

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROJETO DE GRADUAÇÃO**

PEDRO PAULO DE CARVALHO MORAES

**ANÁLISE NUMÉRICA DA RADIAÇÃO TÉRMICA UTILIZANDO O MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS**

**VITÓRIA
2015**

PEDRO PAULO DE CARVALHO MORAES

**ANÁLISE NUMÉRICA DA RADIAÇÃO TÉRMICA UTILIZANDO O MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS**

Projeto de graduação apresentado ao
Corpo Docente do Departamento de
Engenharia Mecânica do Centro
Tecnológico da Universidade Federal do
Espírito Santo, como requisito parcial
para obtenção do grau de Engenheiro
Mecânico.

Orientador: Prof. Dr. Juan Sérgio
Romero Saenz

VITÓRIA

2015

PEDRO PAULO DE CARVALHO MORAES

**ANÁLISE NUMÉRICA DA RADIAÇÃO TÉRMICA UTILIZANDO O MÉTODO
DOS ELEMENTOS FINITOS**

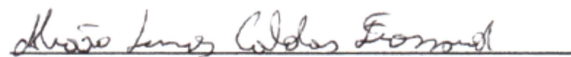
Projeto de graduação apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do grau de Engenheiro Mecânico.

Aprovado em 10 de julho de 15.

COMISSÃO EXAMINADORA:



Prof. Dr. Juan Sérgio Romero Saenz
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO
SANTO
Orientador



Prof. Abraão Lemos Caldas Frossard
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO
SANTO
Examinador



Prof. Dr. Fernando César Meira Menandro
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO
SANTO

AGRADECIMENTOS

Aos meus familiares pelo apoio, torcida e oportunidade de estudo.

Aos amigos pela cumplicidade, lealdade e compreensão.

Ao Prof. Dr. Juan Sérgio Romero Saenz, pela orientação, apoio e confiança.

RESUMO

Ao analisar estruturas que estão sujeitas a altas temperaturas, baixos índices de convecção, ou ainda estruturas que trocam calor sem a existência de um meio físico para tal, encontram-se situações nas quais o mecanismo de troca de calor predominante é a radiação térmica. É possível encontrar diversas aplicações nas quais tal hipótese é válida. Entre elas podemos destacar coletores solares, fornos residenciais, motores a combustão, satélites e usinas nucleares. O presente trabalho visa apresentar uma formulação numérica para o cálculo dos fatores de forma entre duas superfícies que realizam troca de calor radiante mútua, com geometrias e orientações arbitrárias. A formulação numérica foi desenvolvida a partir do Método dos Elementos Finitos e implementada através de código próprio. A título de validação do mesmo são apresentados dois problemas que possuem soluções analíticas, sendo as mesmas comparadas com os resultados obtidos pelo método numérico. Também é mostrada uma possível aplicação da metodologia, ilustrando a importância de tal análise em projetos nos quais há predominância da radiação como mecanismo de troca de calor. Por fim são mostrados os resultados, nos quais os erros obtidos com o método numérico alcançam uma porcentagem satisfatória, indicando que o método é adequado para tais análises.

Palavras-Chave: *Radiação Térmica, Fator de Forma, Elementos Finitos, Troca de Calor Radiante Mútua.*

ABSTRACT

Analyzing structures which are subject to high temperatures, low convection rates, or even structures that exchange heat without the existence of a physical medium for such, in these situations, it is observed that the predominant mechanism for the heat exchange is thermal radiation. It is possible to find several applications in which this hypothesis is valid. Among them can be highlighted solar collectors, ovens (residential or industrial), combustion engines, satellites and nuclear power plants. This paper presents a numerical formulation for the calculation of the shape factors (also known as configuration factors) between two surfaces that mutually exchange radiant heat, with arbitrary geometries and orientations. The numerical formulation was developed from the Finite Element Method and implemented through own code. As a validation for the code, two problems with analytical solutions are presented, comparing its solution to the results obtained by the numerical method. Also, a possible application of the methodology is shown, illustrating the importance of such analysis in projects in which there is preponderance of the radiation as heat exchanging mechanism. Finally, the results are shown, where the errors obtained with the numerical method achieve satisfactory orders, indicating that the method is suitable for such analyses.

Keywords: *Thermal Radiation, Shape Factor, Finite Element Method, Mutual Radiant Heat Exchanging.*

LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Condições para Emissividade e Absortividade.....	29
Tabela 2 – Resultados dos fluxos e radiosidades para a primeira validação.	47
Tabela 3 – Radiosidade para a segunda validação.....	49
Tabela 4 – Fluxos e Temperaturas para a segunda validação	49

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Espectro Eletromagnético com a faixa de radiação térmica em destaque.....	14
Figura 2 – (a) Definição de ângulo plano (b) Definição de ângulo sólido (c) radiação que sai de dA_1 e chega a dA_n (d) Ângulos zênite (θ) e azimutal (Φ).	15
Figura 3 – Ângulo sólido entre dA_n e um ponto de dA_1 pelo sistema de coordenadas esféricas.....	16
Figura 4 – Emissão, Irradiação e Radiosidade.....	17
Figura 5 – Emissão para um hemisfério hipotético a partir de um ponto da área diferencial dA_1	18
Figura 6 – Radiação incidente (Irradiação) sobre uma área dA_1	20
Figura 7 – Radiosidade.....	20
Figura 8 – Fatores de forma entre as superfícies diferenciais dA_i e dA_j	32
Figura 9 – Confinamento formado por N superfícies.	34
Figura 10 – Superfície única (A_i) e superfície composta (A_j) formada por N superfícies.	35
Figura 11 – Confinamento formado por N superfícies	36
Figura 12 – Balanço de energia em uma superfície i	37
Figura 13 – Ilustração dos pontos de Gauss dispostos em duas superfícies para o cálculo do fator de forma	40
Figura 14 – Ilustração do confinamento para a segunda validação.....	48
Figura 15 – Ilustração tridimensional do confinamento.....	51
Figura 16 – Ilustração bidimensional do confinamento. Vista Superior.	51

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	11
2. OBJETIVO	12
3. RADIAÇÃO TÉRMICA.....	13
3.1 DEFINIÇÃO TEÓRICA.....	13
3.2 DEFINIÇÕES GEOMÉTRICAS.....	14
3.3 EMISSÃO, IRRADIAÇÃO E RADIOSIDADE	16
3.3.1 EMISSÃO	17
3.3.2 IRRADIAÇÃO	19
3.3.3 RADIOSIDADE	20
3.4 O CORPO NEGRO	21
3.4.1 A LEI DE PLANCK.....	22
3.4.2 LEI DE STEFAN-BOLTZMANN	23
4. RADIAÇÃO EM CORPOS REAIS.....	24
4.1 EMISSIVIDADE	24
4.2 ABSORTIVIDADE	25
4.3 REFLETIVIDADE.....	26
4.4 RELAÇÃO ENTRE PROPRIEDADES	28
4.5 LEI DE KIRCHHOFF	28
4.6 SUPERFÍCIES CINZA DIFUSA E OPACA.....	29
5. TROCA DE CALOR RADIANTE ENTRE SUPERFÍCIES	31
5.1 FATORES DE FORMA.....	31
5.2 FATORES DE FORMA COMO INTEGRAL DE CONTORNO	33
5.3 RELAÇÕES ALGÉBRICAS ENTRE OS FATORES DE FORMA	33
5.4 TROCA DE CALOR ENTRE SUPERFÍCIES EM CONFINAMENTOS	36
6. FORMULAÇÃO NUMÉRICA PARA O FATOR DE FORMA.....	39
6.1 MEF APLICADO AO FATOR DE FORMA	39
6.2 CÁLCULO DAS RADIOSIDADES, TEMPERATURAS E FLUXOS	43
7. VALIDAÇÃO NUMÉRICA.....	46
7.1 PRIMEIRA VALIDAÇÃO.....	46
7.2 SEGUNDA VALIDAÇÃO.....	48
8. APLICAÇÃO	51

9. CONCLUSÃO	54
10. SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS.....	55
11. REFERÊNCIAS.....	56

1. INTRODUÇÃO

A radiação térmica pode ser encontrada como mecanismo dominante para a troca de calor em inúmeras situações. Em fornos residenciais e geradores de vapor em usinas nucleares, por exemplo, as altas temperaturas alcançadas tornam a radiação o mecanismo principal de troca de calor. No espaço, onde não há um meio físico de transmissão por condução ou convecção, a radiação é o único meio para a troca de energia. Também há situações que ocorrem a baixas temperaturas (ambiente), como pode ser encontrado em lugares fechados que, para o aquecimento e manutenção de conforto térmico, possuem lareiras ou aquecedores em seu interior. Em todos estes casos a radiação é determinante para a modelagem da troca de calor.

Visto que há diversas aplicações, tanto no âmbito industrial quanto residencial, é necessário que haja maneiras de analisar as trocas de calor por radiação em diferentes situações, a fim de que sempre seja realizado um projeto adequado.

2. OBJETIVO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar uma análise numérica da troca de calor por radiação térmica entre duas ou mais superfícies, dispostas arbitrariamente no espaço e com geometrias arbitrárias. Para a modelagem do fenômeno em destaque foi utilizado o Método dos Elementos Finitos, implementado por código próprio em software computacional.

3. RADIAÇÃO TÉRMICA

Neste capítulo será mostrado como se dá a modelagem analítica da transferência de calor por radiação térmica. Serão definidos os princípios, conceitos e propriedades básicas, assim como as hipóteses necessárias para realizar a modelagem. Também será mostrado como é interpretado o fenômeno da radiação térmica no âmbito da engenharia, de forma que seja possível entender como o mesmo acontece. De início, uma breve definição teórica de radiação, seguida por conceitos a respeito da interpretação geométrica do assunto.

3.1 DEFINIÇÃO TEÓRICA

Imagine que um sólido esteja a uma temperatura T_s e sua vizinhança esteja a uma temperatura T_v , de tal forma que $T_s > T_v$. Considere também que o sólido e sua vizinhança estão separados um do outro por um perfeito vácuo, impedindo assim as trocas de calor por condução e convecção. Apesar de não ocorrerem tais trocas, espera-se que o sólido esfrie até atingir o equilíbrio térmico com a vizinhança. Esse resfriamento está associado a uma redução na energia interna armazenada pelo sólido e é uma consequência direta da emissão de radiação térmica pela sua superfície (INCROPERA et al., 2007). Qualquer material ou substância, que se encontra a uma temperatura maior que zero Kelvin, emite energia eletromagnética em pacotes discretos de energia, chamados fótons (ROHSENOW; HARTNETT; CHO, 1998). O fóton é definido como a partícula elementar mediadora da força eletromagnética, ao qual há uma energia associada. Energia essa que é descrita por $E = hf = \frac{hc}{\lambda}$, sendo h a constante de Planck, c a velocidade da luz, f e λ a frequência e comprimento de onda da energia emitida, respectivamente. A radiação térmica é um tipo de radiação eletromagnética, associada a um intervalo de temperaturas entre 30 e 30000 K, e com um comprimento de ondas entre 0,1 e 100 μm (ROHSENOW; HARTNETT; CHO, 1998).

A figura a seguir mostra o espectro eletromagnético completo, destacando a faixa de interesse para a transferência de calor, faixa essa que engloba todo o espectro infravermelho, de luz visível e ainda uma parte do espectro ultravioleta.

