

Localização de Facilidades & Roteirização de Veículos Utilizando *solver* CPLEX

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa
rodrigoalvarengarosa@gmail.com
rodrigo.a.rosa@ufes.br
 (27) 99941-3300

1

Conceitos iniciais

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

2

- Parâmetros
 - São os dados de entrada, o modelo não os altera
- Variáveis de decisão
 - São as variáveis que o modelo altera buscando a solução ótima do problema
- Função objetivo
 - Minimizar ou Maximizar uma função que representa o objetivo que se quer alcançar
- Conjuntos
 - Representam o agrupamento de itens similares

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

3

3

- Modelo é linear
 - Ou seja, nunca haverá multiplicação de duas variáveis de decisão
 - $Ax + by + c$
 - Alguns casos é possível linearizar o modelo

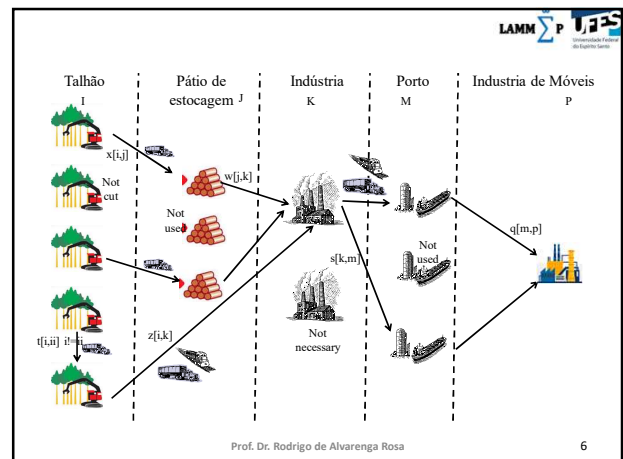
Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

4

4

Localização de Facilidades

5



Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

6

6

Utilizando *solver* CPLEX

7

ETAPAS NA FORMULAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

✓ **Relembrando:** Um problema de programação matemática tem por objetivo encontrar os valores para as variáveis de decisão que otimizam maximizam ou minimizam) uma função objetivo respeitando um conjunto de restrições.

✓ **Etapas na formulação do modelo matemático:**

Identificar os parâmetros do problema

Identificar as variáveis de decisão do problema

Construir sua função objetivo

Definir suas restrições

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

8

INTRODUÇÃO À PROGRAMAÇÃO LINEAR

✓ **Forma padrão de um modelo:**

Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2$ **FUNÇÃO OBJETIVO**

sujeito às restrições

$$\begin{cases} x_1 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \end{cases} \quad \text{RESTRICÇÕES FUNCIONAIS}$$

e

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0. \end{cases} \quad \text{RESTRICÇÕES DE NÃO NEGATIVIDADE}$$

Variáveis de decisão

Parâmetros do modelo (constantes)

9

INTRODUÇÃO À PROGRAMAÇÃO LINEAR

✓ **Resolvendo o modelo:**

- **Problemas muito grandes:** dezenas a centenas de variáveis de decisão.
- Utilização de softwares baseados em linguagens de modelagens:



10

CPLEX - OPL

- O OPL é uma ferramenta do CPLEX usada para a modelagem e resolução de problemas de otimização.
- A motivação para utilizar uma linguagem de modelagem, como OPL, são que esta:
 - apresenta uma sintaxe que é próxima da formulação matemática;
 - permite uma separação entre o modelo e a instância numérica de dados.

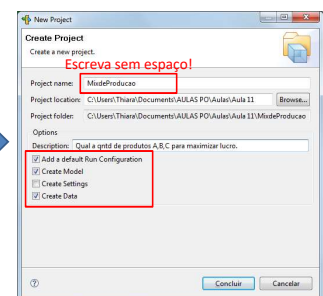
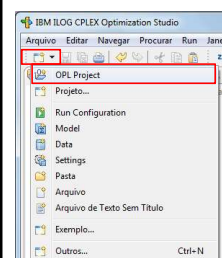
Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

11

11

Usando o OPL

• Criando um novo OPL Project:



Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

12

12

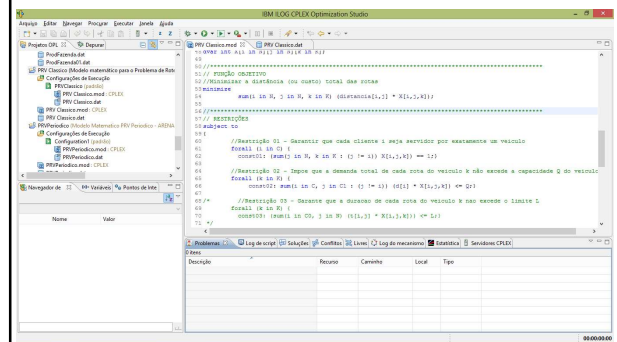
Usando o OPL

- Criam-se dois arquivos:
 - .mod**: um será o arquivo que conterá o modelo (declaração das variáveis, função objetivo e restrições);
 - .dat**: terá os dados do problema (o tamanho dos vetores das respectivas variáveis, valores dos parâmetros)
- Para linká-los cria-se uma *configuração de execução*

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

13

Usando o OPL



Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

14

Usando o OPL

- Para fazer comentário usa-se `//`
- Comentário em bloco, usa-se `/* e */`
- Para indicar que os dados dos parâmetros serão lidos na aba `*.dat` deve-se usar três pontos (...) na aba `*.mod`
- Toda linha deve terminar com ponto e vírgula (;)

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

15

Sintaxe do CPLEX

- Deve-se indicar quais tipos de números são: reais, inteiros, binários, etc.
 - Real: float
 - Inteiro: int
- <tipo de número: float/int> <nome do parâmetro> = ...;

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

16

Sintaxe do CPLEX

```
// DADOS
// número de clientes
int nos = ...;

// número de veículos da frota
int carros = ...;

// capacidade do veículo
int Q = ...;
```

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

17

Sintaxe do CPLEX

- Os índices são representados por um valor inteiro
- Para representar um vetor ou matriz não basta somente representar o índice.
- Deve-se representar um conjunto que indicam um intervalo de números. Deve ser escrito na forma:
 - range <nome do conjunto> = <num> .. <nome do índice relacionado com o conjunto>;
- Em muitos problemas é comum existir um ou mais conjuntos.

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

18

Sintaxe do CPLEX

- Um vetor (quando a variável relacionada é do tipo x_i)
- Matriz (quando a variável relacionada é do tipo x_{ij})
- Para vetor, deve-se declarar o parâmetro dessa maneira:
 <tipo de número: float/int> <nome do parâmetro>
 [i in <nome do conjunto relacionado>] = ...;
- Para matriz, deve-se declarar o parâmetro dessa maneira:
 <tipo de número: float/int> <nome do parâmetro>
 [i in <nome do conjunto relacionado>] [j in <nome do conjunto relacionado>] = ...;

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

19

19

Sintaxe do CPLEX

- Vetor no arquivo mod


```
//número de clientes
int nos = ...;

// nós (cliente)
range C = 1 .. nos;

int d [i in C] = ...;
```
- Matriz no arquivo mod


```
//numero de nos (clientes)
int nos = ...;

// nós (clientes) + depósito
range N = 0 .. (nos + 1);

int dist [i in N][j in N] = ...;
```
- No arquivo dat


```
// distancia entre i e j
dist = [
  [99  2  2  0]
  [ 3 99  3  4]
  [ 3  1 99  3]
  [ 99 99 99 99]
];
```
- No arquivo dat


```
// demanda de entrega (delivery)(int)
d = [4, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2];
```

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

20

20

Sintaxe do CPLEX

- Variáveis de decisão são os itens que o Cplex irá variar para buscar a solução
 - Deve-se indicar quais tipos de números são reais ou inteiros
 - Real: float
 - Inteiro: int

```
dvar float x;
dvar int y;
```

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

21

21

Sintaxe do CPLEX

- Variáveis (vetor) x_i :
 dvar <tipo de número: float/int/boolean> <nome da variável>
 [i in <nome do conjunto relacionado>];

```
// demanda de coleta no nó i
int d [i in N];
```

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

22

22

Sintaxe do CPLEX

- Variáveis (matriz) x_{ij} :
 dvar <tipo de número: float/int> <nome da variável>
 [k in <nome do conjunto relacionado>]
 [i in <nome do conjunto relacionado>];
- ```
// tempo termino operacao do veiculo k no cliente i
dvar float tt[k in M][i in N];
```

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

23

23

### Sintaxe do CPLEX

- Restrições
- O início sempre deve ser com "subject to" e uma linha abaixo iniciar com "{".
- Após escrever todas as restrições, finalizar com "}".
- Sinais: >=, <=, == (não aceita =, <, >)
- As restrições devem receber nomes diferentes.

