} \text{ (radial gaussiana)} \quad (38e)$$

A simetria radial é das mais importantes propriedades dessa classe de funções; o valor da aproximação depende tão somente da distância do argumento ao ponto base e quaisquer rotações não fazem influenciar seu resultado. Além disso, a norma euclidiana também se caracteriza por estabelecer valores sempre positivos para seus valores. Contudo, outros fatores podem se tornar igualmente importantes: muitas vezes características de decaimento e suavidade podem ser fundamentais e, nesse sentido, certas funções se tornam melhores do que outras.

O uso das funções de base radial se justifica através do grande crescimento da aplicação dessas funções em problemas de interpolação, ajuste ou aproximação em geral. Atualmente tais funções estão bastante populares por se apresentar em associação com técnicas relacionadas ao Método dos Elementos Finitos, conhecidos como “técnicas sem malha (meshless)”. O uso desta categoria de funções surgiu em vista da complexidade na geração de malhas tridimensionais para a discretização de domínio pelas técnicas tradicionais e pela possibilidade de se usarem suportes compactos, reduzindo assim a dimensão das matrizes.

Antecipando por alguns anos a popularização do uso de abordagens sem malha [3], a formulação do MEC com Dupla Reciprocidade já empregava funções de base radial para interpolar a variável que compõe o núcleo das integrais de domínio [4]. No entanto, esta formulação foi desenvolvida usando apenas funções radiais com suporte completo, que fornecem uma precisão satisfatória para aplicação aos conjuntos de dados de tamanho moderado, mas podem se tornar imprecisas para conjuntos de dados maiores [5], sobretudo com muitos pontos internos interpolantes no interior em relação à quantidade de pontos no contorno.

4. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Os experimentos numéricos realizados buscam comprovar a eficiência do MECIC através da qualidade da aproximação dos seus resultados com a solução analítica conhecida de problemas determinados. Os testes foram realizados com programas de Elementos de Contorno construídos em linguagem Fortran e compilados pelo programa Microsoft Fortran PowerStation.

4.1 Aspectos Gerais

Para os testes do método foram utilizados diferentes problemas físicos bidimensionais regidos pela equação de Poisson. As geometrias dos problemas foram simplificadas e tomadas com dimensões unitárias para que se pudessem obter soluções analíticas para a comparação. As constantes das equações também foram tomadas unitárias para simplificação, utilizando o Sistema Internacional de Unidades (SI), o que não trará problemas, uma vez que os testes visam a avaliação qualitativa dos resultados.

Apenas dois tipos de funções radiais foram testados: a radial simples e a radial de placa fina, por fornecerem os melhores resultados. Outras funções foram testadas, como a função radial cúbica, mas seus resultados não foram aceitáveis na maior parte dos exemplos resolvidos.

4.2 Parâmetros de Teste

4.2.1 Malhas

As malhas utilizadas foram de 36, 84, 124 e 164 nós funcionais distribuídos uniformemente ao longo do contorno da geometria do problema. Como o uso dos nós duplos nos vértices da geometria do problema utiliza 8 desses nós no mesmo ponto, as malhas possuem 32, 80, 120, e 160 elementos lineares. Também foram variadas as quantidades dos pontos de informação utilizados para discretizar o termo da carga de domínio. Foram utilizados 0, 4, 9, 16, 25, 49, 64, 81, 144, 225, e para alguns problemas 324 e 484 pontos de informação internos. Tais pontos foram localizados com distâncias iguais dentro do domínio da geometria em cada configuração.

A variação das malhas procura aferir a eficiência do método com o refinamento das malhas, os efeitos que resultam do aumento da densidade de pontos de informação e o quanto o método é dependente das informações internas da carga de domínio.

4.2.2 Critérios de Erro

Para se quantificar os erros, os valores obtidos numericamente no contorno do problema foram comparados com os obtidos analiticamente em cada nó. Comparam-se valores do potencial onde a derivada normal foi prescrita (condições de contorno de naturais), e das derivadas normais onde os potenciais foram prescritos (condições de contorno de essenciais).

Para a determinação da qualidade da aproximação dos problemas simulados, a solução obtida nos nós funcionais pelo método numérico foi comparada com a solução analítica dos mesmos pontos, na forma:

$$\text{erro} = \frac{\|u_{\text{numerico}} - u_{\text{analitico}}\|}{u_{\text{max.analitico}}} * 100 \quad (39)$$

Onde u_{numerico} é o valor da variável de interesse encontrado através do método numérico para um determinado ponto, $u_{\text{analitico}}$ o seu correspondente analítico e $u_{\text{max.analitico}}$ o máximo valor analítico calculado da variável em todo domínio do problema. O erro médio global foi então a média aritmética do erro dos pontos onde a variável de interesse não foi prescrita expressa em percentagem.

4.3 Exemplos

4.3.1 Barra Tracionada Densidade Constante

4.3.1.1 Definição

O primeiro problema consiste de uma barra engastada em sua parte superior e livre nas outras faces, sujeita a tensões e deslocamentos provocados pelo seu peso. Neste exemplo a densidade da barra é considerada constante em todo o corpo. Como na Figura a seguir:

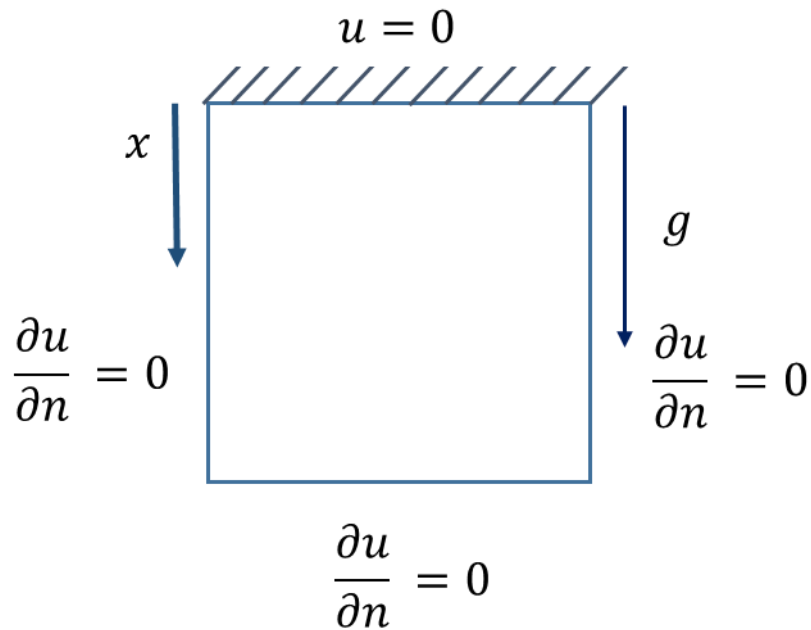


Figura 8– Barra engastada com densidade constante.

A condição de contorno essencial no engaste é nula e as condições naturais também são iguais à zero nas faces livres. A densidade é constante ao longo de toda barra.

4.3.1.2 Modelo Matemático e Solução Analítica

A equação que rege o problema é a de Poisson:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\rho g}{E} \quad (40)$$

Que com os valores admitidos e devidas condições de contorno aplicadas gera a solução:

$$u = x \left(1 - \frac{x}{2} \right) \quad (41)$$

Onde o valor do deslocamento é zero na base do corpo e aumenta de forma quadrática conforme se aproxima da extremidade.

4.3.1.3 Procedimento

Os elementos são dispostos com tamanhos iguais por todo o contorno e utilizados nós duplos nos vértices para solucionar os problemas impostos pelas

diferentes condições nos lados opostos de cada canto. Foi computado o erro nos nós de secções reduzidas do corpo devido à simetria dos resultados.

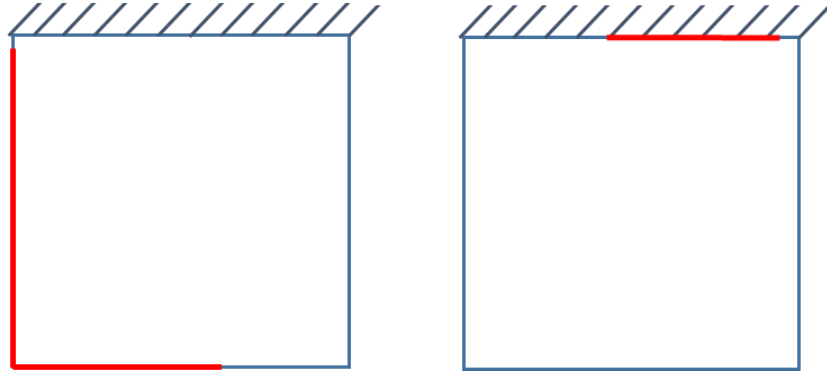


Figura 9– Secções escolhidas para a computação dos erros

4.3.1.4 Resultados

Foi utilizado o erro médio da amostra selecionada para representar a exatidão da malha para cada formulação. Estes erros são sintetizados a seguir na forma de tabelas e gráficos. Nestes últimos foram omitidos os valores para poucos pontos internos, pois distorciam a resolução do gráfico para muitos pontos de informação.

Tabela 1 - Erro médio global (%) para a variável potencial com uso da função de base radial simples no problema da barra tracionada com densidade constante.

Quantidade de Pontos de Contorno	Carga Constante, Função Radial Simples, Potencial.									
	Quantidade de Pontos Internos									
	0	4	9	16	25	49	64	81	144	225
36	8,336	3,043	1,879	1,355	1,068	0,785	0,769	0,629	0,495	0,428
84	7,030	2,295	1,146	0,708	0,500	0,315	0,269	0,235	0,175	0,142
124	7,156	2,279	1,060	0,633	0,429	0,244	0,199	0,167	0,116	0,092
164	7,244	2,278	1,035	0,607	0,402	0,220	0,175	0,144	0,092	0,069

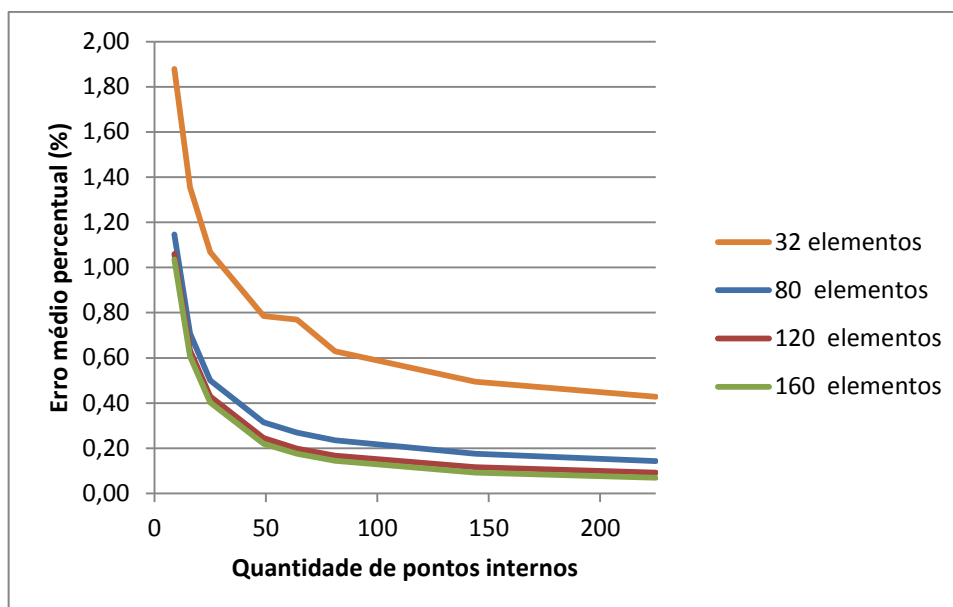


Figura 10 – Erro médio global para a variável potencial com uso da função de base radial simples no problema da barra tracionada com densidade constante. Referente à tabela 1.

Os erros para poucos pontos de informação do domínio são altos para essa formulação. Com a adição de uma pequena quantidade de pontos internos, já há uma notável melhoria. De modo geral, os resultados melhoram à medida que se aumenta o número de elementos de contorno e os pontos internos.

Tabela 2 - Erro médio global (%) para a derivada normal com uso da função de base radial simples no problema da barra tracionada com densidade constante.