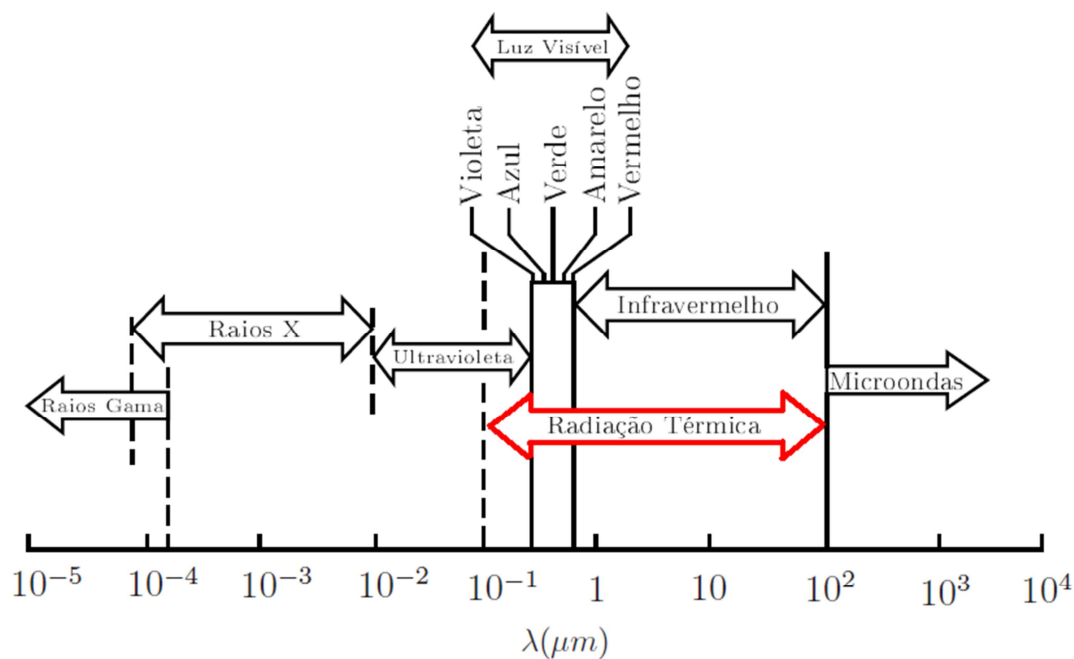


Figura 1 - Espectro Eletromagnético com a faixa de radiação térmica em destaque (Fonte: INCROPERA et al., 2007 (Adaptado))

3.2 DEFINIÇÕES GEOMÉTRICAS

A radiação térmica é um fenômeno tridimensional. Uma vez que cada ponto de uma superfície funciona como uma fonte de radiação que emite em todas as direções, é necessário, portanto, lançar mão de um sistema de coordenadas esféricas para poder entender esse fenômeno. Ao utilizarmos coordenadas tridimensionais, o mais correto é se referir a ângulos sólidos ao invés de ângulos planos. Imagine uma área dA_1 que emite radiação sobre uma superfície diferencial dA_n . Entre elas, existe um ângulo sólido diferencial representado por $d\omega$ (Figura 2 (c)). Mais a frente este conceito será amplamente utilizado, quando for introduzido o conceito dos fatores de forma.

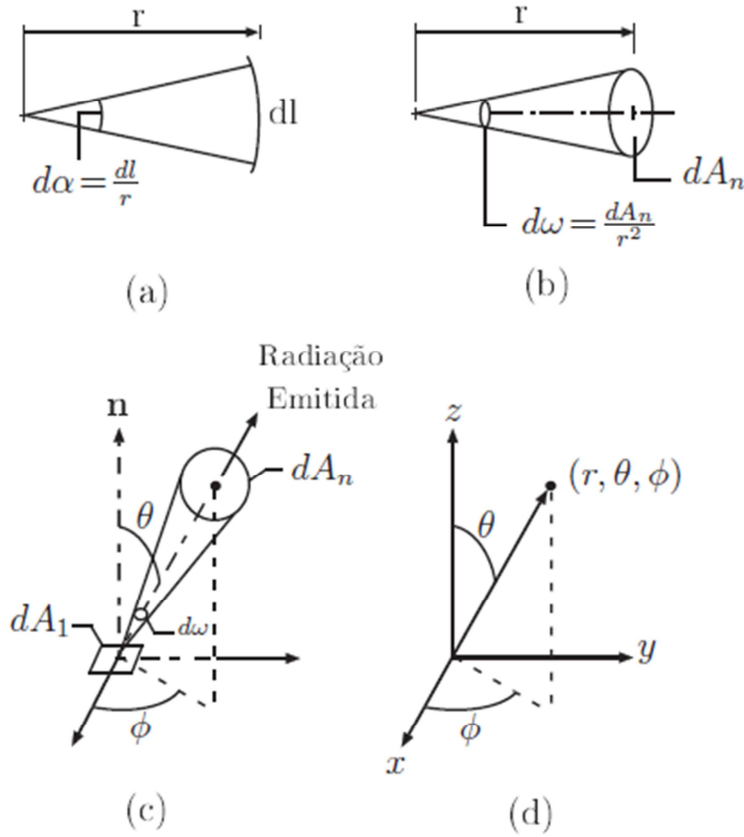


Figura 2 – (a) Definição de ângulo plano (b) Definição de ângulo sólido (c) radiação que sai de dA_1 e chega a dA_n (d) Ângulos zênite (θ) e azimutal (ϕ) (Fonte: INCROPERA et al. (2007)).

Assim como o ângulo plano, o ângulo sólido também é definido como uma razão. O ângulo plano $d\alpha$ é definido como o ângulo com vértice no centro de uma circunferência de raio r , cujo valor é dado pela razão entre o comprimento do arco entre os raios da circunferência e o raio da mesma, medido em radianos (rad) (Figura 2 (a)). Analogamente, o ângulo sólido $d\omega$ é definido como o ângulo com vértice no centro de uma esfera de raio r , cujo valor é dado pela razão entre a área subentendida pelos raios da esfera e o quadrado do raio da mesma, medido em estereorradianos (sr) (Figura 2 (b)). Dessa forma:

$$d\omega = \frac{dA_n}{r^2} \quad (1)$$

Considere agora uma área dA_1 que emite radiação em uma determinada direção. Direção essa que pode ser definida pelos ângulos de zênite e azimutal (θ, ϕ) (Figura 2 (d)). A área diferencial retangular dA_n , perpendicular à direção de emissão pode ser definida, por uma análise simples de geometria considerando dimensões infinitesimais, como mostrado na figura 3.

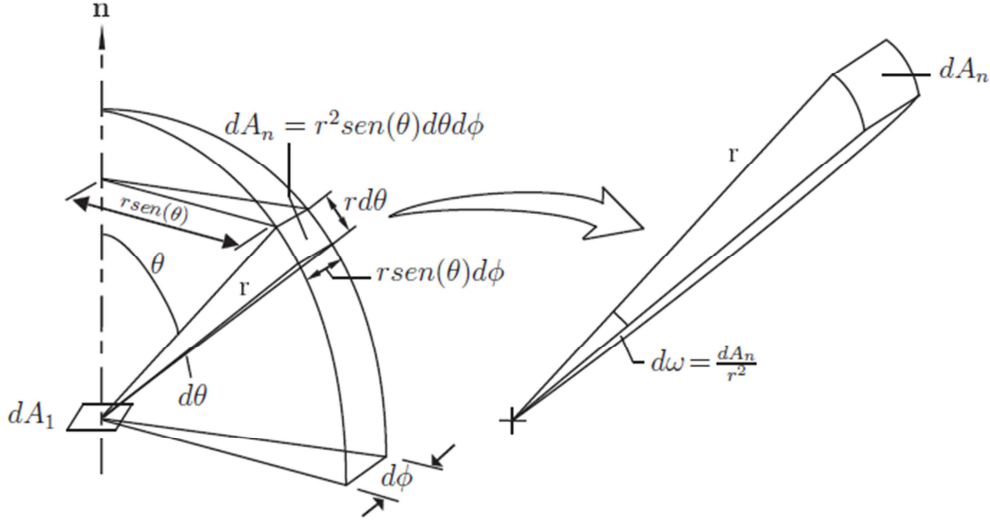


Figura 3 – Ângulo sólido entre dA_n e um ponto de dA_1 pelo sistema de coordenadas esféricas (Fonte: INCROPERA et al. (2007)).

Pode-se ver que a área infinitesimal dA_n pode ser dada pelo produto $r d\theta \cdot r \sin(\theta) d\phi$, portanto, $dA_n = r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$. Logo, o ângulo sólido $d\omega$ pode ser escrito como:

$$d\omega = \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (2)$$

Quando dA_1 é uma superfície opaca, isto é, sua radiação é emitida igualmente em todas as direções sobre um hemisfério hipotético, o ângulo sólido para este caso pode ser obtido através da integração da equação (2) nos limites $\phi = [0, 2\pi]$ e $\theta = [0, \frac{\pi}{2}]$. Assim, o ângulo sólido se dá por:

$$\int d\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta) d\theta d\phi = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta) d\theta = 2\pi \quad (3)$$

A abordagem hemisférica da radiação para descrever a emissão radioativa é clássica e será usada como padrão no presente trabalho.

3.3 EMISSÃO, IRRADIAÇÃO E RADIOSIDADE

Ao tratar de radiação térmica sobre uma superfície, três fenômenos fundamentais ocorrem. São eles: a Emissão, a Irradiação e a Radiosidade. A figura (4) ilustra os três fenômenos ocorrendo sobre uma superfície sob ação da radiação térmica. O entendimento de como se dá a relação entre os mesmos é de suma importância para a modelagem das interações térmicas

utilizadas por este trabalho, que será mostrada mais adiante. A seguir será definido cada um dos três fenômenos supracitados.

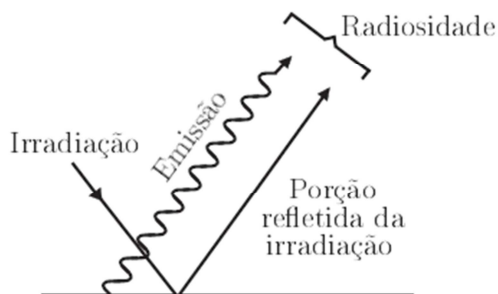


Figura 4 - Emissão, Irradiação e Radiosidade (Fonte: INCROPERA et al., 2007)

3.3.1 EMISSÃO

A emissão de radiação está associada à temperatura não nula de um corpo material, de forma que qualquer corpo que esteja a uma temperatura maior que zero Kelvin irá emitir certa quantidade de radiação. Apesar de a emissão ser comumente tratada como um fenômeno que acontece na superfície de um corpo, uma vez que, pelo princípio da conservação de energia, a emissão ocorre à custa de outras formas de energia, decorre que apenas partículas materiais de fato emitem radiação, sendo que volumes ou superfícies geométricas não realizam tal fenômeno (PLANCK, 1914).

Para se trabalhar adequadamente com a emissão é necessário quantificá-la, entrando em questão o conceito de intensidade de radiação. Imagine uma semiesfera centrada em um ponto de uma área diferencial dA_1 que emite radiação em certa direção (θ, Φ) , na qual há uma área normal dA_n , formando assim um ângulo sólido $d\omega$ (Figura 5). A quantidade de radiação que passa por dA_n pode ser expressa em termos da Intensidade espectral $I_{\lambda,e}$, definida como a taxa na qual a energia radiante é emitida, relativa a um comprimento de onda específico λ , na direção (θ, Φ) , por unidade de área da superfície emissora que é normal à direção de emissão ($dA_1 \cos(\theta)$), por unidade de ângulo sólido, por unidade do intervalo de comprimento de onda $d\lambda$ em torno de λ (INCROPERA et al., 2007).

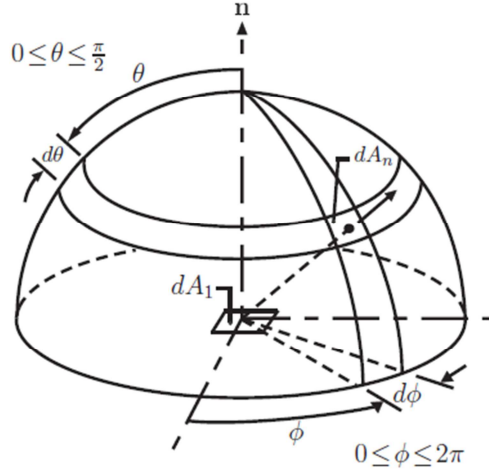


Figura 5 - Emissão para um hemisfério hipotético a partir de um ponto da área diferencial dA_1 . (Fonte: INCROPERA et al., 2007)

Portanto, a intensidade espectral, dada em $W/m^2 \cdot sr \cdot \mu m$ tem a seguinte expressão:

$$I_{\lambda,e} = \frac{dQ}{dA_1 \cos(\theta) \cdot d\omega \cdot d\lambda} \quad (4)$$

Rearranjando, e incluindo a equação (2):

$$dq_\lambda = \frac{dQ}{d\lambda dA_1} = I_{\lambda,e} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (5)$$

A equação acima representa o fluxo diferencial de radiação espectral e, uma vez conhecidas as distribuições espectral e direcional ($I_{\lambda,e}$), é possível calcular o fluxo de calor devido à emissão em qualquer ângulo sólido finito e em qualquer intervalo de comprimento de onda. Para fins de troca de calor, deve-se integrar a equação (5) em todas as direções.