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

24

24

### Sintaxe do CPLEX

- Quando no modelo matemático tiver o símbolo *para todo*, usa-se no Cplex o *forall*.

$$0 \leq x_{ijl} \leq 1 \quad \forall (i, j) \in N, \forall k \in K, \forall l \in T$$

```
forall (i in N, j in N, k in K, l in T) {
 const08: 0 <= x[i,j,k,l] <= 1; }
```

```
forall (i in N) {
 forall (j in N) {
 forall (k in K) {
 forall (l in T) {
 const08: 0 <= x[i,j,k,l] <= 1; }}}}
```

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

25

### Sintaxe do CPLEX

- Quando no modelo matemático tiver o símbolo *para todo* e uma somatória, usa-se no Cplex o *forall* e o *sum*.

$$\sum_{j \in N} \sum_{k \in K} x_{ijk} = 1 \quad \forall i \in C,$$

```
//Restrição 01 - Garantir que cada cliente i seja
//servido por exatamente um veículo
forall (i in C) {
 const01: (sum(j in N, k in K : (j != i)) x[i, j, k]) == 1; }
```

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

26

### Sintaxe do CPLEX

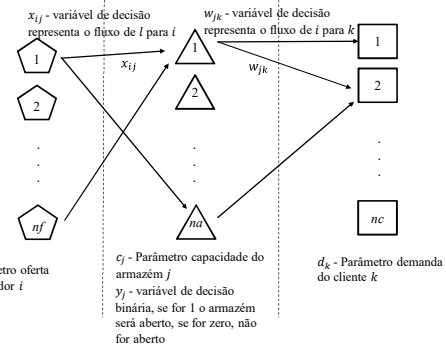
- Função Objetivo
  - Usar "Maximize" ou "Minimize" dependendo do objetivo da função.
  - Na F.O. sempre temos uma somatória.

```
//Minimizar a distância (ou custo) total das rotas
minimize
 sum(k in K, i in N, j in N, l in T) (distancia[i, j] * x[i, j, k, l]);
```

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

27

### Diagrama de Fluxo



Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

28

- Oferta na origem (I)
  - A soma de tudo que sai de cada origem tem que ser menor ou igual que a oferta da origem
- Capacidade do Armazém Intermediário (J)
  - A soma de tudo que chega no armazém tem que ser menor ou igual que sua capacidade
  - A soma de tudo que chega no armazém tem que ser igual a zero se o armazém não for aberto ( $y_j = 0$ )
  - A soma de tudo que chega no armazém tem que ser igual a soma de tudo que sai do armazém
- Demanda do cliente (K)
  - A soma de tudo que chega no cliente tem que ser menor ou igual que sua demanda

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

29

- Conjuntos
  - $I = \{1 \dots nf\}$
  - $J = \{1 \dots na\}$
  - $K = \{1 \dots nc\}$
- Parâmetros
  - $a_i$  – oferta no fornecedor
  - $c_j$  – capacidade no armazém
  - $d_k$  – demanda do cliente
- Variáveis de decisão
  - $x_{ij}$  – fluxo entre o fornecedor e o armazém
  - $w_{jk}$  – fluxo entre o armazém e o cliente
  - $y_j$  – variável binária que define se o armazém será aberto ou não

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

30

## Desenvolver o modelo de localização no CPLEX

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

31

31

## Tarefa para nota, , para ser entregue, no dia 15 de maio

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

32

32

- Para próxima aula:
  - Escolher os fornecedores que tenham menor custo por unidade adquirida e ...
  - Escolher os clientes que pagam mais pelo produto

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

33

33

## ROTEIRIZAÇÃO DE VEÍCULOS

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

34

34

### Definição.

É um processo para encontrar o menor caminho para ir de um ponto a outro com o intuito de atender a um grupo de clientes, utilizando um determinado número de veículos, minimizando assim os custos de transporte.