Quantidade de Pontos de Contorno	Carga Constante, Função Radial Simples, Derivada Normal.									
	Quantidade de Pontos Internos									
	0	4	9	16	25	49	64	81	144	225
36	17,56	4,994	2,594	2,342	1,322	0,829	0,910	0,736	0,548	0,519
84	11,08	6,663	3,205	1,825	1,042	0,632	0,602	0,594	0,430	0,240
124	12,37	7,180	3,701	2,307	1,501	0,686	0,462	0,340	0,352	0,509
164	15,95	7,348	3,938	2,501	1,694	0,887	0,649	0,481	0,201	0,234

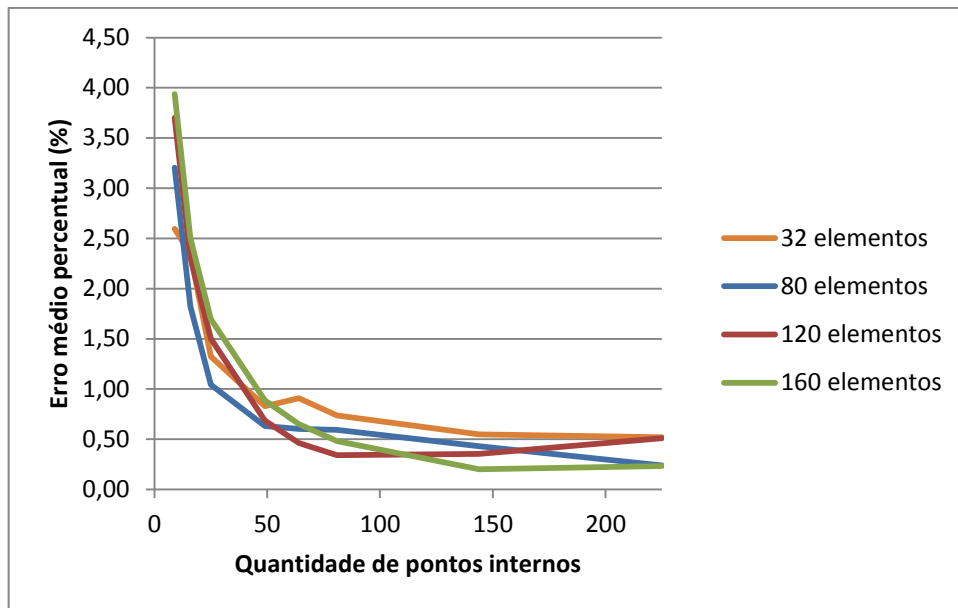


Figura 11 - Erro médio global para a derivada normal com uso da função de base radial simples no problema da barra tracionada com densidade constante. Referente à tabela 2.

Os resultados para as derivadas normais apresentaram comportamento semelhante aos do cálculo do potencial, com a redução dos erros com o refinamento das malhas. O erro médio, entretanto teve um modulo maior para todas as configurações. Para poucos pontos de informação os erros com malhas de contorno mais refinadas foi maior, mostrando a maior sensibilidade do cálculo numérico das derivadas do potencial com relação ao potencial.

Tabela 3 - Erro médio global (%) para a variável potencial com uso da função de base radial placa fina no problema da barra tracionada com densidade constante.

Quantidade de Pontos de Contorno	Carga Constante, Função Radial Placa Fina, Potencial.									
	Quantidade de Pontos Internos									
	0	4	9	16	25	49	64	81	144	225
36	19,26	1,448	0,651	0,598	0,573	0,522	0,577	0,468	0,410	0,381
84	21,52	1,636	0,651	0,348	0,222	0,150	0,129	0,115	0,104	0,096
124	22,61	1,817	0,715	0,384	0,239	0,120	0,097	0,085	0,062	0,054
164	23,62	1,940	0,781	0,416	0,254	0,121	0,091	0,074	0,050	0,039

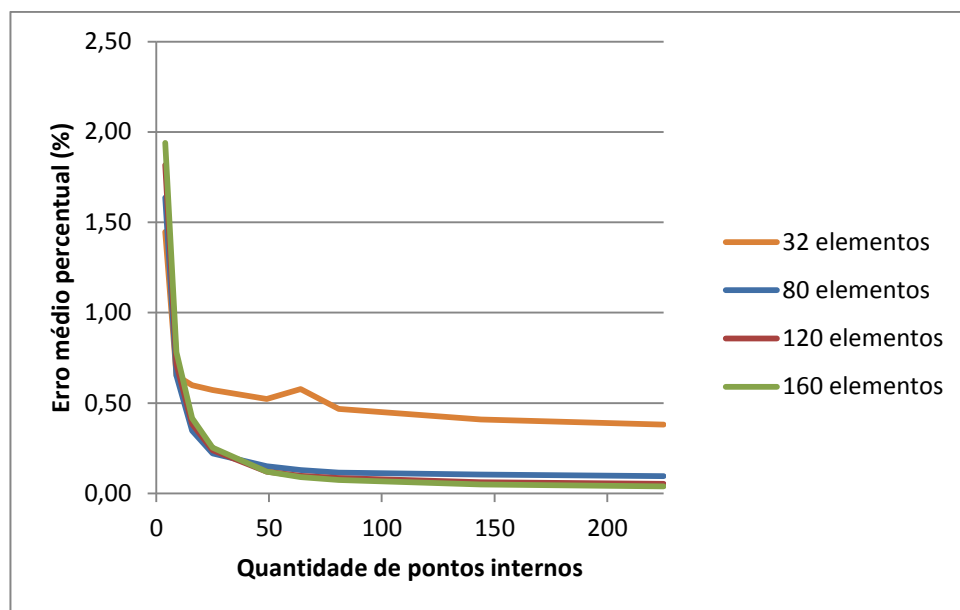


Figura 12 - Erro médio global para a variável potencial com uso da função de base radial placa fina no problema da barra tracionada com densidade constante. Referente à tabela 3.

A função radial placa fina proporcionou resultados mais exatos que os da radial simples para uma quantidade maior de pontos de informação. Foi notável também uma grande melhora dos resultados já com a introdução de uma pequena quantidade de pontos internos. No geral, observou-se uma convergência ainda superior ao ocorrido na função radial simples.

Tabela 4 - Erro médio global (%) para a derivada normal com uso da função de base radial placa fina no problema da barra tracionada com densidade constante.

Quantidade de Pontos de Contorno	Carga Constante, Função Radial Placa Fina, Derivada Normal.									
	Quantidade de Pontos Internos									
	0	4	9	16	25	49	64	81	144	225
36	33,55	4,146	1,489	1,776	1,198	0,668	0,774	0,610	0,434	0,473
84	76,63	9,210	4,294	2,410	1,375	0,586	0,288	0,381	0,443	0,225
124	102,7	11,13	5,603	3,330	2,265	1,193	0,918	0,645	0,138	0,529
164	123,6	10,24	6,354	3,948	2,707	1,504	1,218	0,951	0,489	0,141

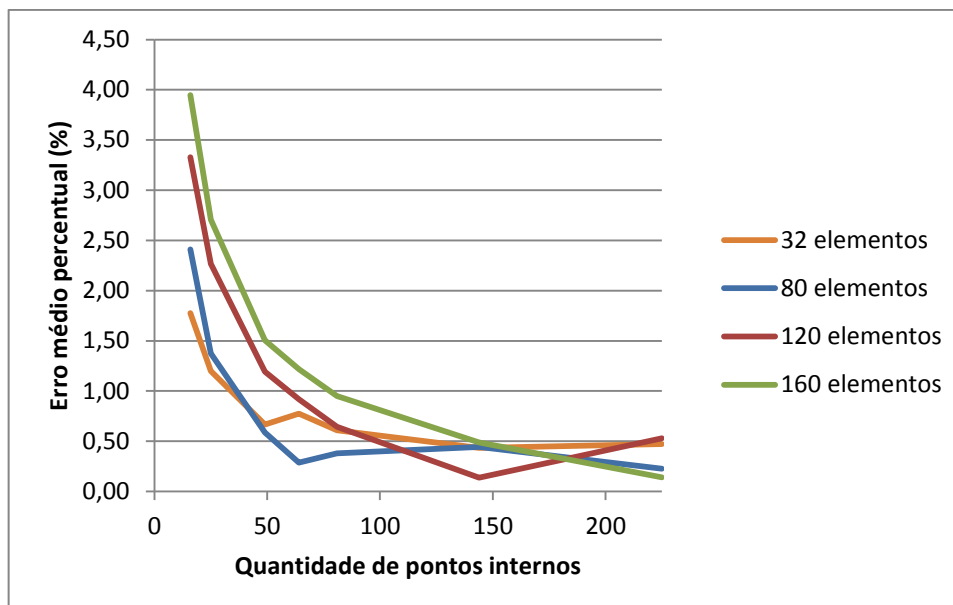


Figura 13 - Erro médio global para a derivada normal com uso da função de base radial placa fina no problema da barra tracionada com densidade constante. Referente à tabela 4.

Seguindo a tendência dos resultados anteriores, a solução para a derivada normal resultou em erros maiores que a mesma função para o cálculo do potencial. Com o aumento do número de pontos de informação houve uma rápida melhoria nos resultados.

Embora seja mais precisa no cômputo global dos resultados, percebe-se que a função radial de placa fina apresenta grande sensibilidade para malhas com pouca quantidade de pontos de contorno, chegando ao ponto de sugerir uma divergência nos resultados para muitos pontos internos no caso da derivada do potencial. Ao que tudo indica, são também mais sensíveis ao reposicionamento destes pontos internos com a adição de maior número deles no interior.

Como uma tendência geral para as configurações selecionadas, os erros para as derivadas normais foram superiores aos do potencial. Também para pouco ou nenhum ponto de informação o erro foi grande, caindo rapidamente à medida que estes são adicionados. Na maioria dos casos, o erro com malhas mais refinadas foi maior, diminuindo com o aumento dos pontos de informação, e acabando com módulos inferiores às simulações com malhas menos refinadas.

Para o cálculo dos potenciais, as funções apresentaram convergência para o resultado exato com o aumento de pontos de informação. Os resultados das derivadas normais, em geral, apresentaram erros maiores que os potenciais e demora na convergência. Estes também apresentaram oscilações na convergência.

As soluções apresentaram resultados satisfatórios em todas as condições, com resultados com boas aproximações mesmo para poucos pontos de informação, e erros bem abaixo da ordem de 0,5% para uma quantidade adequada de pontos internos.

4.3.2 Barra Tracionada com Densidade Variando Linearmente

4.3.2.1 Definição

Uma barra engastada em sua parte superior e livre nas outras faces sujeita a carregamentos provocados pelo seu peso, agora com a densidade da barra variando de forma linear. O modelo geométrico é idêntico ao do exemplo anterior. Fisicamente, agora a densidade da barra varia linearmente, tendo o valor de zero na extremidade livre e valor unitário em sua extremidade fixa.

4.3.2.2 Equação Analítica

A equação que rege o problema é da forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\rho(1-x)}{E} \quad (42)$$

Com as constantes com valor “1” e as condições de contorno aplicadas obtemos a solução:

$$u(x) = -\frac{1}{6}x(x^2 - 3x + 3) \quad (43)$$

4.3.2.3 Procedimento

Os procedimentos são realizados de forma similar ao problema da secção anterior 4.3.1.3.

4.3.2.4 Resultados

Os resultados obtidos para os diferentes parâmetros de testes estão condensados nas formas de tabelas e gráficos.

Tabela 5 - Erro médio global (%) para a variável potencial com uso da função de base radial simples no problema da barra tracionada com densidade variando linearmente.