Neste texto, uma das hipóteses adotadas é a de que as superfícies são difusas, isto é, a sua intensidade de emissão não depende da direção da mesma, assim, $I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \phi) = I_{\lambda,e}(\lambda)$. Imagine então que se deseja calcular o fluxo de calor em todas as direções para uma semiesfera, e em um comprimento de onda específico. Integrando então a equação (5) em todas as direções, temos o fluxo de calor espectral:

$$E_\lambda = q_\lambda = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_{\lambda,e}(\lambda) \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (6)$$

$$E_\lambda = \pi \cdot I_{\lambda,e}(\lambda) \quad (7)$$

Analogamente, o poder emissivo hemisférico, que seria o fluxo total em todas as direções e para todos os comprimentos de onda, é definido por:

$$E = \int_0^\infty E_\lambda d\lambda = \int_0^\infty \pi \cdot I_{\lambda,e}(\lambda) d\lambda = \pi \cdot I_e \quad (8)$$

Onde I_e representa a intensidade total de radiação emitida, dada pela integral de $I_{\lambda,e}(\lambda)$ em todos os comprimentos de onda.

3.3.2 IRRADIAÇÃO

A irradiação corresponde a toda parcela de radiação que incide em direção a uma superfície (Figura 6). Ela pode ser originada por uma emissão de outras superfícies ou ainda por reflexões, quando não por ambos ocorrendo ao mesmo tempo. Assim como na emissão, existirá uma distribuição espectral e direcional da intensidade de radiação incidente (Irradiação) sobre uma superfície, denotada por $I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \Phi)$. Analogamente à emissão, essa intensidade é definida como a taxa na qual a energia radiante de comprimento de onda λ incidente a partir de uma direção $((\theta, \Phi))$, por unidade de área normal da superfície em questão, por unidade de ângulo sólido, por unidade de intervalo de comprimento de onda em torno de λ .

Assim como na seção 3.3.1, pode-se calcular a taxa de radiação incidente, e integrando-o em todas as direções, supondo uma irradiação difusa, calcula-se o fluxo de irradiação ($G_\lambda (W/m^2 \cdot \mu m)$), conhecido por irradiação espectral. Assim:

$$G_\lambda = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_{\lambda,i}(\lambda) \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta d\Phi \quad (9)$$

$$G_\lambda = \pi \cdot I_{\lambda,i}(\lambda) \quad (10)$$

Integrando agora em todos os comprimentos de onda, determinamos a irradiação total, dada em W/m^2 :

$$G = \int_0^\infty G_\lambda d\lambda = \int_0^\infty \pi \cdot I_{\lambda,i}(\lambda) d\lambda = \pi \cdot I_i \quad (11)$$

Sendo I_i a irradiação total incidente, dada pela integral de $I_{\lambda,i}(\lambda)$ em todos os comprimentos de onda.

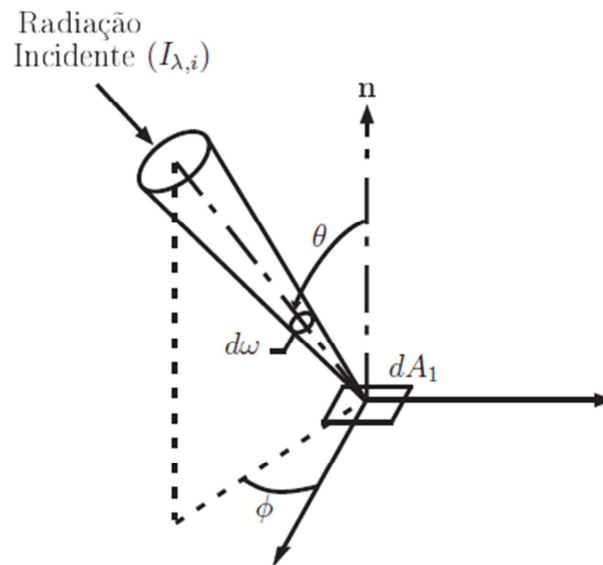


Figura 6 - Radiação incidente (Irradiação) sobre uma área dA_1 (Fonte: INCROPERA et al., 2007)

3.3.3 RADIOSIDADE

O ultimo conceito a ser definido é o conceito de Radiosidade. Através da figura 7 é possível perceber que a radiosidade representa a parcela de radiação que está deixando uma superfície. Em resumo, é a soma das parcelas de emissão e reflexão, sendo assim, faz sentido recorrer a uma intensidade que represente essa soma, denotada por $I_{\lambda,e+r}(\lambda, \theta, \Phi)$.



Figura 7 - Radiosidade (Fonte: INCROPERA et al., 2007)

De forma análoga aos outros dois casos, podemos calcular a radiosidade espectral integrando a intensidade em todas as direções. Considerando que a superfície emite e reflete difusamente:

$$J_{\lambda} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_{\lambda,e+r}(\lambda) \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta d\Phi \quad (12)$$

$$J_{\lambda} = \pi \cdot I_{\lambda,e+r}(\lambda) \quad (13)$$

Novamente, para calcular a radiosidade total, integramos em todos os comprimentos de onda, logo:

$$J = \int_0^{\infty} J_{\lambda} = \int_0^{\infty} \pi \cdot I_{\lambda,e+r}(\lambda) \cdot d\lambda = \pi \cdot I_{e+r} \quad (14)$$

Sendo I_{e+r} a intensidade total da radiosidade, dada pela integral de $I_{\lambda,e+r}(\lambda)$ em todos os comprimentos de onda.

Com esses três conceitos básicos da radiação, juntamente com as definições geométricas, é possível entender como se dão os fenômenos de superfície da radiação. Porém, toda a base de cálculo gira em torno da modelagem da distribuição espectral e direcional da intensidade, seja ela de emissão, irradiação ou radiosidade. Em superfícies reais, encontrar equações que descrevem o comportamento da radiação é, muitas vezes, inviável, sendo necessário introduzir um novo conceito, o conceito de corpo negro.

3.4 O CORPO NEGRO

Um corpo negro é um objeto idealizado cujo conceito foi criado com a intenção de facilitar o entendimento da radiação em relação à objetos reais. A ideia por trás do corpo negro é toma-lo como referência e definir as propriedades dos corpos reais com base no corpo negro, como a emissividade, a refletividade e a absorvidade, que serão vistas mais a frente. Todas elas são definidas tomando como base uma razão entre a radiação do corpo real (emitida, refletida ou absorvida) e a radiação que um corpo negro emitiria, refletiria ou absorveria nas mesmas condições. Um corpo negro permite que toda a radiação incidente penetre nele, e, além disso, toda a radiação é absorvida internamente, independentemente do comprimento de onda (SIEGEL; HOWELL. 2002). Podemos destacar três características principais que definem um corpo negro (INCROPERA et al., 2007):

- Um corpo negro absorve toda a radiação incidente, independente do comprimento de onda ou direção;
- Dados uma temperatura e um comprimento de onda, nenhuma superfície emite mais do que um corpo negro, portanto, ele é um emissor perfeito;
- Toda radiação emitida por um corpo negro é difusa, isto é, não depende da direção.

Através dessas características caracteriza-se o corpo negro como um referencial idealizado, de forma que, a partir dele, será medido o comportamento da radiação em superfícies reais. Os próximos tópicos abordam uma modelagem para a intensidade de radiação emitida por um corpo negro, fornecendo uma base para iniciar a abordagem às superfícies reais.

3.4.1 A LEI DE PLANCK

A equação que define a intensidade de emissão de um corpo negro não pode ser escrita em função de parâmetros termodinâmicos. A pesquisa sobre tal expressão levou Planck a buscar hipóteses que deram início à teoria quântica. Planck conseguiu demonstrar (PLANCK, 1901), sendo mais tarde verificado experimentalmente, que a intensidade espectral de emissão para um corpo negro, denotada por $I_{\lambda,b}$, é dada por:

$$I_{\lambda,b} = \frac{2hc_0^2}{\lambda^5 \left[\exp\left(\frac{hc_0}{\lambda kT}\right) - 1 \right]} \quad (15)$$

Sendo $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J.s}$ a constante de Planck, $k = 1,38065156 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ a constante de Boltzmann, $c_0 = 2,998 \times 10^8 \text{ m/s}$ a velocidade da luz no vácuo e T a temperatura absoluta do corpo negro, dada em Kelvin. Sendo o corpo negro um emissor difuso, podemos obter seu poder emissivo espectral através da integração da equação (5) em todas as direções, substituindo a intensidade espectral por (15).

$$E_{\lambda,b} = \pi I_{\lambda,b} = I_{\lambda,b} = \frac{2\pi hc_0^2}{\lambda^5 \left[\exp\left(\frac{hc_0}{\lambda kT}\right) - 1 \right]} \quad (16)$$

A equação (16) é conhecida como Distribuição espectral de Planck.

3.4.2 LEI DE STEFAN-BOLTZMANN

Após definir o poder emissivo espectral para corpos negros, é interessante determinar também seu poder emissivo hemisférico, que engloba a radiação em todos os comprimentos de onda. Ele pode ser obtido, como foi visto nas seções anteriores, a partir da integração do poder emissivo espectral em um intervalo de comprimento de onda $d\lambda$ entre os limites $[0, \infty]$. Portanto:

$$E_b = \int_0^{\infty} E_{\lambda,b} d\lambda = \pi \int_0^{\infty} I_{\lambda,b} d\lambda \quad (17)$$

$$E_b = \pi \int_0^{\infty} \frac{2hc_0^2}{\lambda^5 \left[\exp\left(\frac{hc_0}{\lambda kT}\right) - 1 \right]} d\lambda \quad (18)$$

Integrando a equação acima, obtêm-se:

$$E_b = \frac{2C_1 T^4 \pi^5}{15C_2^4} \quad (19)$$

Onde $C_1 = 2\pi h c_0^2$ e $C_2 = \frac{hc_0}{k}$. É possível reagrupar os termos da equação acima da seguinte forma:

$$E_b = \sigma T^4 \quad (20)$$

Em que $\sigma = \frac{2C_1 \pi^5}{15C_2^4} = 5,67051 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$ é denominada constante de Stefan-Boltzmann. Foi definido, portanto, o poder emissivo hemisférico para corpos negros (20), resultando na lei de Stefan-Boltzmann. Esse resultado será usado como referência para o tratamento de corpos reais.

4. RADIAÇÃO EM CORPOS REAIS

Definidos os conceitos relativos à radiação em corpos ideais (corpos negros), será estudado a partir de agora como ocorrem os fenômenos da radiação em corpos reais, sendo que o comportamento dos corpos negros será tido como base de comparação para mensurar os corpos reais.

Muitos fatores causam possíveis desvios entre o comportamento de corpos reais e corpos negros. Alguns deles são: composição, acabamento superficial, temperatura na qual o corpo se encontra, ângulo da radiação emitida ou interceptada, distribuição espectral da radiação incidente, entre outros. O presente trabalho focará na dependência espectral, direcional e de temperatura das três propriedades que serão definidas adiante: Emissividade, Absortividade e Refletividade. Uma quarta propriedade existente e denominada de Transmissividade será considerada sempre nula, uma vez que não interessa, neste trabalho, analisar o que acontece no interior das estruturas.

4.1 EMISSIVIDADE

Em termos leigos, a emissividade pode ser entendida como a fração da radiação emitida por um corpo negro, que é emitida por um corpo real à mesma temperatura. Em outras palavras, considerando dois corpos, um negro e um real, à mesma temperatura, a emissividade é definida como a razão entre a radiação emitida pelo corpo real e a radiação emitida pelo corpo negro, segundo a lei de Stefan-Boltzmann. Dessa forma, em termos algébricos:

$$\varepsilon = \frac{(Radiação\ emitida_{Real})}{(Radiação\ emitida_{C.Negro})} \quad (21)$$

Define-se então a emissividade direcional espectral como a razão entre a intensidade de radiação emitida na direção (θ, Φ) por um corpo real e por um corpo negro, ambos à mesma temperatura T e considerando um comprimento de onda específico λ . Obtém-se então:

$$\varepsilon_{\lambda,\theta}(\lambda, \theta, \Phi, T) = \frac{I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \Phi, T)}{I_{\lambda,b}(\lambda, T)} \quad (22)$$

Em muitos casos é interessante trabalhar com uma média que represente a emissividade em todas as direções. Retomando a ideia da intensidade de

radiação espectral emitida em todas as direções, temos a seguinte integral definindo o poder emissivo espectral:

$$E_{\lambda} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \Phi, T) \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta d\Phi \quad (23)$$

Reescrevendo em termos de ε temos:

$$E_{\lambda} = I_{\lambda,b}(\lambda, T) \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon_{\lambda,\theta}(\lambda, \theta, \Phi, T) \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta d\Phi \quad (24)$$

A relação entre a equação (24) e a equação (16) define a chamada emissividade espectral hemisférica:

$$\varepsilon_{\lambda}(\lambda, T) = \frac{E_{\lambda}(\lambda, T)}{E_{\lambda,b}(\lambda, T)} = I_{\lambda,b}(\lambda, T) \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon_{\lambda,\theta}(\lambda, \theta, \Phi, T) \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta d\Phi}{\pi I_{\lambda,b}(\lambda, T)} \quad (25)$$

$$\varepsilon_{\lambda}(\lambda, T) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon_{\lambda,\theta}(\lambda, \theta, \Phi, T) \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta d\Phi \quad (26)$$

E a partir disso, define-se a emissividade hemisférica total, sendo uma média sobre todas as direções e comprimentos de onda. Temos então:

$$\varepsilon(T) = \frac{E(T)}{E_b(T)} = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda}(\lambda, T) E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda}{\sigma T^4} \quad (27)$$

É fácil perceber que a emissividade representa de fato uma razão entre a radiação emitida por um corpo real e a emitida por um corpo negro. Sendo assim, como um corpo negro é, por definição, um emissor perfeito, a emissividade varia no intervalo $[0,1]$.

