

CURSO DE LOGÍSTICA INTEGRADA DE PRODUÇÃO

Ferramentas de Apoio à Decisão

Prof. Dr. Fabrício Broseghini Barcelos



PARTE 02

MODELAGEM DE SISTEMAS PRODUTIVOS

Ferramentas de Apoio à Decisão

Modelagem de Sistemas Produtivos: Otimização de Recursos

Construção de um modelo segue 3 passos (Ravindran *et al.*, 1987):

1. Identifique as variáveis desconhecidas a serem determinadas (variáveis de decisão).
2. Liste todas as restrições do problema e expresse-as como equações ($=$, $\geq$ ou $\leq$)
3. Identifique o objetivo ou critério de otimização do problema, representando-o como uma função linear das variáveis de decisão. O objetivo pode ser do tipo maximizar ou minimizar.

Ferramentas de Apoio à Decisão

Modelagem de Sistemas Produtivos: Otimização de Recursos

Exemplo 2: Problema do Carpinteiro

Um carpinteiro pode fazer mesas ou cadeiras. Ele vende cada mesa por \$1.000,00 e cada cadeira por \$500,00. Para fazer uma mesa ele gasta 3h e para uma cadeira 5h. Cada mesa requer 7 unidades de madeira e uma cadeira 4 unidades. É claro que, mesmo podendo vender tudo que produzir, ele não pode vender tantas cadeiras e mesas quanto queira, pois seus recursos são limitados. O máximo que ele pode trabalhar por semana é 40h e o máximo de madeira que ele pode consumir numa semana é 60 unidades. Dada sua pequena capacidade de produção, os preços de venda serão os mesmos quaisquer que sejam as quantidades de mesas e cadeiras que ele produza. Quantas mesas e quantas cadeiras o carpinteiro deverá fazer por semana para maximizar o faturamento?

Ferramentas de Apoio à Decisão

Modelagem de Sistemas Produtivos: Otimização de Recursos

Problema do Carpinteiro: organização das informações

Recurso	Mesa	Cadeira	sinal	limite	unidade
mão de obra	3	5	$\leq$	40	h-h/semana
matéria-prima	7	4	$\leq$	60	unid/semana
Preço Unitário	1.000,00	500,00			\$

- Variáveis de decisão: $X1 \geq 0$ número de mesas fabricadas / semana
 $X2 \geq 0$ número de cadeiras fabricadas / semana
- Restrições: mão de obra: $3 X1 + 5 X2 \leq 40$
 matéria-prima: $7 X1 + 4 X2 \leq 60$
- Função Objetivo: Max Faturamento = $1.000,00 X1 + 500,00 X2$

Ferramentas de Apoio à Decisão

Modelagem de Sistemas Produtivos: Otimização de Recursos

Exemplo 3: Fábrica de Tênis

Uma pequena unidade industrial da Nike na Coréia do Sul produz 2 modelos de tênis de corrida, o NK-101 e o NK-202. Cada par do modelo NK-101, mais simples, demanda 250g de borracha, 0.10m² de náilon, 2m de fio de costura, além de 2 cadarços. Para um par do modelo NK-202, são necessários 300g de borracha, 0.15m² de náilon, 2.5m de fio de costura e os mesmos 2 cadarços. Um operário padrão gasta cerca de 1h para confeccionar um par do modelo mais simples e 1.2h para o modelo mais sofisticado. Esta unidade da Nike pode receber por dia até 1.2t de borracha, 600m² de náilon, 10Km de fio de costura e 10000 cadarços. Sabe-se ainda que 400 operários trabalham 9h por dia nesta fábrica. Os mercados estimados para os modelos NK-101 e NK-202 são de 3000 e 2000 pares por dia e os preços de venda são respectivamente US\$ 40,00 e US\$ 60,00 cada par. Quanto produzir de cada modelo de modo a maximizar o faturamento da Nike?