Quantidade de Pontos de Contorno	Carga Linear, MECIC, Função Radial Simples, Potencial.									
	Quantidade de Pontos Internos									
	0	4	9	16	25	49	64	81	144	225
36	6,642	1,843	0,929	0,824	0,775	0,678	0,711	0,592	0,502	0,447
84	8,851	2,446	1,053	0,511	0,279	0,184	0,181	0,175	0,155	0,136
124	9,270	2,605	1,172	0,598	0,324	0,131	0,103	0,094	0,088	0,080
164	9,455	2,685	1,232	0,644	0,362	0,140	0,098	0,075	0,057	0,054

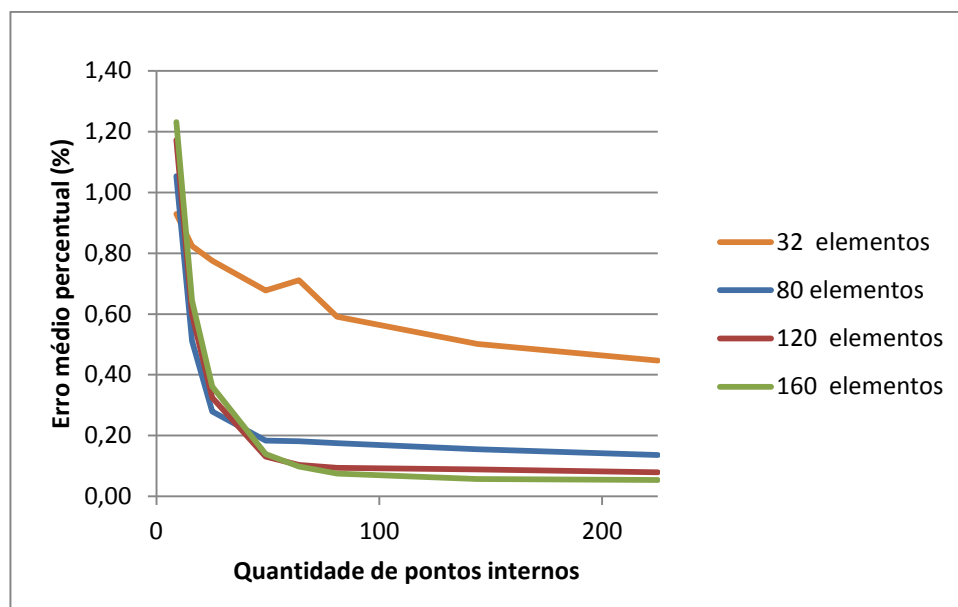


Figura 14 - Erro médio global para a variável potencial com uso da função de base radial simples no problema da barra tracionada com densidade variando linearmente. Referente à tabela 5.

As malhas mais refinadas apresentaram um maior erro quando houve pouca informação de domínio. À medida que essa informação foi adicionada essas malhas apresentaram maior eficiência na solução do problema. Para malhas mais refinadas esse erro alcançou valores da ordem de 0,05%.

Ressalta-se que a malha de 32 elementos teve uma espécie de quebra da sua monotonicidade em 64 pontos de informação, mas isto se deve ao reposicionamento dos pontos internos. As funções radiais são muito sensíveis a localização interna dos seus polos. Isto ratifica que em se tratando de funções radiais, os estudos de convergência devem levar em conta a tendência geral da curva de erro.

Tabela 6 - Erro médio global (%) para a derivada normal com uso da função de base radial simples no problema da barra tracionada com densidade variando linearmente.

Quantidade de Pontos de Contorno	Carga Linear, MECIC, Função Radial Simples, Derivada Normal.									
	Quantidade de Pontos Internos									
	0	4	9	16	25	49	64	81	144	225
36	9,431	3,595	1,955	1,506	1,129	0,838	0,821	0,688	0,563	0,492
84	7,212	2,506	1,156	0,816	0,555	0,362	0,303	0,271	0,196	0,159
124	6,654	2,186	0,992	0,679	0,437	0,267	0,229	0,191	0,134	0,106
164	6,396	2,029	0,920	0,609	0,385	0,225	0,192	0,155	0,107	0,081

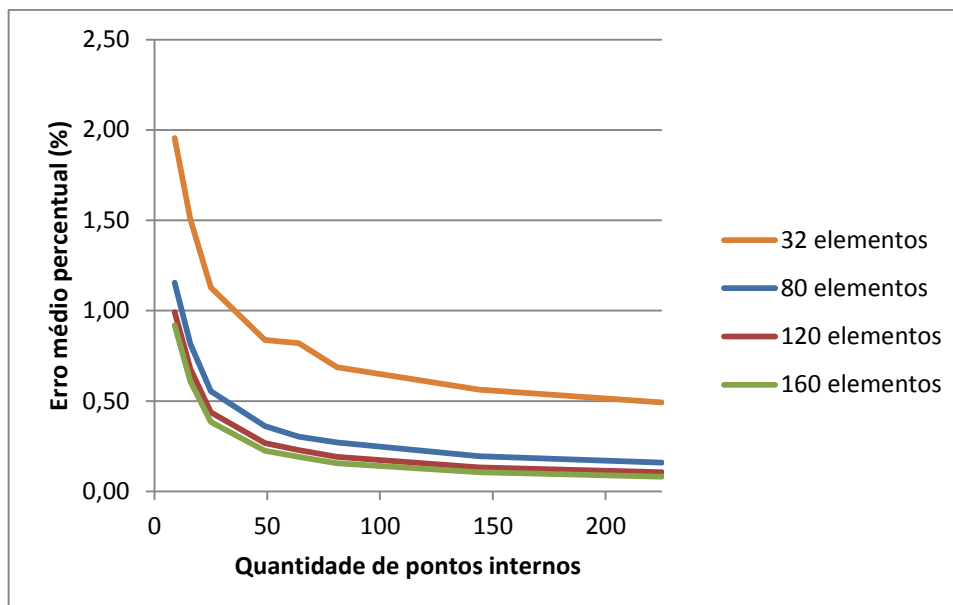


Figura 15 - Erro médio global para a derivada normal com uso da função de base radial simples no problema da barra tracionada com densidade variando linearmente. Referente à tabela 6.

Para a derivada normal as malhas mais refinadas apresentaram menores valores de erros do que as malhas mais grosseiras, para malhas com menor quantidade de pontos de informação internos, se comparadas ao problema anterior. Isto está ligado à taxa de convergência do método na representação da ação de domínio linear com menor erro, que é maior do que para a carga constante. Em se tratando de funções radiais, certas superfícies como as governadas por funções constantes, apresentam maior dificuldade de representação do que funções aparentemente mais complexas como a linear e parabólica.

De modo geral, todas as malhas convergiram monotonicamente para o resultado exato.

Tabela 7 - Erro médio global (%) para a variável potencial com uso da função de base radial placa fina no problema da barra tracionada com densidade variando linearmente.

Quantidade de Pontos de Contorno	Carga Linear, MECIC, Função Radial Placa Fina, Potencial.									
	Quantidade de Pontos Internos									
	0	4	9	16	25	49	64	81	144	225
36	24,28	1,648	0,690	0,722	0,665	0,573	0,628	0,508	0,072	0,063
84	24,25	1,968	0,705	0,336	0,205	0,158	0,151	0,144	0,072	0,063
124	23,55	2,034	0,755	0,380	0,224	0,102	0,085	0,082	0,072	0,063
164	22,01	2,055	0,789	0,403	0,234	0,104	0,075	0,062	0,048	0,043

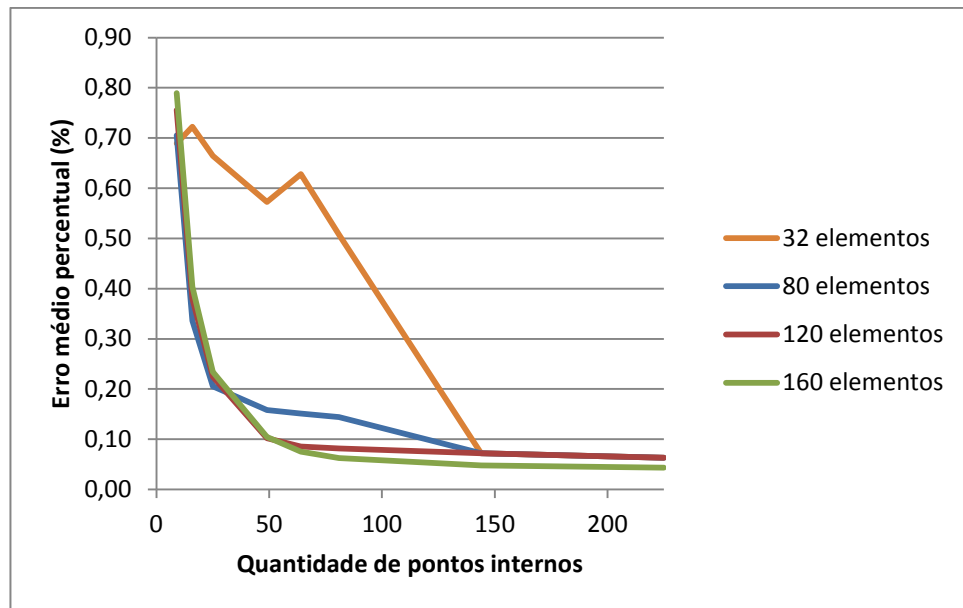


Figura 16 - Erro médio global (%) para a variável potencial com uso da função de base radial placa fina no problema da barra tracionada com densidade variando linearmente. Referente à tabela 7.

Como vem acontecendo com a função radial placa fina, os resultados com nenhum ponto de informação apresentaram maiores erros, seguidos de uma rápida convergência com o aumento do número de pontos de informação. A função já apresentava valores menores de 1% para apenas 9 pontos de informação. Outro fator que se destaca é que as malhas mais refinadas tiveram erros menores do que as malhas mais grosseiras para nenhum ponto de informação, mas apresentaram erros maiores do que estas com 4 e 9 pontos de informação. À medida que se continuou aumentando a quantidade de pontos de informação, o erro diminuiu sucessivamente.

A malha menos refinada no contorno teve sua curva de convergência “acidentada” próximo a 64 pontos internos. Isto está ligado ao comportamento mais sensível da função de placa fina, tanto com malhas mais pobres no contorno, quanto com o reposicionamento dos pontos internos.

Tabela 8 - Erro médio global (%) para a derivada normal com uso da função de base radial placa fina no problema da barra tracionada com densidade variando linearmente.

Quantidade de Pontos de Contorno	Carga Linear, MECIC, Função Radial Placa Fina, Derivada Normal.									
	Quantidade de Pontos Internos									
	0	4	9	16	25	49	64	81	144	225
36	8,344	1,446	0,911	0,652	0,664	0,572	0,628	0,525	0,475	0,445
84	6,120	1,363	0,501	0,319	0,230	0,169	0,143	0,144	0,121	0,109
124	6,161	1,361	0,516	0,292	0,187	0,116	0,101	0,090	0,068	0,062
164	6,258	1,371	0,525	0,292	0,185	0,102	0,090	0,071	0,052	0,042

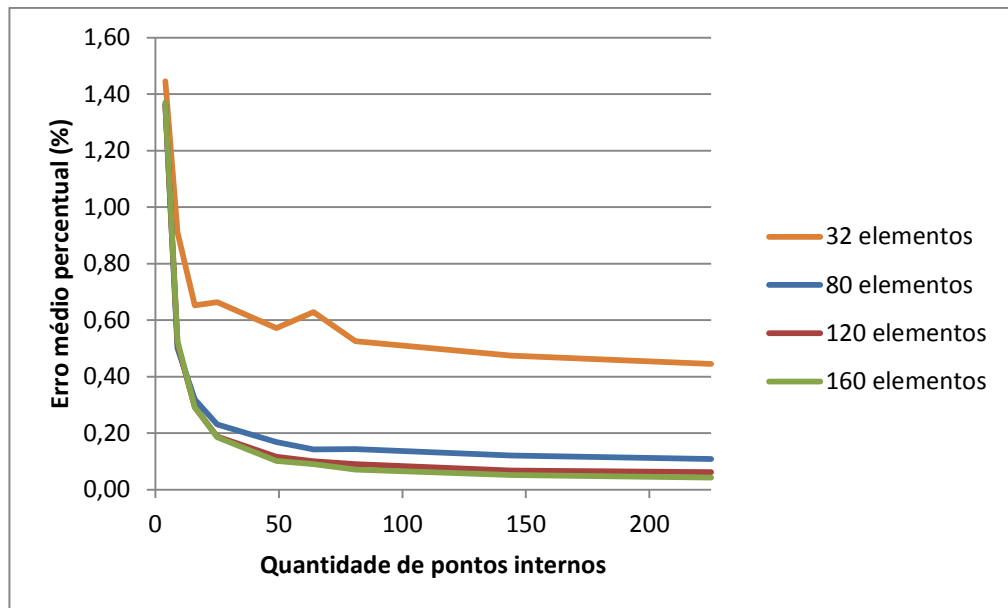


Figura 17 - Erro médio global para a derivada normal com uso da função de base radial placa fina no problema da barra tracionada com densidade variando linearmente. Referente à tabela 8.