Em geral, quando se trata de problemas de radiação, é comum determinar a emissividade hemisférica total de um corpo real a partir de experimentos, e depois, através da lei de Stefan-Boltzmann, quantificar a troca de calor por radiação.

4.2 ABSORTIVIDADE

Considerando o princípio da conservação de energia, toda energia incidente sobre uma superfície ou é refletida ou absorvida pela mesma (considerando que nenhuma energia é transmitida). Analisando a parcela absorvida, a

absortividade mede a fração da energia incidente que é absorvida por uma superfície. Em uma representação algébrica, temos:

$$\alpha = \frac{(\text{irradiação absorvida})}{(\text{irradiação incidente})} \quad (28)$$

Analogamente à emissividade, podem-se definir as propriedades chamadas *absortividade direcional espectral* " $\alpha_{\lambda,\theta}$ ", a *absortividade hemisférica espectral* " α_{λ} " e a *absortividade hemisférica total* " α ".

A absortividade direcional espectral representa a fração da intensidade espectral que incide na direção (θ, Φ) e é absorvida pela superfície. Logo:

$$\alpha_{\lambda,\theta}(\lambda, \theta, \Phi) = \frac{I_{\lambda,i,abs}(\lambda, \theta, \Phi)}{I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \Phi)} \quad (29)$$

Assim como para a emissividade, é interessante tratar de grandezas médias, portanto, é comum integrar a equação acima em todas as direções e comprimentos de onda. Retomando o conceito de Irradiação, para a absortividade hemisférica espectral, integramos em todas as direções. Assim:

$$\alpha_{\lambda}(\lambda) = \frac{G_{\lambda,abs}(\lambda)}{G_{\lambda}(\lambda)} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha_{\lambda,\theta}(\lambda, \theta, \Phi) I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \Phi) \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta d\Phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \Phi) \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta d\Phi} \quad (30)$$

Por fim, considerando uma média em todas as direções e comprimentos de onda, obtemos a absortividade hemisférica total:

$$\alpha = \frac{G_{abs}}{G} = \frac{\int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha_{\lambda,\theta}(\lambda, \theta, \Phi) I_{\lambda,i}(\lambda) \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta d\Phi d\lambda}{\int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \Phi) \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta d\Phi d\lambda} \quad (31)$$

Assim é definida, portanto, a absortividade hemisférica total de uma superfície. A seguir será definida a última propriedade, a Refletividade.

4.3 REFLETIVIDADE

Será analisado agora o outro lado da conservação de energia, isto é, a parcela da radiação incidente que é refletida por uma superfície. A propriedade referente a essa reflexão é mais complicada de ser analisada do que as outras duas uma vez que a reflexão possui uma característica diferente em relação ao ângulo de reflexão, ou seja, dependendo de certas condições, como por

exemplo, o acabamento superficial, o ângulo de reflexão varia, podendo chegar ao máximo de se tornar um espelho perfeito, onde o ângulo de reflexão é igual ao de incidência. Para quaisquer efeitos, no presente trabalho, este caráter especular será negligenciado, uma vez que, para toda a modelagem, as superfícies serão consideradas como difusas, de forma que independentemente da incidência, a reflexão não dependerá do ângulo de reflexão.

Definindo de fato a refletividade, ela pode ser descrita como a propriedade que mede a fração da radiação incidente que é refletida por uma superfície, logo:

$$\rho = \frac{\text{Irradiação Incidente}}{\text{Irradiação Refletida}} \quad (32)$$

Assim como para as propriedades anteriores, define-se a *refletividade espectral direcional*, a *refletividade hemisférica espectral*, e a *refletividade hemisférica total*. A refletividade espectral direcional representa a fração da intensidade espectral incidente na direção (θ, Φ) que é refletida por uma superfície. Portanto:

$$\rho_{\lambda, \theta}(\lambda, \theta, \Phi) = \frac{I_{\lambda, i, ref}(\lambda, \theta, \Phi)}{I_{\lambda, i}(\lambda, \theta, \Phi)} \quad (33)$$

Analisando a intensidade em todas as direções, obtemos a refletividade hemisférica espectral, assim:

$$\rho_{\lambda}(\lambda) = \frac{G_{\lambda, ref}(\lambda)}{G_{\lambda}(\lambda)} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho_{\lambda, \theta}(\lambda, \theta, \Phi) I_{\lambda, i}(\lambda, \theta, \Phi) \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta d\Phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_{\lambda, i}(\lambda, \theta, \Phi) \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta d\Phi} \quad (34)$$

Considerando agora a intensidade também em todos os comprimentos de onda, definimos a refletividade hemisférica total:

$$\rho = \frac{G_{ref}}{G} = \frac{\int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho_{\lambda, \theta}(\lambda, \theta, \Phi) I_{\lambda, i}(\lambda) \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta d\Phi d\lambda}{\int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_{\lambda, i}(\lambda, \theta, \Phi) \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta d\Phi d\lambda} \quad (35)$$

Interessante destacar que a hipótese de reflexão difusa é extremamente razoável para a grande maioria dos fins de engenharia (INCROPERA et al. 2007).

4.4 RELAÇÃO ENTRE PROPRIEDADES

É possível relacionar as propriedades definidas para um corpo real através de equações algébricas. Para isso, considere uma superfície opaca, isto é, toda energia incidente ou é refletida ou absorvida, de forma que sua transmissividade seja nula. Através de um balanço de energia em sua superfície, é possível obter uma relação entre a refletividade e a absortividade. Para um dado comprimento de onda, temos que:

$$G_{\lambda} = G_{\lambda,ref} + G_{\lambda,abs} \quad (36)$$

Ou:

$$G_{\lambda} = \rho_{\lambda} G_{\lambda} + \alpha_{\lambda} G_{\lambda} \quad (37)$$

Portanto:

$$\rho_{\lambda} + \alpha_{\lambda} = 1 \quad (38)$$

Isso também é válido quando são consideradas as intensidades de todos os comprimentos de onda, de forma que:

$$\rho + \alpha = 1 \quad (39)$$

Temos então uma relação entre a absortividade e a refletividade. Na próxima seção, será abordada uma relação entre essas propriedades e a emissividade da superfície.

4.5 A LEI DE KIRCHHOFF

Através da lei de Kirchhoff é possível obter uma relação entre a absortividade e a emissividade de um corpo. Considerando um balanço de energia quando há equilíbrio termodinâmico em um confinamento, é possível mostrar que a emissividade direcional espectral é igual à absortividade direcional espectral, isto é:

$$\varepsilon_{\lambda,\theta} = \alpha_{\lambda,\theta} \quad (40)$$

Isso ocorre pelo fato de ε e α serem inerentes à superfície, isto é, não dependem das distribuições espectrais e direcionais das radiações incidentes ou emitidas (INCROPERA et al., 2007).

A relação anterior, conhecida como lei de Kirchhoff, também pode ser usada em outras relações entre absorvidade e emissividade, porém, é necessário atender a alguns requisitos para poder usá-la em outros casos.

Abaixo segue uma tabela que lista esses requisitos

Tabela 1- Condições para Emissividade e Absortividade

Relação entre α e ε	Requisitos
I) $\varepsilon_{\lambda,\theta} = \alpha_{\lambda,\theta}$	Nenhum (vale em todos os casos)
II) $\varepsilon_{\lambda} = \alpha_{\lambda}$	Radiação incidente tem intensidade uniforme em todas as direções, ou $\varepsilon_{\lambda,\theta}$ e $\alpha_{\lambda,\theta}$ não dependem do ângulo.
III) $\varepsilon_{\theta} = \alpha_{\theta}$	Radiação incidente tem distribuição espectral proporcional à de um corpo negro à mesma temperatura, ou $\varepsilon_{\lambda,\theta}$ e $\alpha_{\lambda,\theta}$ não dependem do comprimento de onda
IV) $\varepsilon = \alpha$	Pelo menos um requisito de cada relação acima

Assumindo a quarta relação como verdadeira e retomando a equação (39), podemos dizer que:

$$\rho + \alpha = 1 \rightarrow \rho = 1 - \varepsilon \quad (41)$$

Essa simplificação será muito importante mais adiante no trabalho, quando for desenvolvida a metodologia de cálculo.

Retomando o conceito da Radiosidade, em corpos reais, sendo ela a soma das parcelas refletida e emitida, podemos escrevê-la para corpos reais da seguinte forma:

$$J = G_{ref} + E = \rho G + \varepsilon \sigma T^4 = (1 - \varepsilon)G + \varepsilon \sigma T^4$$

4.6 SUPERFÍCIES CINZA DIFUSA E OPACA

Por fim, terminamos este capítulo definindo quais hipóteses serão adotadas neste trabalho. Para quaisquer superfícies analisadas neste texto, serão consideradas que as mesmas são Cinzas, Difusas e Opacas. Uma superfície cinza é aquela na qual a absorvidade e a emissividade são independentes do

comprimento de onda considerando todo o espectro da radiação. Uma superfície difusa é aquela cuja absortividade e emissividade não dependem da direção. Finalizando, uma superfície opaca é aquela que não transmite energia através dela, ou seja, sua transmissividade é nula ($\tau = 0$). Em todo o trabalho, essas três hipóteses simplificadoras serão consideradas verdadeiras.

5. TROCA DE CALOR RADIANTE ENTRE SUPERFÍCIES

Até aqui, a análise da troca de calor por radiação tomou foco em situações onde somente uma superfície era considerada. A partir de agora, serão abordados problemas nos quais, para se obter a solução, deve-se resolver um sistema de equações uma vez que se trata de um problema com duas ou mais superfícies trocando calor por radiação simultaneamente. Por hipótese, será considerado que as superfícies estão separadas por um vácuo perfeito, isto é, não há trocas de calor por condução ou convecção, nem gradiente de temperatura entre as superfícies. A análise agora passará para um novo nível de complexidade, uma vez que a geometria das superfícies e o modo como elas estão posicionadas, umas em relação às outras, interfere fortemente na solução do problema. Essa questão geométrica traz à tona o conceito de um novo parâmetro, o Fator de Forma.

5.1 FATORES DE FORMA

Como mencionado anteriormente, o fator de forma é um fator de correção da radiação que uma superfície intercepta em relação à quantidade de radiação que foi emitida por outra superfície. Em outras palavras, imagine que a superfície A emita certa quantidade de radiação, e que outra superfície B esteja posicionada de modo que uma parte dessa radiação é interceptada por ela. Podemos definir o fator de forma como a razão entre a radiação interceptada por B e a radiação total emitida por A. Assim, colocando em uma representação algébrica:

$$F_{AB} = \frac{\text{Radiação que intercepta B partindo de A}}{\text{Radiação total emitida por A}} \quad (42)$$

Vamos agora desenvolver uma expressão geral para o fator de forma. Considere duas superfícies A_i e A_j orientadas arbitrariamente e que se encontram respectivamente às temperaturas T_i e T_j , como mostra a figura 8.