Para Bodin *et al.* (1983) o problema básico de roteirização é simples de se explicar. Determina-se um grupo de nós ou arcos para ser atendidos por uma frota de veículos. Não há nenhuma restrição de quando ou em que ordem estas entidades devem ser servidas. O problema é encontrar um custo mínimo para possíveis grupos, sendo que cada grupo terá uma única rota para cada veículo, onde rota é uma sucessão de locais que um veículo tem que visitar junto com uma indicação do serviço previsto.

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

35

35

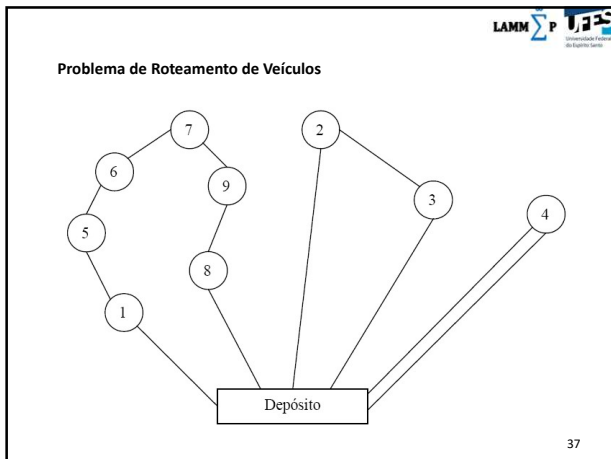
### Definição.

Roteirizar é determinar um ou mais roteiros ou sequências de paradas para serem cumpridos por uma frota de veículos, com o objetivo de visitar um conjunto de pontos geograficamente dispersos, em locais pré-determinados, que necessitam de atendimento.

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

36

36



37

**PROBLEMAS DE ROTEIRIZAÇÃO  
PRV CAPACITADO  
CVRP**

**Função Objetivo:**

- Minimizar os custos totais de distribuição;
- Minimizar a distância total percorrida;
- Minimizar o número de veículos;
- Maximizar a função utilidade baseada no nível de serviço e/ou prioridades dos clientes.

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

38

38

**PROBLEMAS DE ROTEIRIZAÇÃO**

**Restrições dos veículos :**

- Limite de capacidade dos veículos;
- Limite com relação ao tipo de carga dos veículos;
- Operação de carga e descarga dos veículos;
- Número e tipo de veículo disponíveis.

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

39

39

**PROBLEMAS DE ROTEIRIZAÇÃO**

**Restrições com os clientes:**

- Janela de tempo dos clientes;
- Atendimento total ou parcial das demandas;
- Tempo máximo permitido para carga e descarga; 20
- Necessidade ou restrição de serviço em algum dia específico da semana;
- Disponibilidade de área para estacionamento do veículo.

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

40

40

**PROBLEMAS DE ROTEIRIZAÇÃO**

**Restrições das rotas:**

- Horário de início e término das viagens;
- Tempo máximo de viagem de um veículo;
- Distância máxima percorrida;
- Locais de parada fixas, etc.

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

41

41

**PROBLEMAS DE ROTEIRIZAÇÃO**

**Variáveis de decisão:**

- Roteiro a ser percorrido por cada veículo;
- Qual veículo é designado para cada cliente;
- Qual a quantidade de carga transportada para cada cliente da rota;
- Tempo de início de atendimento do primeiro cliente da rota.

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

42

42

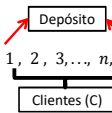
## PROBLEMAS DE ROTEIRIZAÇÃO

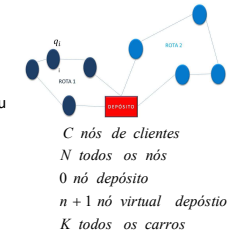
### PRV Clássico

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

43

## Notações

- Frota de  $K$  veículos.
- Capacidade  $Q$  dos veículos.
- Nós  $V = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, n+1\}$  ou  

- $N = C \cup \{0, n+1\}$
- $c_{ij}$  é o custo de ir de  $i$  para  $j$  (pode representar o tempo)
- $q_i$  é a quantidade a ser entregue em  $i$  (pode ser coleta também)



Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

44

## CPRV

Apresentar o problema em CPLEX

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

45

## PROBLEMAS DE ROTEIRIZAÇÃO

### PRV com Time Window

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

46

## CPRV-TW

Apresentar o problema em CPLEX

Prof. Dr. Rodrigo de Alvarenga Rosa

47