Usando a função radial de placa fina a MECIC inicialmente obteve menores erros para a derivada normal em relação ao cálculo do potencial e também apresentou uma convergência rápida, alcançando erros da ordem de 0,5% para apenas 9 pontos de informação. Neste caso, as malhas de contorno mais refinadas alcançaram erros tão baixos quanto para as variáveis potenciais.

No aspecto geral, a função radial placa fina, apesar de ser inferior a função radial simples para poucos, ou nenhum ponto de informação, apresentou uma rápida convergência e alcançou resultados mais exatos, tanto para o cálculo do potencial quanto da derivada normal.

Deve-se ressaltar que tanto para esta aplicação quanto para o problema anterior, o núcleo da integral a ser interpolada é similar ao tipo da função radial de placa fina, o que justifica o melhor desempenho desta função nestes problemas.

O método atingiu resultados bem próximos à solução exata do problema. E com a adição de pontos de informação a solução converge rapidamente para a solução exata para todas as configurações testadas. Isto aponta que o método apresenta uma alta confiabilidade para a solução destes tipos de problemas.

Para uma maior quantidade de pontos de informação as malhas mais refinadas apresentaram menores erros e convergiram monotonicamente. Indicando que após uma quantidade adequada de pontos de informação e de nós funcionais o método converge com o aumento de informação do domínio e refinamento da malha de contorno.

4.3.3 Barra Tractionada com Densidade Variando Senoidalmente

4.3.3.1 Definição

A conformação geométrica deste problema é idêntica a dos problemas anteriores. Fisicamente se distingue dos anteriores porque agora a densidade da barra varia de forma senoidal, com o valor de zero na extremidade livre.

4.3.3.2 Solução Analítica

A equação representa o problema:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{E} \operatorname{sen} \left[\frac{\pi(L-x)}{2L} \right] \quad (44)$$

Com as constantes com valor “1” e as condições de contorno aplicadas obtemos a solução:

$$u = \frac{-2\pi x - 4 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 4}{\pi^2} \quad (45)$$

4.3.3.3 Procedimento

Os procedimentos são realizados de forma similar ao problema da secção anterior 4.3.1.3.

4.3.3.4 Resultados

Os resultados obtidos para as diferentes configurações de testes estão condensados nas formas de tabelas e gráficos.

Tabela 9 - Erro médio global (%) para a variável potencial com uso da função de base radial simples no problema da barra tracionada com densidade variando senoidalmente.

Quantidade de Pontos de Contorno	Carga Senoidal, MECIC, Função Radial Simples, Potencial.									
	Quantidade de Pontos Internos									
	0	4	9	16	25	49	64	81	144	225
36	5,909	1,809	1,056	0,941	0,840	0,700	0,724	0,598	0,501	0,443
84	7,723	2,172	0,941	0,459	0,273	0,212	0,200	0,188	0,160	0,138
124	8,097	2,304	1,037	0,525	0,287	0,133	0,115	0,108	0,095	0,082
164	8,244	2,365	1,086	0,565	0,315	0,130	0,097	0,079	0,064	0,057

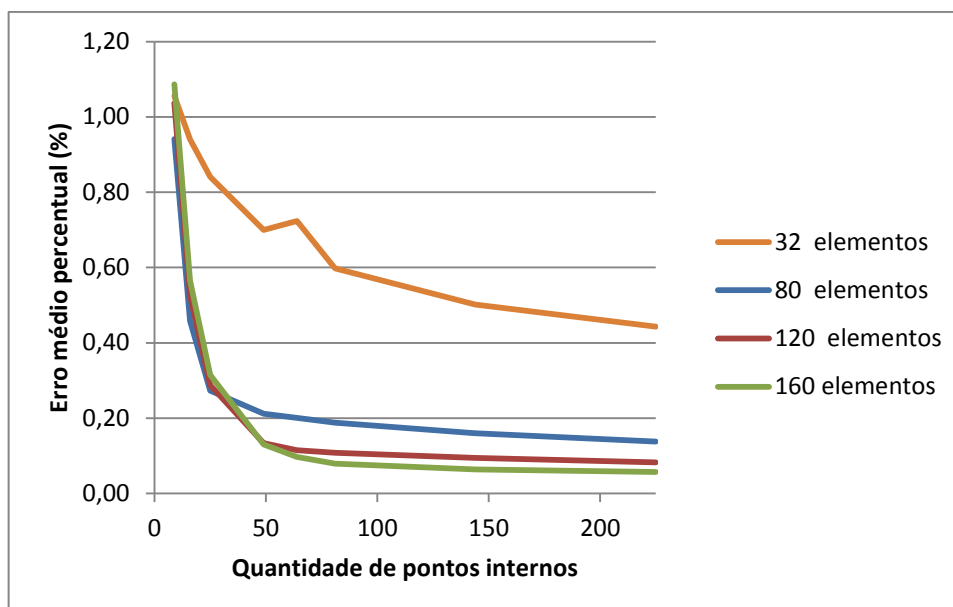


Figura 18 - Erro médio global para a variável potencial com uso da função de base radial simples no problema da barra tracionada com densidade variando senoidalmente. Referente à tabela 9.

O esquema numérico apresentou um comportamento comum aos outros testes anteriores. Comparativamente, os valores do erro foram relativamente mais baixos para nenhum ponto de informação e convergiram rapidamente, especialmente para as malhas de contorno mais refinadas, com relação aos valores para densidade constante e linear. A precisão final foi bastante boa, excetuando-se a malha com menor refinamento, que também não apresentou uma convergência monótona, devido à maior sensibilidade no remanejamento da posição dos pontos internos interpolantes.

Tabela 10 - Erro médio global (%) para a derivada normal com uso da função de base radial simples no problema da barra tracionada com densidade variando senoidalmente.

Quantidade de Pontos de Contorno	Carga Senoidal, MECIC, Função Radial Simples, Derivada Normal.									
	Quantidade de Pontos Internos									
	0	4	9	16	25	49	64	81	144	225
36	11,52	4,164	2,182	1,620	1,182	0,850	0,823	0,687	0,558	0,484
84	9,129	3,081	1,402	0,948	0,628	0,391	0,322	0,284	0,200	0,160
124	8,448	2,744	1,240	0,814	0,513	0,299	0,251	0,207	0,140	0,109
164	8,129	2,567	1,166	0,744	0,462	0,257	0,216	0,172	0,114	0,085

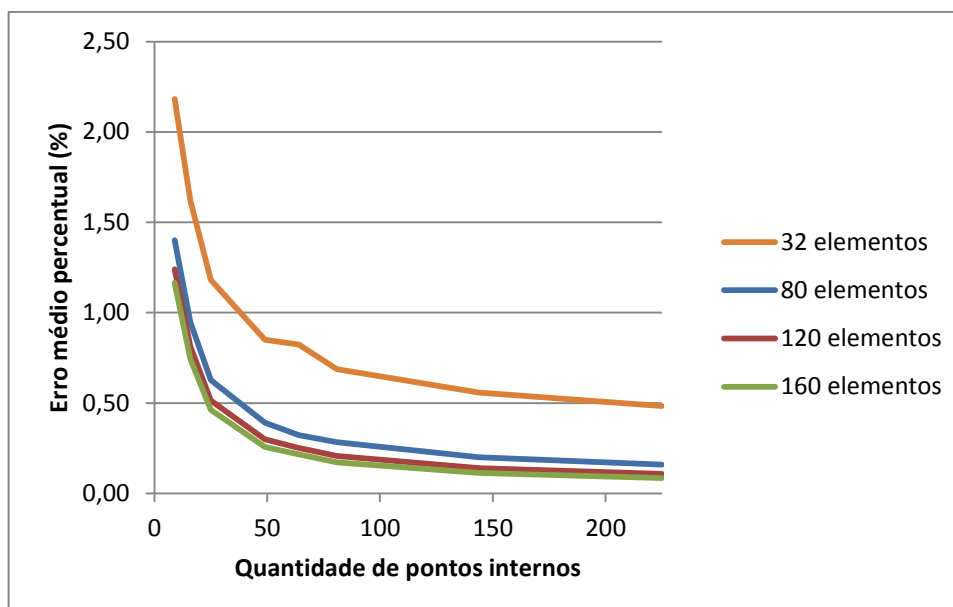


Figura 19 - Erro médio global para a derivada normal com uso da função de base radial simples no problema da barra tracionada com densidade variando senoidalmente. Referente à tabela 10.

Os resultados também foram bons para as derivadas normais do potencial. Embora com menor precisão, os erros para as derivadas foram muito próximos aos potenciais, conforme pode ser conferido pelos valores expostos na tabela. Também se destaca que as malhas mais refinadas já apresentaram resultados mais exatos na ausência de pontos internos e se mantiveram com os melhores resultados para todas as densidades de pontos de informação.

Tabela 11 - Erro médio global (%) para a variável potencial com uso da função de base radial placa fina no problema da barra tracionada com densidade variando senoidalmente.

Quantidade de Pontos de Contorno	Carga Senoidal, MECIC, Função Radial Placa Fina, Potencial.									
	Quantidade de Pontos Internos									
	0	4	9	16	25	49	64	81	144	225
36	23,30	1,539	0,671	0,705	0,651	0,562	0,618	0,498	0,440	0,406
84	23,37	1,863	0,679	0,324	0,199	0,153	0,147	0,140	0,123	0,108
124	22,68	1,930	0,726	0,368	0,218	0,099	0,083	0,079	0,070	0,062
164	21,73	1,952	0,760	0,392	0,227	0,102	0,073	0,060	0,047	0,042

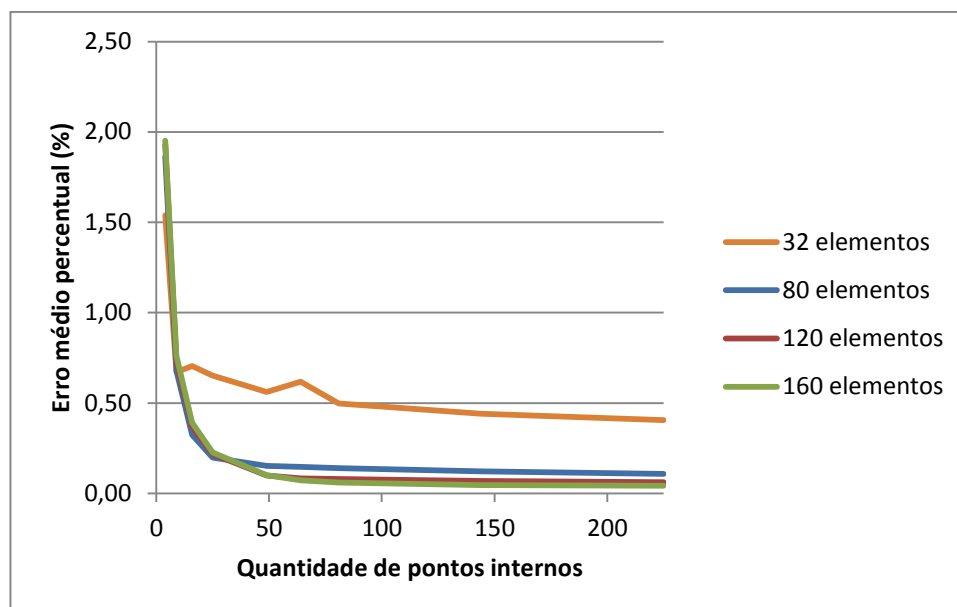


Figura 20 - Erro médio global para a variável potencial com uso da função de base radial placa fina no problema da barra tracionada com densidade variando senoidalmente. Referente à tabela 11.

Como vem ocorrendo para a função radial placa fina, há grandes valores de erro para nenhum ponto de informação e uma rápida convergência para o resultado exato com o aumento do número de pontos de informação.

Esta função alcança valores mais exatos que a função radial simples tanto para o cálculo do potencial quando da derivada normal.

Tabela 12 - Erro médio global (%) para a derivada normal com uso da função de base radial placa fina no problema da barra tracionada com densidade variando senoidalmente.