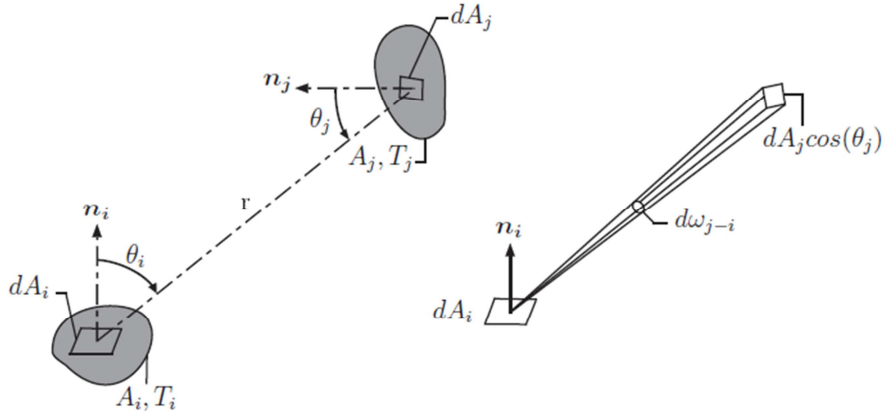


Figura 8 – Fatores de forma entre as superfícies diferenciais dA_i e dA_j (Fonte: INCROPERA et al., 2007)

Através da equação (4), é possível quantificar a radiação infinitesimal que sai da superfície dA_i e intercepta a superfície dA_j . Sendo ela então dada por:

$$dQ_{i \rightarrow j} = I_{e+r,i} \cos \theta_i dA_i d\omega_{j-i} \quad (43)$$

Onde $I_{e+r,i}$ é a radiação emitida e refletida por i que intercepta j e $d\omega_{j-i}$ é o ângulo sólido subentendido por dA_j quando visto por dA_i .

A partir da definição de ângulo sólido, é possível reescrever a equação (43) da seguinte forma:

$$dQ_{i \rightarrow j} = \frac{I_{e+r,i} \cos \theta_i \cos \theta_j dA_i dA_j}{r_{ij}^2} \quad (44)$$

Supondo que a reflexão em i seja difusa, podemos escrevê-la em termos da radiosidade, assim:

$$dQ_{i \rightarrow j} = J_i \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j dA_i dA_j}{\pi r_{ij}^2} \quad (45)$$

E assim, integrando nas duas áreas para se obter a taxa total de radiação interceptada por j , temos:

$$Q_{i \rightarrow j} = J_i \int_{A_j} \int_{A_i} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi r_{ij}^2} dA_i dA_j \quad (46)$$

Partindo agora da definição do fator de forma:

$$F_{ij} = \frac{Q_{i \rightarrow j}}{A_i J_i} \quad (47)$$

Substituindo (46) em (47), têm-se:

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{A_j} \int_{A_i} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi r_{ij}^2} dA_i dA_j \quad (48)$$

A equação acima é válida para quaisquer superfícies, dispostas uma em relação à outra de forma arbitrária. Percebe-se que as integrais são realizadas ao longo de toda uma área. Computacionalmente, resolvê-las é um tanto quanto complexo, tornando sua solução em alguns casos demasiadamente demorada. Como alternativa para diminuir o esforço computacional, será mostrada outra forma de escrever a equação acima.

5.2 FATORES DE FORMA COMO INTEGRAL DE CONTORNO

Como mencionado anteriormente, é interessante reduzir o esforço computacional relativo à solução da integral do fator de forma. Uma alternativa para solucionar esse problema é aplicar o teorema de Stokes na equação acima, o que permite reduzir a integral dupla de área para uma integral dupla sobre os contornos das áreas, simplificando sua solução. Logo:

$$F_{ij} = \frac{1}{2\pi A_i} \int_{C_i} \int_{C_j} [\ln(r_{ij}) dx_i dx_j + \ln(r_{ij}) dy_i dy_j + \ln(r_{ij}) dz_i dz_j] \quad (49)$$

Onde C_i e C_j são os contornos sobre as áreas A_i e A_j , respectivamente.

É possível encontrar alguns fatores de forma para configurações padronizadas na literatura, isso pode facilitar a solução do problema, uma vez que já existem equações que fornecem os valores dos fatores de forma em cada caso, evitando assim a resolução da integral. A equação (49) pode ser usada para toda superfície que seja emissora e refletora difusa, além de possuir radiosidade uniforme.

A seguir, serão discutidas algumas relações algébricas existentes entre os fatores de forma.

5.3 RELAÇÕES ALGÉBRICAS ENTRE OS FATORES DE FORMA

A primeira relação que pode ser observada é obtida diretamente da manipulação da equação (49) e é chamada de relação de reciprocidade, sendo muito utilizada em casos em que se deseja saber um fator de forma conhecendo outro. É definida da seguinte forma:

$$F_{ij}A_i = F_{ji}A_j \quad (50)$$

Outra relação amplamente utilizada vem de um balanço de energia realizado em superfícies que formam um confinamento, como mostra a figura a seguir.

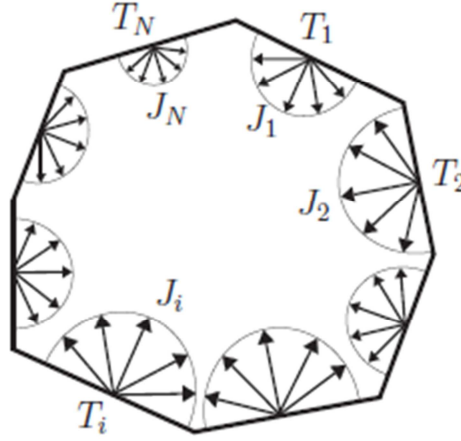


Figura 9 – Confinamento formado por N superfícies. (Fonte: INCROPERA et al., 2007)

Considerando um confinamento formado por N superfícies, toda energia que deixa uma superfície i deve encontrar outra superfície do confinamento, assim, podemos dizer que:

$$A_i J_i = Q_{i \rightarrow 1} + Q_{i \rightarrow 2} + Q_{i \rightarrow 3} + \dots + Q_{i \rightarrow i} + \dots + Q_{i \rightarrow N} \quad (51)$$

Substituindo a equação (47) em (51), temos:

$$A_i J_i = A_i J_i F_{i1} + A_i J_i F_{i2} + A_i J_i F_{i3} + \dots + A_i J_i F_{ii} + \dots + A_i J_i F_{iN} \quad (52)$$

Reescrevendo a equação:

$$1 = F_{i1} + F_{i2} + F_{i3} + \dots + F_{ii} + \dots + F_{iN} = \sum_{j=1}^N F_{ij} \quad (53)$$

Percebe-se então que a soma de todos os fatores de forma referentes à uma superfície é sempre igual a 1. O termo F_{ii} se refere à energia que sai de uma superfície e intercepta ela mesma. Em geral, com exceção das superfícies côncavas, seu valor é sempre nulo. Para problemas que envolvem confinamentos, uma boa forma de conferir se os fatores calculados estão certos é soma-los um a um. Se a soma der igual a um é um indicativo de que a soma deve estar certa.

Outra propriedade interessante é a característica aditiva dos fatores de forma, isto é, imagine uma superfície $A_{(j)}$, subdividida em N pedaços, e que recebe radiação emitida por A_i , como mostra a figura 10. Os parênteses indicam que a superfície j é composta por N pedaços.

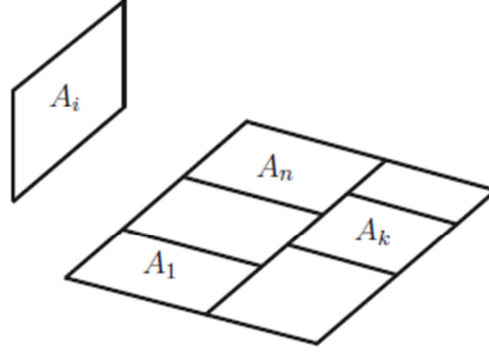


Figura 10 – Superfície única (A_i) e superfície composta (A_j) formada por n superfícies. (Fonte: INCROPERA et al., 2007)

O fator de forma da superfície (j) é dado por:

$$F_{i(j)} = \frac{Q_{i \rightarrow (j)}}{A_i J_i} = \frac{Q_{i \rightarrow 1}}{A_i J_i} + \frac{Q_{i \rightarrow 2}}{A_i J_i} + \dots + \frac{Q_{i \rightarrow k}}{A_i J_i} + \dots + \frac{Q_{i \rightarrow N}}{A_i J_i} \quad (54)$$

Porém, os termos à direita da equação se referem aos fatores de forma de cada pedaço de (j) individualmente, assim:

$$F_{i(j)} = F_{i1} + F_{i2} + \dots + F_{ik} + \dots + F_{iN} = \sum_{k=1}^N F_{ik} \quad (55)$$

Imaginando agora a situação na qual a superfície subdividida é a irradiadora, através de uma manipulação da equação anterior, multiplicando por A_i em ambos os lados e aplicando a relação da reciprocidade, chegamos a:

$$A_{(j)} F_{(j)i} = \sum_{k=1}^N A_k F_{ki} \quad (56)$$

Ou ainda

$$F_{(j)i} \sum_{k=1}^N A_k = \sum_{k=1}^N A_k F_{ki} \quad (57)$$

Ao resolver-se um problema de confinamentos entre N superfícies, é fácil perceber que são necessários N^2 fatores de forma, uma vez que cada

superfície possui N fatores, incluindo o fator dela em relação a ela mesma, o qual geralmente tem valor nulo. Uma visão mais adequada é na forma de matriz:

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1N} \\ F_{21} & F_{22} & \cdots & F_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{N1} & F_{N2} & \cdots & F_{NN} \end{bmatrix}$$

Porém, não é necessário determinar todos os N^2 fatores. A partir das relações do somatório e da reciprocidade, é possível reduzir o número mínimo de fatores necessários para se resolver o problema. É possível mostrar que, a partir dessas relações o número mínimo de fatores que se necessita é:

$$N_{\min} = \frac{N(N-1)}{2} \quad (58)$$

A equação acima somente é válida para casos onde todas as superfícies podem se “ver” mutuamente.

5.4 TROCA DE CALOR ENTRE SUPERFÍCIES EM CONFINAMENTOS

Em muitas aplicações da engenharia, é possível encontrar situações onde o estudo da troca de calor por radiação em ambientes confinados é importante. Um caso típico é o projeto de fornos. Um exemplo de ambiente confinado é mostrado na figura 11.

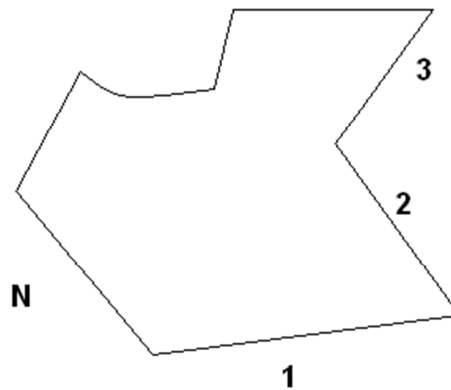


Figura 11 – Confinamento formado por N superfícies.

Apesar de existirem várias abordagens para este tipo de problema, neste trabalho será adotado o método chamado **Net-Radiation Method**. Toda a

modelagem é feita sob as hipóteses de que as superfícies são *cinzas, opacas, difusas, possuem temperatura, radiosidade e irradiação uniformes* e o meio entre as superfícies não absorve nem emite energia, ou seja, é transparente.

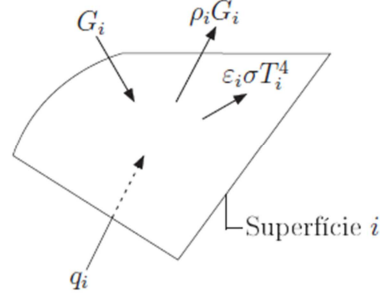


Figura 12 – Balanço de energia em uma superfície i (Fonte: SIEGEL; HOWELL, 2002).

Considere uma superfície i qualquer. Existem quatro tipos de fluxos relacionados a ela, como ilustra a figura 12. São eles a Irradiação, a emissão, a reflexão e o fluxo líquido, resultado do balanço de energia realizado na superfície. A partir do **Net-Radiation Method**, se consegue determinar três grandezas, sendo elas a temperatura da superfície, o fluxo líquido de calor e a radiosidade em cada superfície. O método consiste em determinar primeiramente as radiosidades de cada superfície para, só então, determinar as temperaturas e fluxos. A partir dos conceitos teóricos discutidos até então e do balanço de energia realizado em uma superfície, como mostra a figura 12, é possível obter duas relações básicas:

$$q_i = J_i - G_i \quad (59)$$

$$J_i = \rho_i G_i + \epsilon_i \sigma T_i^4 = (1 - \epsilon_i) G_i + \epsilon_i \sigma T_i^4 \quad (60)$$

Por fim, obtém-se uma terceira relação a partir da Irradiação. Considerando que a irradiação de uma superfície i pode ser entendida, em um confinamento, como a radiação recebida por i proveniente de todas as outras superfícies, então, podemos escrever o seguinte:

$$A_i G_i = A_1 F_{1i} J_1 + A_2 F_{2i} J_2 + \dots + A_N F_{Ni} J_N \quad (61)$$

Que pela relação da reciprocidade pode ser reescrita como:

$$A_i G_i = A_i F_{i1} J_1 + A_i F_{i2} J_2 + \dots + A_i F_{iN} J_N \quad (62)$$

E, portanto:

$$G_i = \sum_{j=1}^N F_{ij} J_j \quad (63)$$

A partir das equações obtidas, isolando-se a irradiação nas equações (60) e (63) e a substituindo as mesmas na equação (59), obtemos duas relações para o valor do fluxo líquido:

$$\left\{ \begin{aligned} q_i &= \frac{\varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i} (\sigma T_i^4 - J_i) \end{aligned} \right. \quad (64)$$

$$\left\{ \begin{aligned} q_i &= J_i - \sum_{j=1}^N F_{ij} J_j = \sum_{j=1}^N F_{ij} (J_i - J_j) \end{aligned} \right. \quad (65)$$

O último passo consiste em isolar a radiosidade na equação (64).

$$J_i = \sigma T_i^4 - q_i \frac{\varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i} \quad (66)$$

Assim, Substituindo a Radiosidade obtida em (66) na equação (65), é possível obter a seguinte expressão para a superfície i :

$$\sum_{j=1}^N \left[\frac{\delta_{ij}}{\varepsilon_j} - \frac{F_{ij}(1 - \varepsilon_j)}{\varepsilon_j} \right] q_j = \sum_{j=1}^N (\delta_{ij} - F_{ij}) \sigma T_j^4 = \sum_{j=1}^N F_{ij} \sigma (T_i^4 - T_j^4) \quad (67)$$

Na qual δ_{ij} é o delta de Kronecker, definido da seguinte forma:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \forall i = j \\ 0, \forall i \neq j \end{cases} \quad (68)$$

A partir da expressão (67) é possível perceber que quando as temperaturas das superfícies analisadas forem conhecidas, o lado direito da mesma será conhecido e haverá N equações para os valores dos N fluxos desconhecidos. No caso mais complexo possível desta análise, ocorrerá que algumas temperaturas são conhecidas e que alguns fluxos são impostos como condições de contorno, assim, a relação (67) indicará as N relações necessárias para resolver o problema. Isto encerra a Formulação teórica para a análise do fator de forma. No próximo capítulo será discutida a formulação numérica utilizada para determinar os fatores de forma das superfícies.

6. FORMULAÇÃO NUMÉRICA PARA O FATOR DE FORMA

Como foi visto anteriormente, quando se trata de configurações mais simples e usuais, é possível encontrar na literatura tabelas ou até mesmo equações que fornecem os valores dos fatores de forma entre superfícies para diferentes configurações geométricas. Porém, quando analisamos superfícies mais complexas ou até mesmo configurações de superfícies simples que não são utilizadas com muita frequência, é necessário lançar mão das equações dispostas nos capítulos acima para determinar os valores dos fatores de forma entre as superfícies em análise. Muitas vezes, dependendo da configuração, geometria ou até mesmo número de superfícies que se deseja avaliar, a determinação desse valor analiticamente se torna algo inviável. Sendo assim, entram em cena os métodos numéricos para resolver tal problema. Apesar de se encontrar na literatura diferentes métodos para a determinação do Fator de forma, entre eles podemos citar o Método de Nusselt e o Método Aleatório de Monte Carlo, o método utilizado neste trabalho foi o Método dos Elementos Finitos (MEF) através da quadratura de Gauss, sendo ela aplicada à integral de contorno que define o fator de forma entre duas superfícies. A razão por escolher a integral de contorno em oposição à de área é o fato da integral no contorno ser computacionalmente menos exigente em termos de operações a serem realizadas. Para a integral de área são necessárias $114n^4 + 86n^2$ operações enquanto que na de contorno se necessitam de apenas $446n^2 + 24n$ (SHAPIRO, 1985) operações, sendo " n " o número de segmentos que cada contorno das superfícies foi dividido. Logo, foi utilizada a integral de contorno.

6.1 MEF APLICADO AO FATOR DE FORMA

Será discutido agora como se dá a aplicação da quadratura de Gauss à integral de contorno do Fator de Forma. Como foi visto, temos a seguinte equação geral para o cálculo:

$$F_{ij} = \frac{1}{2\pi A_i} \int_{C_i} \int_{C_j} [\ln(r_{ij}) ds_i ds_j] \quad (69)$$

Onde ds_i e ds_j são os vetores da parametrização do contorno.

Aplicando a quadratura de Gauss à equação (70), obtemos:

$$\Delta F_{ij} = \sum_{i_2=1}^{nci} \sum_{i_3=1}^{npg} W_{i3} J_{i2} \sum_{j_2=1}^{ncj} \sum_{j_3=1}^{npg} W_{j3} J_{j2} \ln(r_{p_i, p_j}) \overrightarrow{s_{i2}} \cdot \overrightarrow{s_{j2}} \quad (70)$$

Onde i_2, j_2 representam os contornos a serem analisados nos elementos i, j respectivamente, sendo nci, ncj o número de contornos de cada elemento. i_3, j_3 São os pontos de Gauss de cada contorno i e j . A distância r_{p_i, p_j} é a distância entre os pontos de Gauss analisados e $\overrightarrow{s_{i2}}, \overrightarrow{s_{j2}}$ são os vetores unitários da parametrização dos contornos. Seguindo o teorema de Stokes, a parametrização usual segue o sentido anti-horário. Diante disso, existem 3 cenários possíveis, nos quais ou ambas as superfícies possuem parametrização anti-horária, ou ambas seguem o sentido horário, ou uma segue o horário e a outra o sentido anti-horário. Para os dois primeiros casos ocorre que o valor retornado pela integral será um valor positivo e para o terceiro caso será um valor negativo. Isso pode ser facilmente resolvido apenas pegando o valor absoluto da fórmula (MAZUMDER et al., 2012), sem se preocupar de fato com a parametrização. J_{i2}, J_{j2} São os jacobianos de cada contorno. Como foi utilizado um mapeamento linear das coordenadas locais, os Jacobianos valem a metade do comprimento da linha no qual o contorno se encontra. W_{i3} e W_{j3} São os pesos de Gauss para cada ponto utilizado.

Para este trabalho, foram utilizadas funções peso de Gauss lineares, isto é, em cada contorno foram usados dois pontos de Gauss.

Segue uma ilustração sobre como deve ser feito o cálculo do fator de forma entre dois elementos a partir da quadratura.

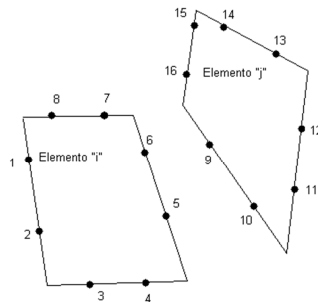


Figura 13 – Ilustração dos pontos de Gauss dispostos em duas superfícies para o cálculo do fator de forma.

Imagine que se deseja calcular o fator de forma entre os dois mostrados na figura 13. Ocorre que cada ponto de Gauss do elemento i sofre influência de cada um dos oito pontos da superfície j . Não é difícil perceber, portanto, que sendo n pontos de Gauss em cada superfície, existem n^2 somas a serem feitas (neste caso 64 somas) para se determinar o fator de forma em um único elemento. Assim sendo, podemos dizer que:

$$\Delta F_{ij} = \Delta F_{ij}^{1,j} + \Delta F_{ij}^{2,j} + \Delta F_{ij}^{3,j} + \dots + \Delta F_{ij}^{8,j} \quad (71)$$

Como cada ponto de i se relaciona com todos os pontos de j , temos:

$$\begin{aligned} \Delta F_{ij} = & (\Delta F_{ij}^{1,9} + \Delta F_{ij}^{1,10} + \dots + \Delta F_{ij}^{1,16}) + (\Delta F_{ij}^{2,9} + \Delta F_{ij}^{2,10} + \dots + \Delta F_{ij}^{2,16}) \\ & + \dots + (\Delta F_{ij}^{8,9} + \Delta F_{ij}^{8,10} + \dots + \Delta F_{ij}^{8,16}) \end{aligned} \quad (72)$$

Onde $\Delta F_{ij}^{i3,j3}$ é a contribuição dos nós $i3, j3$ para ΔF_{ij} , e ΔF_{ij} é a contribuição do Fator de forma do elemento i em relação ao elemento j para o fator de forma total da superfície na qual se encontram. Ao final de tudo deve se somar todas as contribuições de cada elemento de uma superfície k em relação à uma superfície h para determinar a contribuição total. Assim:

$$F_{kh} = \frac{1}{2\pi A_k} \sum_{i=1}^{nel_k} \sum_{j=1}^{nel_h} \Delta F_{ij} \quad (73)$$

De forma geral, se desejamos calcular o fator de forma da superfície k em relação à superfície h , que contem respectivamente nel_k e nel_h elementos, sendo cada elemento dividido respectivamente em nci e ncj contornos, com npg pontos de Gauss cada, podemos dizer que:

$$F_{kh} = \frac{1}{2\pi A_k} \sum_{i=1}^{nel_k} \sum_{j=1}^{nel_h} \sum_{i_2=1}^{nci} \sum_{i_3=1}^{npg} W_{i3} J_{i2} \sum_{j_2=1}^{ncj} \sum_{j_3=1}^{npg} W_{j3} J_{j2} \ln(r_{p_i, p_j}) \vec{s}_{i2} \cdot \vec{s}_{j2} \quad (74)$$

Pode-se fazer também

$$F_{kh} = \frac{1}{2\pi A_k} \sum_{i=1}^{nel_k} \sum_{j=1}^{nel_h} \sum_{i_2=1}^{nci} \sum_{i_3=1}^{npg} \sum_{j_2=1}^{ncj} \sum_{j_3=1}^{npg} W_{i3} J_{i2} W_{j3} J_{j2} \ln(r_{p_i, p_j}) \vec{s}_{i2} \cdot \vec{s}_{j2} \quad (75)$$

Portanto, se são analisadas N superfícies, essa formulação dará origem à uma matriz de fatores de forma da ordem $N \times N$, como descrito anteriormente, da seguinte forma:

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1N} \\ F_{21} & F_{22} & \cdots & F_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{N1} & F_{N2} & \cdots & F_{NN} \end{bmatrix}$$

É fácil perceber que a equação (75) possui um inconveniente. Quando há superfícies com bordas intersectantes, haverá pontos que coincidem, tornando o valor da distância nulo, fazendo com que o logaritmo neperiano não esteja definido. Para contornar esse problema, algumas literaturas trazem outra formulação a ser usada nestes casos (AMIRAJAN et al., 1993). No entanto, tal formulação apresentada possui uma implementação complicada devido às considerações para aplica-la não estarem bem definidas. Para resolver estes casos de uma forma simplificada, foi considerado que a distância entre os pontos de Gauss é a distância calculada, somada a uma pequena distância, com o intuito de evitar o logaritmo de zero. Assim:

$$r = r_{calculado} + \Delta r \quad (76)$$

É fato que ao fazer isso se introduz certo erro no cálculo do fator de forma, porém, ao se refinar a malha, esse erro diminui e o valor converge para o valor correto. Deve-se ajustar Δr para garantir a convergência do fator de forma em um tempo hábil. Um valor demasiadamente pequeno de Δr provocará uma malha necessária para a convergência grande, causando o crescimento do esforço computacional e consequentemente do tempo de processamento. Por outro lado, valores muito grandes de Δr provocam a divergência dos valores dos fatores de forma.

Uma vez descrita a formulação numérica para o fator de forma descrito pela integral de contorno, discutir-se-á agora o cálculo das incógnitas de cada superfície, radiosidades, temperaturas e fluxos.