Quantidade de Pontos de Contorno	Carga Senoidal, MECIC, Função Radial Placa Fina, Derivada Normal.									
	Quantidade de Pontos Internos									
	0	4	9	16	25	49	64	81	144	225
36	7,233	1,539	0,940	0,634	0,648	0,556	0,612	0,511	0,464	0,436
84	6,162	1,446	0,538	0,340	0,241	0,174	0,138	0,140	0,117	0,105
124	6,263	1,434	0,554	0,315	0,202	0,122	0,103	0,093	0,066	0,060
164	6,388	1,443	0,564	0,316	0,200	0,109	0,096	0,075	0,053	0,043

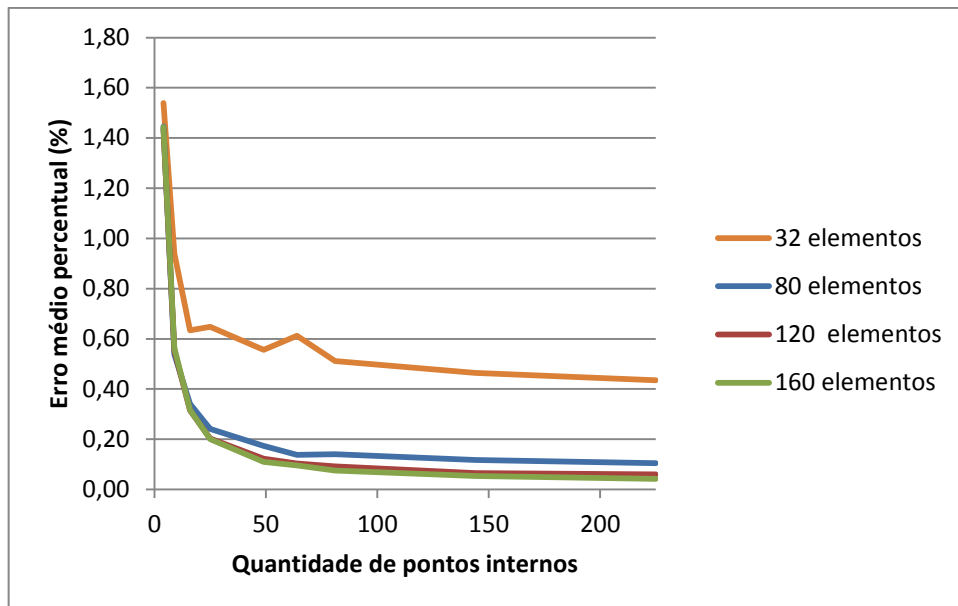


Figura 21 - Erro médio global para a derivada normal com uso da função de base radial placa fina no problema da barra tracionada com densidade variando senoidalmente. Referente à tabela 12.

A função se mostra bem comportada e com alta taxa de convergência para os valores exatos também no cálculo dos valores numéricos da derivada normal. Os erros se aproximam dos encontrados para o potencial.

Em síntese, também neste caso a função radial placa fina se mostrou superior para cálculo do potencial e da derivada normal. Com uma convergência mais rápida e alcançando resultados melhores que a função radial simples.

Para nenhum ponto de informação o erro foi grande em todas as simulações, caindo rapidamente à medida que estes são adicionados, mostrando a forte dependência do método à informação do domínio.

Em termos do método, para ambas as funções radiais a MECIC atingiu resultados próximos à solução exata do problema, resultando em boas aproximações mesmo para poucos pontos de informação, e erros da ordem de 0,05% para algumas configurações.

4.3.4 Membrana Tracionada

4.3.4.1 Definição

Uma membrana quadrada de lados unitários é engastada em suas laterais, permanecendo livre em suas outras duas extremidades, de acordo com a figura a seguir:

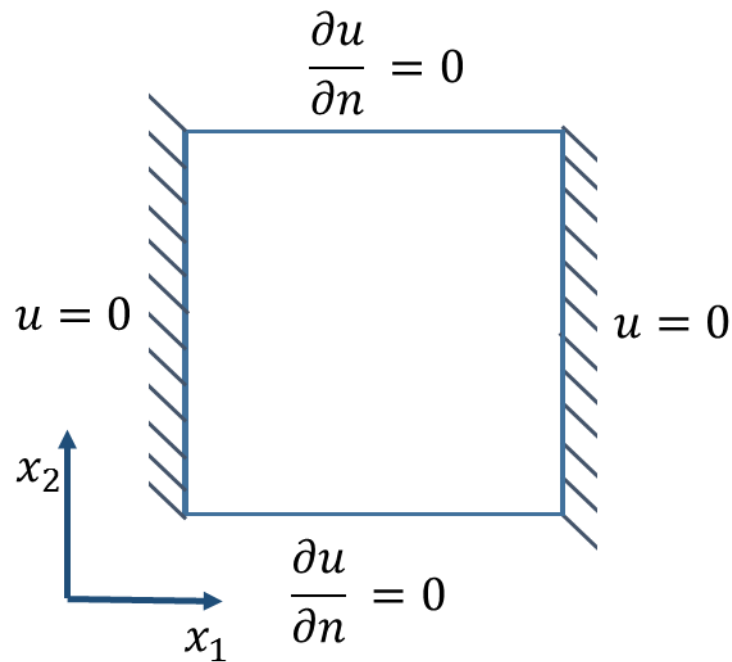


Figura 22– Membrana bi-engastada e carregada

As condições de contorno essenciais nos engastes são iguais à zero e as naturais também iguais à zero nas faces livres.

O carregamento imposto à membrana varia com as dimensões y e x na forma:

$$p(x_1, x_2) = \frac{x_1}{L} \cos\left(\frac{\pi x_2}{L}\right) \quad (46)$$

A figura 23 ilustra a distribuição da carga de domínio ao longo da membrana.

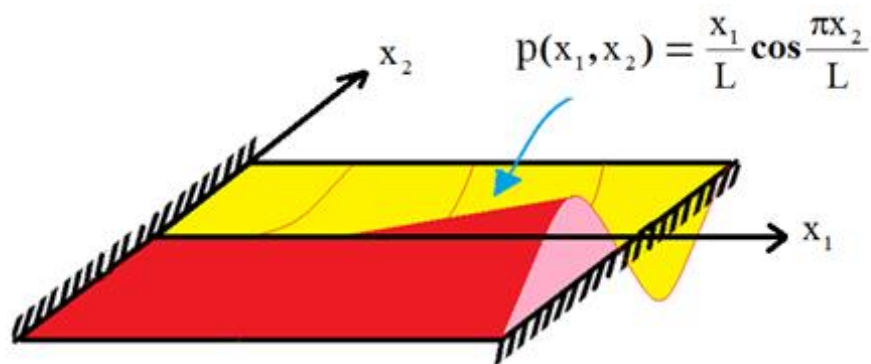


Figura 23– Distribuição de carga na membrana bi-engastada

4.3.4.2 Solução Analítica

A equação de governo é:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{x_1}{L} \cos\left(\frac{\pi x_2}{L}\right) \quad (47)$$

Onde x e y são as direções cartesianas adotadas e L é a medida do comprimento e da largura da membrana.

A solução analítica para a equação de governo é:

$$u(x_1, x_2) = \left[\frac{L^2}{\pi^2 \sinh(\pi)} * \sinh\left(\frac{\pi x_1}{L}\right) - \frac{x_1 L}{\pi^2} \right] * \cos\left(\frac{\pi x_2}{L}\right) \quad (48)$$

Suas derivadas de primeira ordem podem ser facilmente obtidas:

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \left[\frac{L^2}{\pi^2 \sinh(\pi)} * \cosh\left(\frac{\pi x_1}{L}\right) * \frac{\pi}{L} - \frac{L}{\pi^2} \right] * \cos\left(\frac{\pi x_2}{L}\right) \quad (49)$$

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = - \left[\frac{L^2}{\pi^2 * \sinh(\pi)} * \sinh\left(\frac{\pi x_1}{L}\right) - \frac{x_1 L}{\pi^2} \right] * \sin\left(\frac{\pi x_2}{L}\right) * \frac{\pi}{L} \quad (50)$$

Para as dimensões unitárias da membrana, a equação de deslocamento pode ser simplificada para:

$$u(x_1, x_2) = \left[\frac{\sinh(\pi x_1)}{\pi^2 \sinh(\pi)} - \frac{x_1}{\pi^2} \right] * \cos(\pi x_2) \quad (51)$$

4.3.4.3 Procedimento

O erro médio percentual dos potenciais foi calculado nas arestas onde as derivadas normais foram prescritas e, de forma similar, o erro na determinação das derivadas normais foi obtido onde o potencial foi imposto. Para os potenciais o maior valor analítico do problema se encontra nas coordenadas (0,6289;1), com o módulo de 0,0327. Já para as derivadas, o maior valor está nas coordenadas (1;1) com o módulo de 0,2181.

4.3.4.4 Resultados

Os resultados obtidos para os diferentes parâmetros de testes estão condensados a seguir nas formas de tabelas e gráficos.

Tabela 13 - Erro médio global (%) para a variável potencial com uso da função de base radial simples no problema da membrana bi-engastada.

Quant. de Pontos de Contorno	MECIC, Função Radial Simples, Potencial.										
	Quantidade de Pontos Internos										
	0	4	9	16	25	49	64	81	144	225	324
36	43,37	13,44	4,940	1,957	0,972	0,558	0,211	0,286	0,123	0,126	0,146
84	58,95	18,14	7,547	3,557	1,902	0,687	0,443	0,295	0,118	0,084	0,058
124	61,41	19,22	8,095	3,878	2,119	0,819	0,554	0,388	0,154	0,078	0,046
164	62,98	19,79	8,389	4,058	2,241	0,885	0,604	0,429	0,182	0,089	0,048

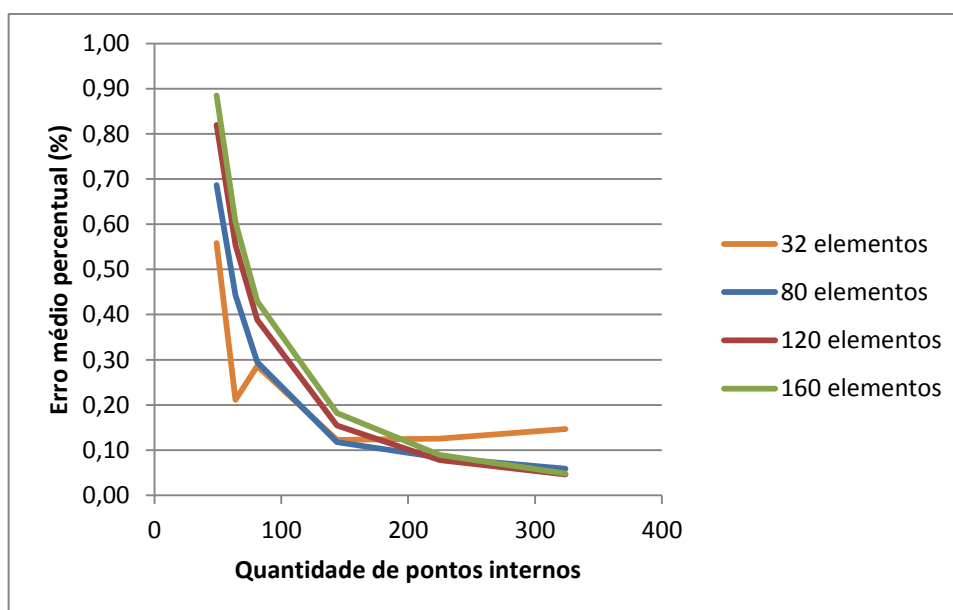


Figura 24 - Erro médio global para a variável potencial com uso da função de base radial simples no problema da membrana bi-engastada. Referente à tabela 13.

Para poucos pontos de informação os valores de erro são grandes. Também não houve uma convergência tão rápida como nos problemas anteriores, mas o método já alcançou valores de erro menores do que 1% a partir de 49 pontos de informação e para o maior número de pontos de informação utilizados foram encontrados valores muito próximos do analítico, com o erro de menos de 0,05%. Não é difícil justificar este comportamento uma vez que o problema agora é bidimensional e a variação da carga de domínio é mais intrincada.

Tabela 14 - Erro médio global (%) para a derivada normal com uso da função de base radial simples no problema da membrana bi-engastada.