6.2 CÁLCULO DAS RADIOSIDADES, TEMPERATURAS E FLUXOS

A formulação mais comum para determinar as incógnitas deste tipo de problema, uma vez que os fatores de forma são dados matricialmente, é, logicamente, a forma matricial, seguindo as mesmas equações apresentadas na seção 5.4. Como primeiro procedimento, deve-se calcular a radiosidade em cada superfície. Isso pode ser feito quando as equações (59) e (60) são escritas da seguinte maneira:

$$q_i = J_i - G_i \quad (77)$$

$$J_i - (1 - \varepsilon_i)G_i = \varepsilon_i \sigma T_i^4 \quad (78)$$

Sendo a equação 77 usada quando o fluxo da superfície é conhecido e a equação 78 quando é conhecida a temperatura. Juntamente com a seguinte relação para a Irradiação:

$$G_i = \sum_{j=1}^N F_{ij} J_j \quad (79)$$

Substituindo a equação (79) em (77) e (78):

$$q_i = J_i - \sum_{j=1}^N F_{ij} J_j \quad (80)$$

$$J_i - (1 - \varepsilon_i) \sum_{j=1}^N F_{ij} J_j = \varepsilon_i \sigma T_i^4 \quad (81)$$

Os somatórios das equações (80) e (81) podem ser escritos matricialmente como segue:

$$\overline{\overline{K_R}} \bar{J} = \bar{E} \quad (82)$$

Onde $\mathbf{K_R}$ é a matriz de rigidez do problema, $\mathbf{J}$ o vetor que contém as radiosidades e $\mathbf{E}$ o vetor de emissões. E vale o seguinte:

Para superfícies com temperatura prescrita:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{Rij} = \delta_{ij} - (1 - \varepsilon_i)F_{ij} \end{array} \right. \quad (83)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_i = \varepsilon_i \sigma T_i^4 \end{array} \right. \quad (84)$$

Para fluxo de calor prescrito:

$$\begin{cases} K_{Rij} = \delta_{ij} - F_{ij} \\ E_i = q_i \end{cases} \quad (85)$$

$$(86)$$

Lembrando que δ é o delta de Kronecker e F_{ij} é o fator de forma da superfície i em relação à superfície j . Através este equacionamento é possível determinar a radiosidade de cada superfície.

Em posse das radiosidades, determinam-se as Irradiações da seguinte forma:

$$\bar{G} = \bar{F}\bar{J} \quad (87)$$

Sendo $\bar{G}$ o vetor com as irradiações e $\bar{F}$ a matriz dos fatores de forma.

Finalmente, com os valores das radiosidades e das irradiações, parte-se para o cálculo das temperaturas e fluxos. Primeiramente, são determinados os fluxos líquidos realizando um balanço de energia em cada superfície. Podemos escrever os fluxos na forma matricial da seguinte maneira:

$$\bar{q} = \bar{J} - \bar{G} \quad (88)$$

E por fim, são determinadas as temperaturas substituindo a equação que define a radiosidade na equação acima:

$$\bar{J} = (\bar{I} - \text{diag}(\bar{\epsilon}))\bar{G} + \text{diag}(\bar{\epsilon})\sigma\bar{T}^4 \quad (89)$$

Onde $\bar{I}$ é a matriz identidade de ordem igual ao número de superfícies e $\text{diag}(\bar{\epsilon})$ é a matriz diagonal com os valores das emissividades de cada superfície. Substituindo (89) em (88) chegamos a:

$$\bar{q} = [(\bar{I} - \text{diag}(\bar{\epsilon}))\bar{G} + \text{diag}(\bar{\epsilon})\sigma\bar{T}^4] - \bar{I}\bar{G} = \text{diag}(\bar{\epsilon})\sigma\bar{T}^4 - \text{diag}(\bar{\epsilon})\bar{G} \quad (90)$$

Finalmente, isolando a temperatura, ficamos com:

$$\bar{T} = \left[\text{diag}(\bar{\epsilon})^{-1} \left(\frac{\bar{q} + \text{diag}(\bar{\epsilon})\bar{G}}{\sigma} \right) \right]^{\frac{1}{4}} \quad (91)$$

Essa formulação foi feita com a hipótese de que a única fonte de irradiação no confinamento são as superfícies do próprio confinamento, entretanto, há casos nos quais existem outras fontes de irradiação, ex: lareiras e fogões. Para esses

casos a formulação é parecida e necessita somente de algumas modificações, que serão mostradas a seguir.

Suponha que haja um confinamento formado N superfícies e que em cada superfície haja uma irradiação além das radiosidades das demais superfícies. O vetor das Irradiações extras em cada superfície, supondo que as mesmas sejam constantes, é denominado por $\bar{G}_{cte}$. Para aplicar a formulação mostrada acima, apenas duas correções são necessárias. No cálculo das radiosidades deve-se corrigir o vetor das emissões e também se deve corrigir o vetor das Irradiações. Isso é feito da seguinte forma:

Para superfícies com temperatura prescrita:

$$E_i = \varepsilon_i \sigma T_i^4 + (1 - \varepsilon_i) G_{cte_i} \quad (92)$$

Para fluxo de calor prescrito:

$$E_i = q_i + G_{cte_i} \quad (93)$$

Para as Irradiações:

$$\bar{G} = \bar{F}\bar{J} + \bar{G}_{cte} \quad (94)$$

Dessa forma, corrigimos a formulação para quando há outra fonte de Irradiação. O cálculo das temperaturas e fluxos permanece da mesma maneira. Encerra-se aqui a formulação numérica para o cálculo dos fatores de forma, radiosidades, temperaturas e fluxos. Será mostrada agora, a título de validação, uma comparação entre um problema de confinamento determinado analiticamente e o mesmo problema resolvido pela formulação mostrada nessa seção.

7. VALIDAÇÃO NUMÉRICA

A fim de mostrar a validade da formulação utilizada neste trabalho, dois exemplos foram utilizados para comparar as respostas obtidas numericamente com as respostas analíticas do problema.

7.1 PRIMEIRA VALIDAÇÃO

O primeiro problema trata de um confinamento cúbico de dimensões ($L \times L \times L$). As paredes são feitas do mesmo material, tendo emissividade $\varepsilon = 0.5$ e todas estão mantidas à mesma temperatura ($T = 900K$). Para estas condições os valores esperados para os fluxos são nulos e as radiosidades de cada parede devem ter o mesmo valor ($J = 37203,5 W/m^2$), obtidos analiticamente. Os testes numéricos foram realizados para 9, 49 e 121 elementos por superfície. Primeiramente, serão dispostos os resultados obtidos para os fatores de forma a fim de demonstrar a convergência dos valores encontrados numericamente em relação aos valores esperados (analíticos).

$$F_{analítico} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1998 & 0.2000 & 0.2000 & 0.2000 & 0.2000 \\ 0.1998 & 0 & 0.2000 & 0.2000 & 0.2000 & 0.2000 \\ 0.2000 & 0.2000 & 0 & 0.1998 & 0.2000 & 0.2000 \\ 0.2000 & 0.2000 & 0.1998 & 0 & 0.2000 & 0.2000 \\ 0.2000 & 0.2000 & 0.2000 & 0.2000 & 0 & 0.1998 \\ 0.2000 & 0.2000 & 0.2000 & 0.2000 & 0.1998 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{9elementos} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1981 & 0.2230 & 0.2230 & 0.2230 & 0.2230 \\ 0.1981 & 0 & 0.2230 & 0.2230 & 0.2230 & 0.2230 \\ 0.2230 & 0.2230 & 0 & 0.1981 & 0.2230 & 0.2230 \\ 0.2230 & 0.2230 & 0.1981 & 0 & 0.2230 & 0.2230 \\ 0.2230 & 0.2230 & 0.2230 & 0.2230 & 0 & 0.1981 \\ 0.2230 & 0.2230 & 0.2230 & 0.2230 & 0.1981 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{49\text{elementos}} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1991 & 0.2086 & 0.2086 & 0.2086 & 0.2086 \\ 0.1991 & 0 & 0.2086 & 0.2086 & 0.2086 & 0.2086 \\ 0.2086 & 0.2086 & 0 & 0.1991 & 0.2086 & 0.2086 \\ 0.2086 & 0.2086 & 0.1991 & 0 & 0.2086 & 0.2086 \\ 0.2086 & 0.2086 & 0.2086 & 0.2086 & 0 & 0.1991 \\ 0.2086 & 0.2086 & 0.2086 & 0.2086 & 0.1991 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{121\text{elementos}} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1994 & 0.2051 & 0.2051 & 0.2051 & 0.2051 \\ 0.1994 & 0 & 0.2051 & 0.2051 & 0.2051 & 0.2051 \\ 0.2051 & 0.2051 & 0 & 0.1994 & 0.2051 & 0.2051 \\ 0.2051 & 0.2051 & 0.1994 & 0 & 0.2051 & 0.2051 \\ 0.2051 & 0.2051 & 0.2051 & 0.2051 & 0 & 0.1994 \\ 0.2051 & 0.2051 & 0.2051 & 0.2051 & 0.1994 & 0 \end{bmatrix}$$

É possível perceber pelas matrizes acima que os fatores de forma calculados numericamente convergem para os valores analíticos apresentados à medida que a malha é refinada. Para os fatores calculados com 121 elementos os erros foram menores ou iguais a 2,5%. Embora algumas literaturas, como (FEINGOLD, 1966), indiquem que para uma análise de fato precisa é recomendado que se utilizassem erros nos fatores de forma menores do que 1%, o esforço computacional para se conseguir erros dessa ordem é imenso e muitas vezes os processamentos levam dias para atingir tamanha precisão. Portanto para este trabalho de graduação, erros da ordem de 3% foram aceitos no cálculo dos fatores de forma. A seguir veremos os resultados obtidos para as radiosidade e fluxos para 9, 49 e 121 elementos.

Tabela 2 – Resultados dos fluxos e radiosidades para a primeira validação

Nº de elementos	Analítico	9 Elementos	49 Elementos	121 Elementos
Q (W/m ²)	0	-3691,40	-1292,40	-746,47
J (W/m ²)	37203,50	40890,00	38491,00	37945,50

Através dos resultados obtidos pode-se perceber que, assim como no cálculo dos fatores de forma, o refinamento da malha interfere diretamente a dimensão do erro em relação ao seu valor esperado (valor analítico). Interessante notar

que comparando o analítico com o numérico utilizando 121 elementos o erro no cálculo das radiosidades acompanha a ordem do erro dos fatores de forma, isto é, ao calcular o erro relativo das Radiosidades percebe-se que o mesmo fica ligeiramente abaixo de 2%. Percebe-se também que quanto mais próximo do valor analítico, menos o valor se aproxima do mesmo. Isso pode ser notado calculando a diferença entre os valores de 49 e 9 elementos e comparados com a diferença entre 121 e 49 elementos. A variação da primeira é sempre maior quando comparada com a segunda, indicando que o tempo de processamento em relação à precisão desejada cresce de maneira exponencial.

7.2 SEGUNDA VALIDAÇÃO

O segundo exemplo de validação é a solução de um problema de confinamento tridimensional que ocorre nas superfícies de um paralelepípedo com dimensões $(0,5m \times 0,4m \times 0,3m)$, como ilustrado a seguir.

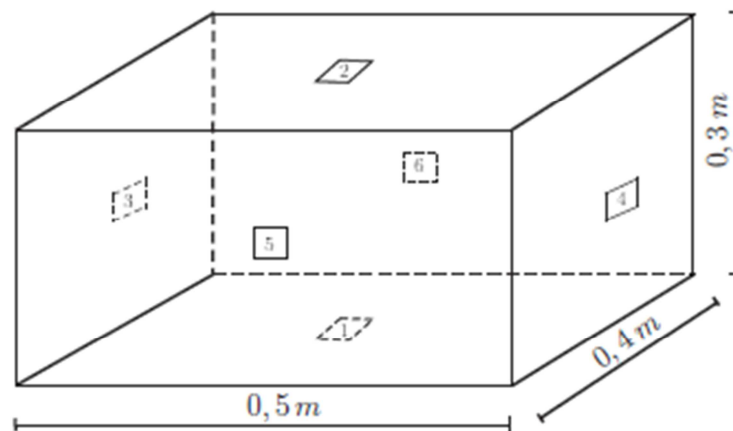


Figura 14 – Ilustração do confinamento para a segunda validação. (Fonte: D. A. CASTRO, 2013)

As condições de contorno, assim como as emissividades dos materiais estão dispostas a seguir:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 0,9 \\ 0,7 \\ 0,8 \\ 0,3 \\ 0,9 \\ 0,9 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 500 \\ 800 \\ 1000 \\ 1200 \\ - \\ - \end{bmatrix} K \quad q = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} W/m^2$$

Onde os valores com “–” representam as incógnitas em cada superfície. Portanto, para as superfícies 1, 2, 3 e 4 temos temperaturas impostas e para as superfícies 5 e 6 temos condição fluxo nulo. Os valores analíticos calculados para os fluxos, temperaturas e radiosidades se encontram a seguir.

$$T(K) = \begin{bmatrix} 500,00 \\ 800,00 \\ 1000,00 \\ 1200,00 \\ 846,77 \\ 846,77 \end{bmatrix} K \quad q = \begin{bmatrix} -27918,42 \\ -3896,05 \\ 25221,75 \\ 27802,36 \\ 0,00 \\ 0,00 \end{bmatrix} W/m^2 \quad J = \begin{bmatrix} 6646,04 \\ 24895,69 \\ 50398,56 \\ 52709,22 \\ 29153,73 \\ 29153,73 \end{bmatrix} W/m^2$$

As tabelas a seguir mostram os valores obtidos para os fluxos, temperaturas e radiosidades em cada superfície em comparação com os valores analíticos.

Tabela 3 – Radiosidade para a segunda validação

Nº de elementos	Analítico	9 Elementos	49 Elementos	121 Elementos
J_1	6646,04	7365,00	6898,00	6792,00
J_2	24895,69	26947,00	25616,00	25311,00
J_3	50398,56	51433,00	50756,00	50602,00
J_4	52709,22	56151,00	53907,00	53398,00
J_5	29153,73	34236,00	30957,00	30198,00
J_6	29153,73	34236,00	30957,00	30198,00

Tabela 4 – Fluxos e Temperaturas para a segunda validação

Nº de elementos	Analítico	9 Elementos	49 Elementos	121 Elementos
q_1	-27918,42	-34396,00	-30192,00	-29232,00
q_2	-3896,05	-8689,00	-5582,00	-4872,00
q_3	25221,75	21056,00	23764,00	24379,00
q_4	27802,36	26321,00	27283,00	27501,00
T_5	846,77	881,5	859,6	854,3
T_6	846,77	881,5	859,6	854,3

Ao analisar os resultados obtidos, é possível verificar que os erros para 121 elementos, com exceção do fluxo q_2 , estão todos na ordem de 2%, mostrando, portanto, que os resultados obtidos são satisfatórios. Para o fluxo na superfície

2, ocorre que a convergência não deixa de acontecer, porém a taxa com que a mesma acontece é diferente dos outros valores, sendo que neste caso é menor. Caso se deseje uma precisão em específico para este valor a malha deverá ser refinada adequadamente. Erros deste tipo são comuns, uma vez que a precisão tem influência direta da forma como as condições de contorno estão dispostas na superfície. Necessita-se então uma análise da convergência caso a caso. Estes dois resultados mostram a convergência da formulação utilizada para o valor esperado das variáveis em análise.

A seguir, um exemplo de aplicação é apresentado a fim de demonstrar um dos muitos usos nos quais tal formulação pode ser utilizada como ferramenta de análise. Para o exemplo a seguir foram usados 121 elementos por superfície.

8. APLICAÇÃO

Para um exemplo de aplicação, considere uma sala cúbica com 3 metros de aresta (figura 15) que possui uma lareira a fim de aquecê-la até uma temperatura confortável para seus ocupantes. A lareira consegue fornecer para a sala uma potência puramente radiativa de 3,92 *KW*. Vista de cima, a sala é um quadrado e a lareira se encontra no chão, encostada na superfície 3 (figura 16).

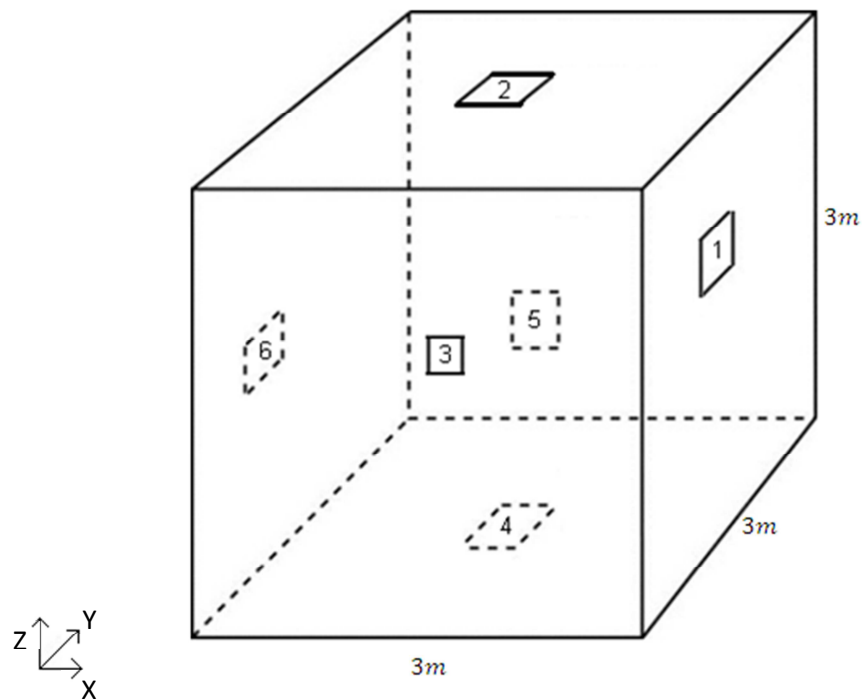


Figura 15- Ilustração tridimensional do confinamento

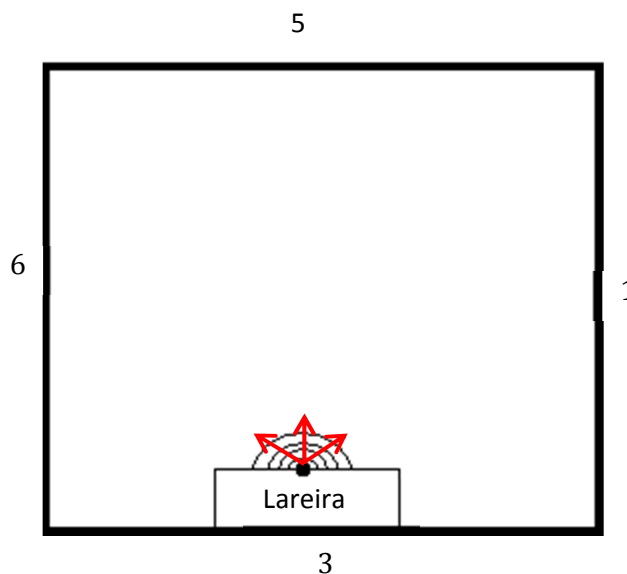


Figura 16- Ilustração bidimensional do confinamento. Vista Superior.

Percebe-se então que a lareira irradia em todas as superfícies, com exceção da superfície 3, na qual a lareira está encostada. Nesta superfície a irradiação é proveniente somente das radiosidades das demais. A irradiação em cada superfície devido à lareira pode ser dada pela razão entre a potência irradiada pela lareira e a área da esfera formada entre o ponto de irradiação e o ponto no qual essa radiação chega. Assim:

$$G = \frac{P}{4\pi r^2} \quad (95)$$

Onde r é o raio da esfera, dado pela distância entre os pontos de análise. Como hipóteses simplificadoras, foram considerados os seguintes:

- A lareira foi considerada como fonte pontual de calor e sua coordenada é (1.5, 0, 0);
- A intensidade de irradiação em cada superfície é calculada tendo como base a distância entre a lareira e seu centro geométrico;
- As paredes são de concreto puro, assim, a partir de tabelas, sua emissividade média é igual a 0.9.

Como condições de contorno, as paredes devem ser mantidas à temperatura de 27°C (300K) para manter um ambiente de conforto. Portanto, temos o seguinte:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 0,9 \\ 0,9 \\ 0,9 \\ 0,9 \\ 0,9 \\ 0,9 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 300 \\ 300 \\ 300 \\ 300 \\ 300 \\ 300 \end{bmatrix} K \quad G_{cte} = \begin{bmatrix} 120,07 \\ 93,00 \\ 0,00 \\ 207,96 \\ 93,00 \\ 120,07 \end{bmatrix} W/m^2$$

Onde as incógnitas são os fluxos em cada superfície. Calculados os fluxos, os seguintes resultados foram obtidos:

$$q = \begin{bmatrix} -127,65 \\ -103,84 \\ -21,7 \\ -205,18 \\ -103,84 \\ -127,65 \end{bmatrix} W/m^2$$

Como esperado, o fluxo líquido na superfície 3 é o menor de todos, uma vez que toda energia que incide sobre ela é proveniente das reflexões das outras paredes. Tais resultados podem ser usados, por exemplo, para determinar a espessura ideal de isolante térmico nas paredes da sala, ocasionando em economia no custo. Neste caso, a superfície 4 necessitaria de uma espessura menor de isolante térmico, já que mais fluxo pode passar por ela para mantê-la à temperatura prescrita. Por outro lado, a superfície 3 deve ser bem isolada para permitir a passagem de um fluxo mínimo. Outro estudo pode ser realizado de forma a analisar a posição ideal da lareira dentro da sala, buscando a menor quantidade de isolante o possível. A mesma análise é possível ao analisar um confinamento qualquer que alcance temperaturas elevadas, tornando a radiação o mecanismo dominante de troca de calor, um forno, por exemplo. Essa é somente uma das inúmeras aplicações nas quais essa análise tem importância.

9. CONCLUSÃO

A determinação dos fatores de forma é de suma importância ao tratar de problemas de transferência de calor por radiação térmica, entretanto, o cálculo dos mesmos pode se tornar demasiadamente complexo à medida que as geometrias em análise se diferenciem daquelas mais simples do dia a dia. Nesse âmbito, as ferramentas numéricas passam a ser essenciais para determiná-los.

O presente trabalho procurou detalhar a utilização do Método dos Elementos Finitos no cálculo dos fatores de forma entre superfícies com geometrias e orientações arbitrárias, com ou sem bordas intersectantes. Um foco especial foi dado às superfícies que compõem um confinamento devido à grande quantidade de aplicações que se encontram nessa área, porém, a formulação é válida para quaisquer casos. Foram apresentados dois exemplos para a comparação dos resultados numéricos com os resultados analíticos e consequente validação da formulação e do código utilizado, assim como um exemplo de possível aplicação da metodologia.

Apesar das diversas simplificações adotadas neste trabalho, o autor acredita que houve contribuição para o entendimento da aplicação do MEF na determinação dos fatores de forma e de como a modelagem deste tipo de problema é realizada.

10. SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

Para trabalhos futuros realizados nesta área, podem ser feitas as seguintes análises:

- Analisar geometrias diferentes das convencionais, como esferas ou parábolas;
- Considerar que um meio que participe da troca de calor se encontra entre as superfícies;
- Realizar a modelagem considerando também os mecanismos de convecção e condução para a transferência de calor;
- Considerar superfícies com temperaturas não uniformes, isto é, há um gradiente de temperaturas em cada superfície;
- Considerar superfícies não opacas ($\tau \neq 0$).

11. REFERÊNCIAS

- D. A. CASTRO, Projeto de Estruturas Sujeitas à Radiação Térmica no Interior de Confinamentos utilizando o Método da Otimização Topológica (PRM, USP), 2013.
- INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P.; BERGMAN, T. L.; LAVINE, A. S. Fundamentos da Transferência de Calor e Massa. Chichester, Inglaterra, John Wiley, 2007.
- ROHSENOW, W. M.; HARNETT, J. P.; CHO, Y. I. *handbook of mass transfer*. Nova York, EUA: McGraw-Hill, 1998.
- SHAPIRO, A. B. *Computer implementation, accuracy, and timing of radiation view factor algorithms*. *Journal of heat transfer*, ASME, v. 107, n. 3, p. 730, 1985.
- PLANCK, M. *The theory of heat radiation*. Filadélfia, EUA P. Blakiston's Son & Co.; 1914.
- SIEGEL, R.; HOWELL; J. R. *Thermal Radiation of heat transfer*. Nova York, EUA: Taylor & Francis Group, 2002.
- PLANCK, M. *On the law of distribution of energy In the normal spectrum*. *Annalen der Physik*, v. 4, p. 553, 1901.
- S. MAZUMDER, M. RAVISHANKAR, *General procedure for calculation of diffuse view factors between arbitrary planar polygons*, *Int. J. Heat Mass Transfer* (2012).
- FEINGOLD, A. *Radiant-interchange configuration factors between various selected plane surfaces*. *Proceedings of the Royal Society of London Series: A Mathematical and Physical Sciences*, Royal Soc London, v. 292, n. 1428, p. 51, 1966.
- AMBIRAJAN, A.; VENKATESHAN, S. P. *Accurate determination of diffuse view factors between planar surfaces*. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Pergamon-elsevier Science Ltd, v. 36, n. 8, p. 2203, 1993.