Quant. de Pontos de Contorno	MECIC, Função Radial Simples, Derivada Normal.										
	Quantidade de Pontos Internos										
	0	4	9	16	25	49	64	81	144	225	324
36	17,04	12,83	4,815	2,180	1,150	1,981	1,742	1,514	0,806	0,979	0,883
84	53,73	10,97	8,483	4,856	3,141	1,480	1,137	0,826	0,536	0,457	0,376
124	57,42	13,62	6,659	5,463	3,527	1,798	1,327	1,038	0,621	0,728	0,361
164	60,09	15,87	5,061	4,986	3,823	1,976	1,491	1,155	0,594	0,420	0,378

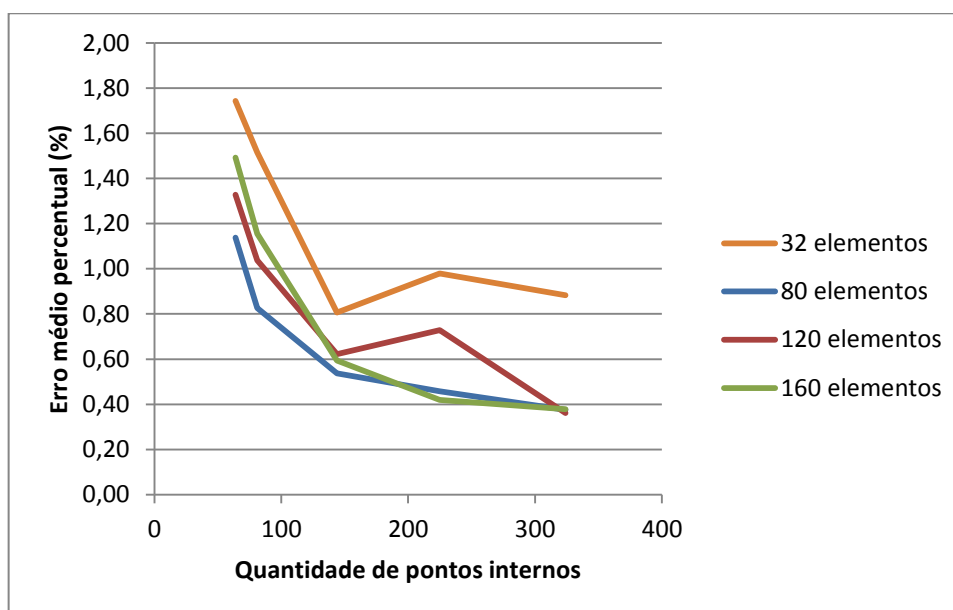


Figura 25 - Erro médio global para a derivada normal com uso da função de base radial simples no problema da membrana bi-engastada. Referente à tabela 14.

Os erros para a derivada normal se apresentam significativamente maiores do que para os valores do potencial, seguindo a tendência observada nos exemplos anteriores. A convergência dos resultados para os analíticos é um pouco mais demorada que as dos valores potenciais. As curvas apresentam menor monotonicidade, demonstrando a maior sensibilidade ao remanejamento dos pontos internos interpolantes.

Tabela 15 - Erro médio global (%) para a variável potencial com uso da função de base radial placa fina no problema da membrana bi-engastada.

Quant. de Pontos de Contorno	MECIC, Função Radial Placa Fina, Potencial.										
	Quantidade de Pontos Internos										
	0	4	9	16	25	49	64	81	144	225	324
36	88,57	8,922	2,266	0,821	0,488	0,277	0,162	0,174	0,140	0,147	0,160
84	106,2	10,47	3,207	1,502	0,776	0,207	0,094	0,086	0,096	0,059	0,044
124	111,1	11,23	3,643	1,710	0,967	0,391	0,253	0,169	0,030	0,070	0,046
164	113,7	11,68	3,832	1,873	1,104	0,466	0,342	0,234	0,090	0,023	0,022

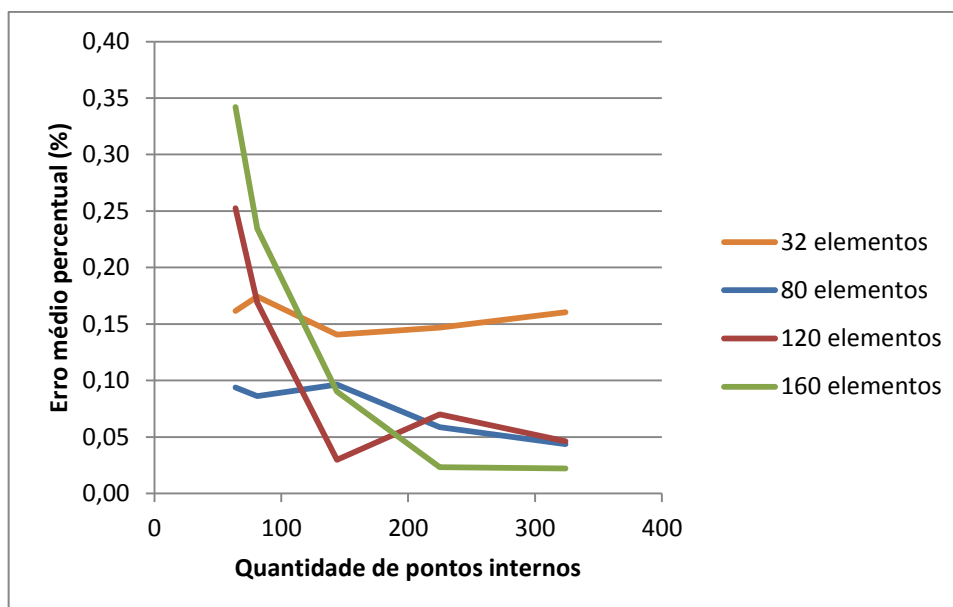


Figura 26 - Erro médio global para a variável potencial com uso da função de base radial placa fina no problema da membrana bi-engastada. Referente à tabela 15.

Assim como nos problemas anteriores, a função radial placa fina possui um mau desempenho na ausência de pontos de informação internos, mas apresenta uma rápida convergência, superior à da função radial simples. Ainda vale destacar que para um maior número de pontos internos, têm erros inferiores a 0,05%.

Tabela 16 - Erro médio global (%) para a derivada normal com uso da função de base radial placa fina no problema da membrana bi-engastada.

Quant. de Pontos de Contorno	MECIC, Função Radial Placa Fina, Derivada Normal.										
	Quantidade de Pontos Internos										
	0	4	9	16	25	49	64	81	144	225	324
36	113,2	8,355	3,890	2,692	0,976	1,724	1,584	1,369	0,741	0,943	0,891
84	209,2	9,930	7,269	4,026	2,514	1,200	0,611	0,514	0,548	0,445	0,341
124	260,7	16,03	7,151	5,769	3,690	1,995	1,526	1,111	0,287	0,749	0,390
164	303,4	21,36	6,761	6,457	4,605	2,401	1,934	1,506	0,793	0,283	0,256

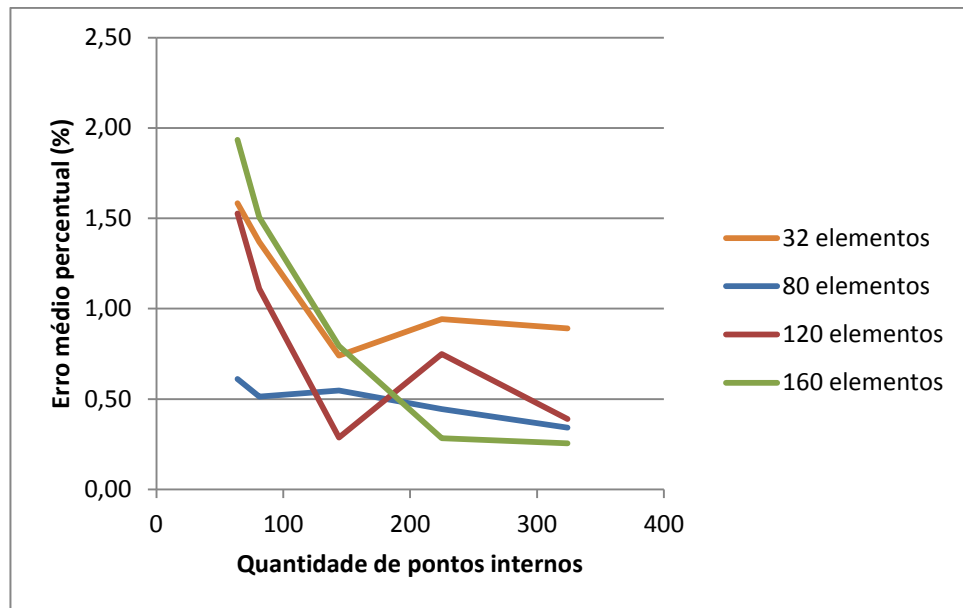


Figura 27 - Erro médio global para a derivada normal com uso da função de base radial placa fina no problema da membrana bi-engastada. Referente à tabela 16.

Para o cálculo da derivada normal, a necessidade de pontos internos se vê ainda mais acentuada. As malhas de contorno mais refinadas apresentaram uma convergência mais lenta, e alcançaram erros de até dez vezes maiores do que para o cálculo do potencial. Deve-se destacar que o desempenho das funções radiais depende de uma série de fatores, de importância diversa. Um destes fatores secundários, mas que afeta o comportamento das curvas de convergência fazendo-as não monotônicas, consiste da sensibilidade ao arranjo dos pontos internos interpolantes como função da quantidade destes no contorno. Por isso, a malha com 124 pontos de contorno com 144 pontos internos apresentou um nível de erro muito baixo, que veio a crescer com o aumento da quantidade interna de polos, algo que contraria a expectativa da maior parte das técnicas discretas, que comumente melhoram sua precisão com a adição de maior número de pontos.

Em termos gerais, a partir dos resultados apresentados vê-se que os erros tendem a diminuir com o aumento do número de pontos internos, salvo algumas exceções, quando há muitos pontos internos para uma malha de elementos de contorno não tão refinada, quando então o erro médio tende a convergir a um valor determinado e algumas vezes oscilar em suas proximidades, como pode ser notado nas malhas de 32 elementos. Aí então, se o número de pontos internos é muito grande, o erro médio não mais decresce, induzindo que possa haver uma saturação de pontos de informação, onde a função atinja seu ponto máximo e estabilize.

Excetuando-se as soluções para as malhas de 32 elementos, não foram observados indícios de que as outras malhas tenham alcançado a saturação dos pontos de informação, sugerindo que há possibilidade de uma melhor exatidão para a solução dessas malhas com o aumento do número de pontos internos, salvo alguns casos onde a relação pontos de contorno versus pontos internos versus localização destes pontos acabe resultando numa espécie de mínimo local.

As curvas do erro para o potencial apresentaram uma maior convergência para o resultado exato, assim como se aproximaram mais da solução exata da equação do que as curvas para a derivada normal.

Os testes como um todo tiveram uma convergência mais demorada que os problemas anteriores e esse comportamento deve ser atribuído a maior complexidade do problema. A crescente adição de pontos de informação permitiu alcançar valores muito próximos da solução analítica, com a ordem de 0,05% para potencial e 0,3% para as derivadas normais.

4.3.5 Secção de Barra Quadrada Sujeita a Torção

4.3.5.1 Definição

O problema para a barra prismática sujeita a torção é descrito de acordo com a Teoria da Elasticidade através de uma Equação de Poisson em que, usualmente, as condições de contorno prescritas são todas do tipo essencial [6]. De acordo com o que foi dito no tópico 3.4 essa configuração inflige uma situação de singularidade que, para ser evitada, requer um afastamento nos nós duplos localizados no vértice da geometria.

A medida do afastamento é escolhida de acordo com vários testes realizados para malhas aleatoriamente escolhidas, dentre as quais estão as que são utilizadas nas simulações. É, então, determinado um afastamento comum a todas as malhas, onde são alcançados os melhores resultados.

A figura 28 ilustra a seção reta quadrada de dimensões unitárias referente ao problema abordado, que consiste em uma barra prismática sujeita a torção. Observa-se que este problema é similar a uma membrana engastada em suas quatro laterais.

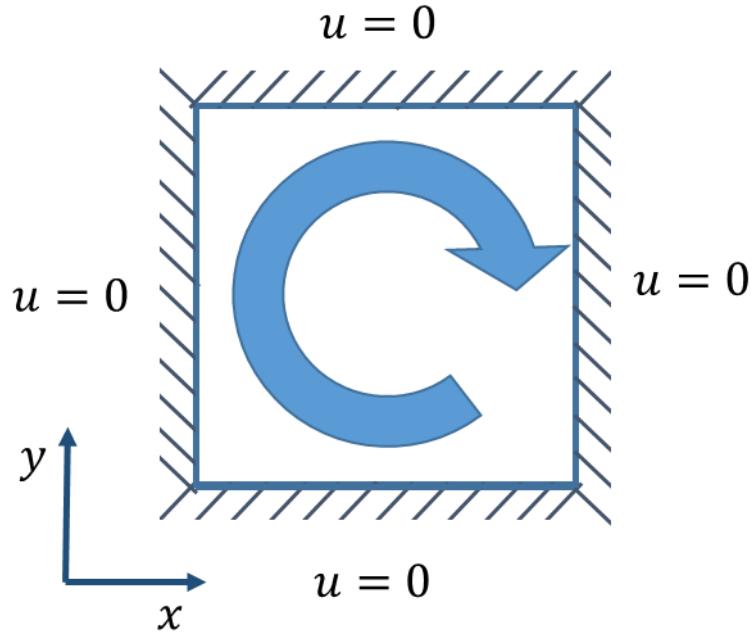


Figura 28– Seção de uma barra quadrada sujeita a torção.

As condições de contorno são, então, todas do tipo essencial e iguais à zero.

4.3.5.2 Equação de Governo

Considerada a torção uniforme e o material sendo considerado homogêneo e isotrópico, a equação que governa o problema é a Equação de Poisson:

$$\nabla^2 \phi = -2 * G\theta \quad (52)$$

A solução dada do problema é:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x} = \tau_y = \frac{-32 G\theta}{\pi^3 * a} \sum_{m=1,3,5...}^{\infty} \sum_{n=1,3,5...}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) * \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{n\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)} \quad (53a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \tau_x = \frac{32 G\theta}{\pi^3 * b} \sum_{m=1,3,5...}^{\infty} \sum_{n=1,3,5...}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) * \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{m\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)} \quad (53b)$$

4.3.5.3 Procedimento

Arbitrariamente, foram escolhidas as malhas com 32 e 120 elementos de contorno, com quantidades diversas de pontos internos de informação, também escolhidas de forma arbitrária. Com estas configurações foi simulada a solução do problema proposto com diferentes afastamentos nos nós duplos dos vértices. Estes afastamentos se dão em percentagem do tamanho do elemento utilizado.

O cálculo do erro médio percentual utilizou apenas os resultados das derivadas normais obtidas nas arestas, pois o potencial foi prescrito em todo o contorno.

O maior valor analítico encontra-se nas coordenadas (1;0,5), com o módulo de 0,6934.

4.3.5.4 Afastamento dos Nós Duplos nos Vértices

Os resultados das simulações estão dispostos a seguir em forma de tabelas e gráficos.

Tabela 17 - Erro médio global (%) com uso da função de base radial simples no problema da seção de barra quadrada sujeita a torção para diferentes afastamentos.

Quant. de Pontos de Contorno	Quant. de Pontos Internos	Erro com Afastamento, MECIC, Função Radial Simples.							
		Afastamento Percentual							
		0	2	4	6	8	12	16	20
36	9	3,2436	2,7301	2,8959	3,0952	3,2436	3,4520	3,5246	3,7440
36	49	3,0293	2,6862	2,4007	2,2874	2,4653	3,2147	4,2409	5,3935
36	81	2,8549	2,2915	1,8009	1,8171	2,1159	2,9871	4,0248	5,1879
124	49	1,4268	-	1,4112	-	1,4287	1,4329	1,4415	1,4516
124	81	0,8532	-	0,6955	0,6421	0,6153	0,6750	0,7752	0,8900
124	144	0,7113	-	0,7173	-	0,7354	0,7392	0,7730	0,8578

Note que não foram realizadas simulações para todos os afastamentos, devido aos resultados para as determinadas configurações não apresentarem variações expressivas.

Tabela 18 - Erro médio global (%) com uso da função de base radial placa fina no problema da seção de barra quadrada sujeita a torção para diferentes afastamentos.

Quantidade de Pontos de Contorno	Quantidade de Pontos Internos	Erro com Afastamento, MECIC, Função Radial Placa Fina.					
		Afastamento Percentual					
		0	2	4	6	8	12
36	49	2,9518	2,4280	2,0382	2,1062	2,3397	3,3155
36	81	2,9431	2,4211	1,9696	1,8636	2,1212	3,1165
124	49	3,1791	3,1928	3,2029	3,2095	3,2122	3,2049
124	81	1,8854	1,8768	1,8718	1,8711	1,8751	1,8978

Assim como a função radial simples, a função radial placa fina não se mostrou muito sensível à variação do afastamento, o que é considerado um bom indicio de que pequenas variações do afastamento não produzem um aumento expressivo nos erros das malhas não testadas.

Com as curvas plotadas na forma de gráficos do erro pela percentagem do afastamento é de fácil visualização a percentagem que retorna o menor erro para as funções. Primeiramente, são mostrados os gráficos para a função radial simples,

com as malhas de contorno mais pobres (figura 29) e para as malhas de contorno mais ricas (figura 30).

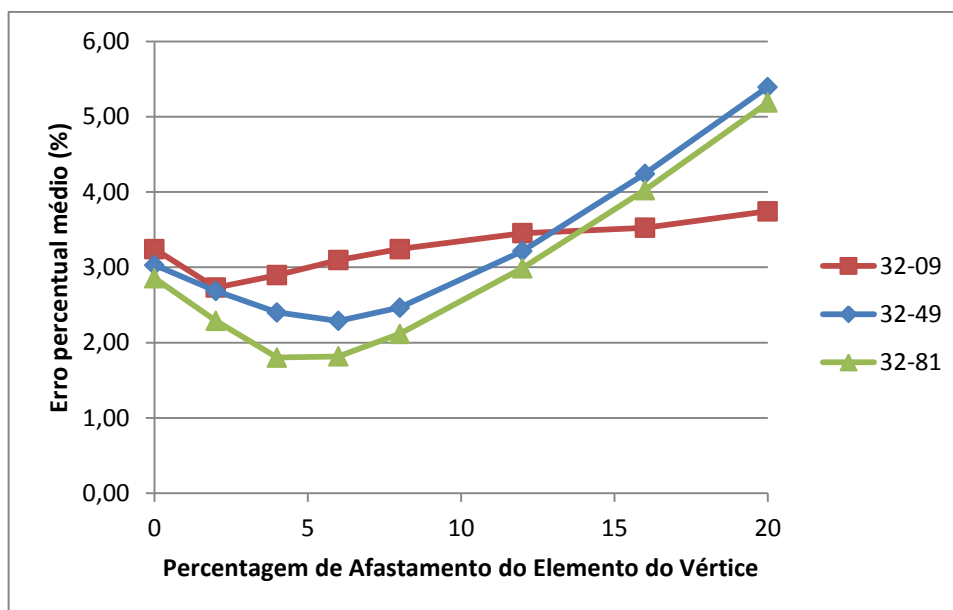


Figura 29 - Erro médio global com uso da função de base radial simples no problema da seção de barra quadrada sujeita a torção para diferentes afastamentos, as malhas menos refinadas. Referente à tabela 17.

Para a função radial simples as malhas de 32 elementos de contorno tendem a um menor erro percentual medio com um afastamento em torno de 5%.

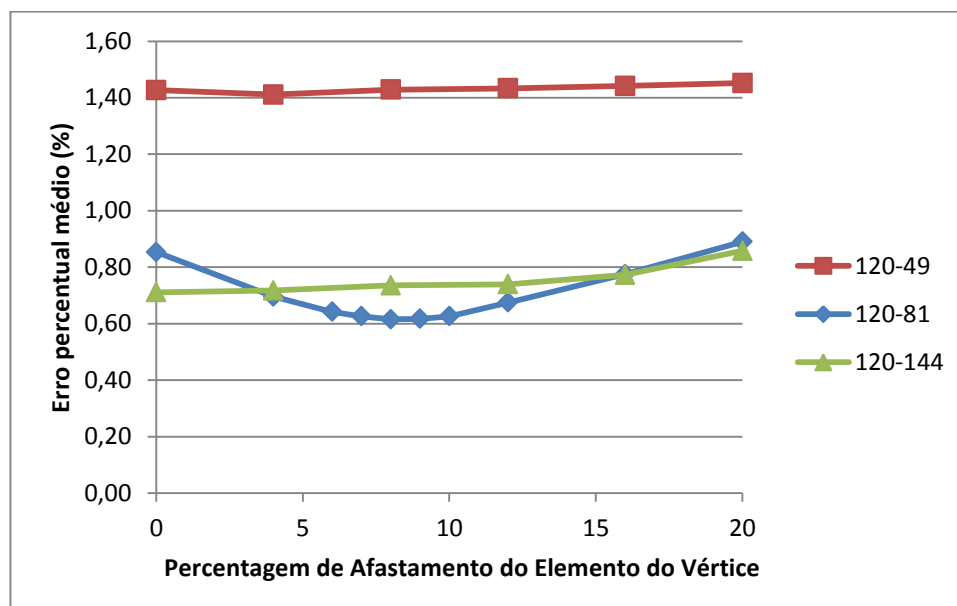


Figura 30 - Erro médio global com uso da função de base radial simples no problema da seção de barra quadrada sujeita a torção para diferentes afastamentos, as malhas mais refinadas. Referente à tabela 17.

Para as malhas mais ricas com a função radial simples, o menor erro é em torno de 8%. Em vista de se priorizar a qualidade das malhas de maior refinamento,

que tendem a produzir melhores resultados, foi adotado um afastamento de 8% para todas as malhas. Essa escolha não produzirá um aumento notável nos erros das malhas de 32 elementos, como pode ser notado em sua curva na figura 29.

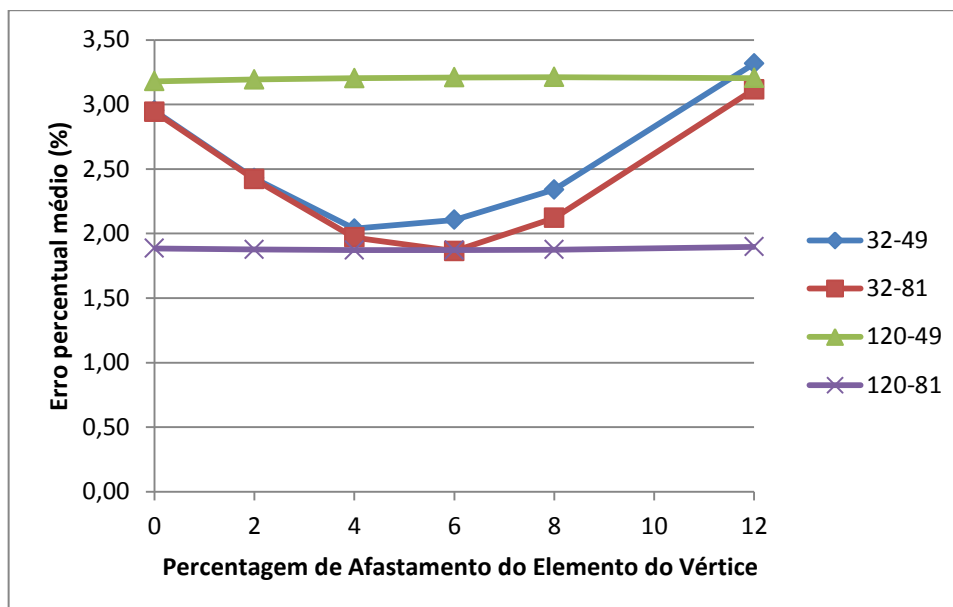


Figura 31 - Erro médio global com uso da função de base radial placa fina no problema da seção de barra quadrada sujeita a torção para diferentes afastamentos. Referente à tabela 18.

Já com o uso da função radial placa fina, os menores módulos do erro médio global são alcançados quando se utiliza um afastamento próximo a 5%, conforme pode ser observado no gráfico da figura 31, as malhas mais refinadas se mostram menos sensíveis a variações do afastamento.

4.3.5.5 Resultados

Com o uso dos afastamentos adequados para todas as configurações, foram realizadas as simulações para se obter o erro médio global, com os resultados dispostos na tabela 19 a seguir:

Tabela 19 - Erro médio global (%) com uso da função de base radial simples no problema da seção de barra quadrada sujeita a torção.

Quant. de Pontos de Contorno	MECIC, Função Radial Simples.											
	Quantidade de Pontos Internos											
	0	4	9	16	25	49	64	81	144	225	324	484
36	37,56	8,755	3,244	2,860	2,444	2,465	2,389	2,116	2,034	1,916	1,950	1,999
84	46,69	13,23	6,638	3,669	2,062	1,087	1,066	0,957	1,046	0,855	0,627	0,562
124	48,55	14,40	7,910	4,859	3,170	1,429	0,899	0,615	0,735	1,331	0,762	0,531
164	49,17	14,75	8,478	5,407	3,734	1,931	1,435	1,035	0,376	0,477	0,592	0,626

O modulo dos erros são mais altos que os encontrados nos testes anteriores. A convergência também é demorada, e mesmo com o uso de uma quantidade maior

de pontos de informação a solução não atinge valores tão próximos aos exatos como ocorreu nos problemas anteriores. A malha mais grosseira utilizada alcançou erros mínimos por volta de 2%; as outras malhas, mais refinadas, os erros foram próximos a 0,5%. Na realidade, os resultados numéricos para as derivadas do potencial sempre tiveram uma precisão inferior aos resultados do potencial e, neste caso, apenas as derivadas foram calculadas.

Tabela 20 - Erro médio global (%) com uso da função de base radial placa fina no problema da seção de barra quadrada sujeita a torção.

Quant. de Pontos de Contorno	MECIC, Função Radial Placa Fina.											
	Quantidade de Pontos Internos											
	0	4	9	16	25	49	64	81	144	225	324	484
36	123,2	7,394	3,151	3,872	3,115	2,057	2,083	1,861	2,276	1,912	2,035	2,061
84	182,4	20,81	10,59	6,127	3,395	1,545	0,475	0,956	1,440	0,764	0,576	0,556
124	219,8	25,26	13,62	8,625	5,999	3,207	2,514	1,871	0,286	1,579	1,002	0,563
164	250,6	28,79	15,05	10,07	7,062	4,077	3,345	2,584	1,432	0,389	0,583	0,825

Ao contrário das simulações dos problemas anteriores, aqui, a função radial placa fina não teve uma convergência mais rápida do que a função radial simples. Também se notou um comportamento mais fortemente oscilatório para certas malhas de quando se introduz certa quantidade de pontos de informação que, como já foi exposto, está relacionada a sensibilidade da formulação ao rearranjo dos pontos internos interpolantes.

Nos gráficos a seguir estão os erros para as várias quantidades de pontos de informação simulados, a partir de 16 pontos.

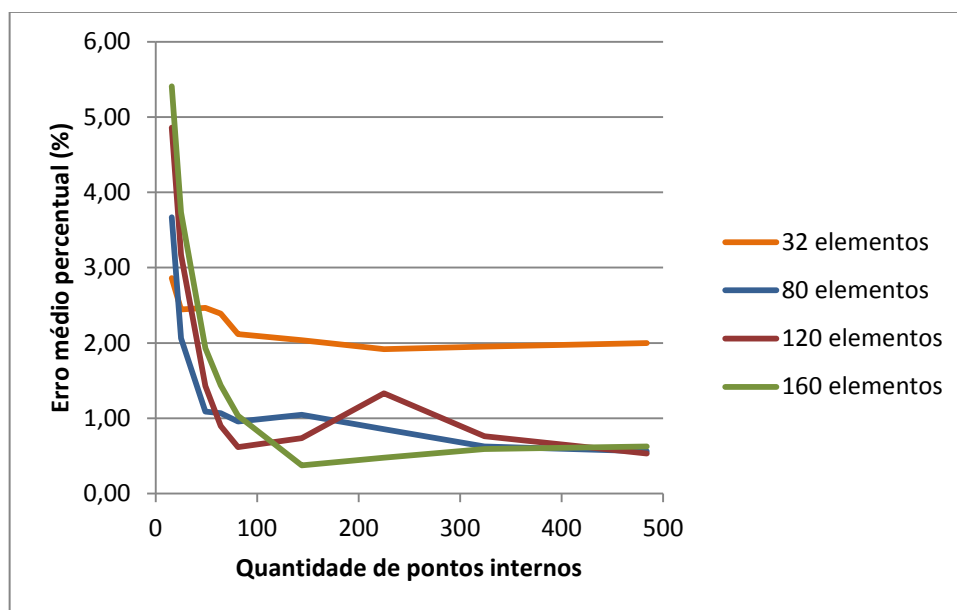


Figura 32 - Erro médio global com uso da função de base radial simples no problema da seção de barra quadrada sujeita a torção. Referente à tabela 19.

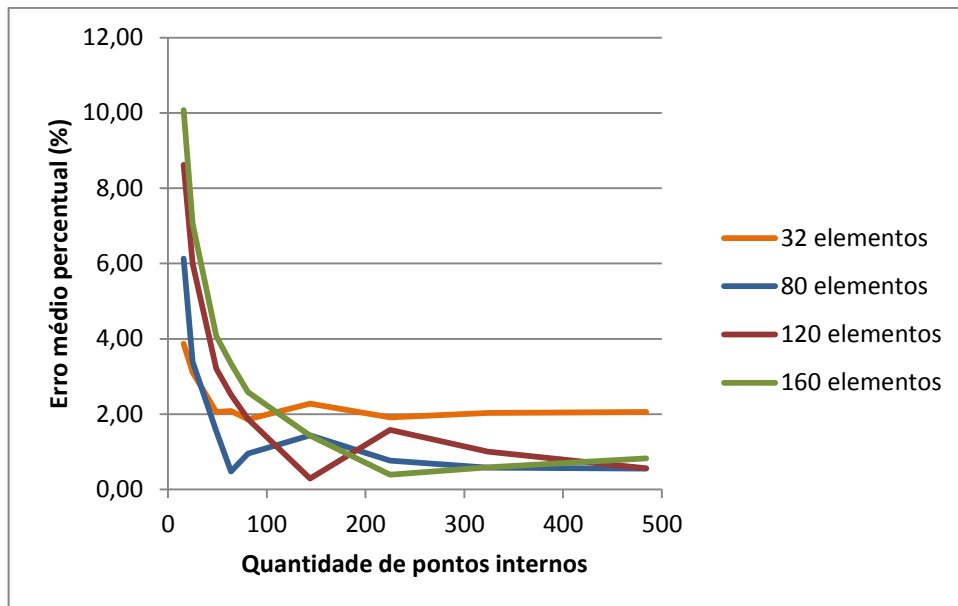


Figura 33 - Erro médio global com uso da função de base radial placa fina no problema da seção de barra quadrada sujeita a torção. Referente à tabela 20.

Nestes gráficos pode-se melhor perceber que as curvas para a função radial simples foram um pouco mais suaves do que as curvas para a função radial placa fina, mesmo ambas convergindo para erros semelhantes. A malha de contorno de 32 elementos se manteve com uma baixa convergência, mas sem oscilações e atingiu valores de erro da ordem de 2% para ambas as funções. A malha de 160 elementos teve uma convergência mais rápida para a função radial simples e comportamento suave para ambas as funções, mesmo não tendo os valores dos erros estritamente decrescente à medida que se adicionavam pontos de informação.

No geral, a solução deste problema alcançou resultados razoavelmente próximos aos exatos com as malhas utilizadas. Entretanto, devido ao cálculo neste caso ser feito para as derivadas normais, que são de determinação numérica mais sensível - são derivadas do potencial - mesmo nas simulações com malhas de contorno mais refinadas não foram atingidos os baixos valores de erro alcançados nos problemas anteriores. Outro fator que pode ter contribuído para o aumento no módulo dos erros é o valor escolhido para os afastamentos, que mesmo tendo pouca variação nas malhas simuladas podem não ter se comportado bem nas que não foram testadas. Uma vez que as funções radiais simulam um termo presente na equação de governo, é possível que outros perfis de carga de domínio também alterem este valor de afastamento.

5 CONCLUSÕES

A MECIC é matematicamente mais simples, robusta e geral do que as alternativas disponíveis com o MEC que evitam a integração de domínio, como a formulação com Dupla Reciprocidade. Ao contrário desta, a formulação proposta não exige a construção de duas matrizes auxiliares multiplicando as matrizes H e G ; a sua tática aproxima diretamente o núcleo completo, à semelhança do que é feito num processo de interpolação simples, fazendo uso de apenas uma função primitiva. Apenas a transformação da integral de domínio numa integral de contorno faz a MECIC diferente de um processo de interpolação tradicional com funções de base radial. Assim, uma ampla gama de diferentes funções radiais de base plena pode ser utilizada sem problemas de instabilidade.

Por outro lado, devido a esta característica típica de um processo de interpolação e transformação de integrais de domínio em integrais de contorno, a importância dos polos internos é aumentada. Apesar de ter atingido resultados próximos aos exatos, para a maioria das malhas foi necessária uma grande quantidade de pontos de informação, devido à baixa convergência. No entanto, considerando pontos internos em quantidade suficiente, o desempenho da MECIC é bastante satisfatório e se mostra superior ao da formulação com Dupla Reciprocidade [7].

Para o cálculo da derivada normal, a precisão do método foi menor, conforme esperado, uma vez que se trata do cálculo de uma derivada da variável básica ou primal, que implica em maior dificuldade na aproximação. Neste caso, a necessidade de maior número de pontos internos se vê ainda mais acentuada. Percebeu-se que as malhas de contorno mais refinadas apresentaram uma convergência mais lenta, e alcançaram erros de até dez vezes maiores do que para o cálculo do potencial.

Deve-se ainda destacar que o desempenho das funções radiais depende de uma série de fatores que afetam o comportamento das curvas de convergência fazendo-as não monotônicas ou oscilantes em algumas circunstâncias. Esse comportamento pode ser atribuído à sensibilidade da interpolação com funções radiais, que se mostram muito dependentes do posicionamento dos pontos internos interpolantes e também como função da quantidade destes no contorno.

6 REFERÊNCIAS

- [1] P. W. Partridge, C. A. Brebbia; L. C. Wrobel, The Dual Reciprocity Boundary Element Method, first ed., Computational Mechanics Pub. and Elsevier Applied Science, London, UK, 1992.
- [2] J. Stewart, Cálculo: Volume II, 6º ed. Americana, São Paulo, Cengage Learning, 2009.
- [3] R. Shaback and H. Wendland, Using compactly supported radial basis functions to solve partial differential equations, in: C.S. Chen, C.A. Brebbia and D.W. Pepper (Eds.), Boundary Element Technology XIII, WitPress, Southampton, Boston, 1999, pp.311-324.
- [4] S.R. Karur, P.A. Ramachandran, Radial basis function approximation in the dual reciprocity method, Mathematical and Computer Modelling, 20, 7 (1994) 59-70.
- [5] C. F. Loeffler, O Método dos Elementos de Contorno, Revista Militar de Ciência e Tecnologia, Vol VII, n º1, pag. 12-21, 1990.
- [6] S. P. Timoshenko, Resistencia dos Materiais: Volume 1, Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1966.
- [7] C. F. Loeffler, A. L., Cruz, A., Bulcão, Direct Use of Radial Basis Interpolation Functions for Modelling Source Terms with the Boundary Element Method, Eng. Analysis with Boundary Element, no prelo.

7 BIBLIOGRAFIA

R. Franke, Scattered data interpolation: test of some methods, *Mathematics of Computation*, California, USA, 38, 157 (1982) 181-200.

M. D. Buhmann, *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*, first ed., New York, Cambridge University Press, 2003.

A. L. Cruz, *Modelagem Direta de Integrais de Domínio Usando Funções de Base Radial no Contexto do Método dos Elementos de Contorno*. 2012. 139f. Dissertação (Mestrado) Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2012.

L. Zamprogno, *Utilização de Funções de Base Radial de Suporte Compacto na Modelagem Direta de Integrais de Domínio com o Método dos Elementos de Contorno*. 2013. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2013.