Ferramentas de Apoio à Decisão

Modelagem de Sistemas Produtivos: Otimização de Recursos

Fábrica de Tênis: organização das informações

Recurso	NK-101	NK-202	senal	limite	unidade
borracha	0,25	0,30	<=	1200	kg/dia
náilon	0,10	0,15	<=	600	m ² /dia
fio de costura	2,00	2,50	<=	10000	m/dia
cadarços	2	2	<=	10000	unid/dia
mão-de-obra	1,00	1,20	<=	3600	h-h/dia
Demanda NK-101	1		<=	3000	unid/dia
Demanda NK-202		1	<=	2000	unid/dia
Preço Unitário	40,00	60,00			U\$

Ferramentas de Apoio à Decisão

Modelagem de Sistemas Produtivos: Otimização de Recursos

Fábrica de Tênis:

- Variáveis de decisão: $X1 \geq 0$ número de tênis NK-101 fabricados / dia
 $X2 \geq 0$ número de tênis NK-202 fabricados / dia
- Restrições:
 - borracha: $0,25 X1 + 0,30 X2 \leq 1200$
 - náilon: $0,10 X1 + 0,15 X2 \leq 600$
 - fio de costura: $2,00 X1 + 2,50 X2 \leq 10.000$
 - cadarços: $2,00 X1 + 2,00 X2 \leq 10.000$
 - mão-de-obra: $1,00 X1 + 1,20 X2 = 400 * 9 = 3600$
 - demanda 1: $X1 \leq 3.000$
 - demanda 2: $X2 \leq 2.000$
- Função Objetivo: $\text{Max Faturamento} = 40,00 X1 + 60,00 X2$

Ferramentas de Apoio à Decisão

Modelagem de Sistemas Produtivos: Otimização de Recursos

Exemplo 4: Ranário

Um ranário (lugar destinado a criação de rãs), preocupado em aumentar sua margem de lucro, decidiu aproveitar o couro dos animais na fabricação de carteiras e cintos para exportação. Um levantamento preliminar indicou um mercado potencial de 1200 carteiras e 1500 cintos por mês, com um lucro unitário de R\$ 9,00 para as carteiras e de R\$ 7,00 para os cintos.

A fabricação do cinto demanda o couro de 6 rãs, enquanto a carteira pode ser confeccionada com apenas 2 animais. O abate mensal é de 9600 animais.

Os três empregados do ranário conseguem produzir 20 carteiras ou 60 cintos por dia, cada um, 25 dias por mês.

Qual o esquema de produção mais lucrativo?

Dica: uma única restrição de MO para cinto / carteira.

Ferramentas de Apoio à Decisão

Modelagem de Sistemas Produtivos: Otimização de Recursos

Exemplo do Ranário:

- Variáveis de decisão: $X1 \geq 0$ quantidade de carteira produzida por mês
 $X2 \geq 0$ número de cintos fabricados / mês
- Restrições: Couro: $2X1 + 6X2 \leq 9600$ (couros/mês)
MO: $(1/20) X1 + (1/60) X2 \leq 3 \cdot 25$ (homens/mês)
Mercado 1: $X1 \geq 1200$ (carteiras/mês)
Mercado 2: $X2 \geq 1500$ (cintos/mês)
- Função Objetivo: $\text{Max Faturamento} = 9,00 X1 + 7,00 X2$

MODELOS CLÁSSICOS

Ferramentas de Apoio à Decisão

Modelos Clássicos

Exemplo 5: Problema da Dieta

Diet problem (ref: Sarker and Newton, section 3.7)

- A sports dietitian is planning a food menu consisting of three major foodstuffs A, B, and C:

	Foodstuff			Min. level
	A	B	C	
Fat (units/g)	4	2	4	440
Carbohydrates (units/g)	2	3	1	150
Protein (units/g)	3	1	3	320
Cost (\$/g)	1560	1890	1270	

Ferramentas de Apoio à Decisão

Modelos Clássicos

Exemplo 5: Problema da Dieta

- Variáveis de decisão: $X_i \geq 0$ quantidade de cada alimento (A, B, C) usado na dieta (gramas)
- Restrições
 - Level of fat: $4x_A + 2x_B + 4x_C \geq 440$
 - Level of carbs: $2x_A + 3x_B + x_C \geq 150$
 - Level of protein: $3x_A + x_B + 3x_C \geq 320$
 - Nonnegative: $x_i \geq 0; i \in I$
- Função Objetivo: $\text{Min } Z = \text{Custo} = \sum_{i=A}^C C_i X_i$

Ferramentas de Apoio à Decisão

Modelos Clássicos

Exemplo 6: Mistura (*Blending*)

- Um fabricante de sorvete deve produzir 100 Kg de sorvete, a custo mínimo, seguindo a receita abaixo:

Exigência	Sigla	Mínimo (%)	Máximo (%)
Gordura	G	10	16
Sólidos de Leite (não-gordurosos)	SLNG	10,5	13
Total de sólidos do leite	TSL	20,5	25
Açúcar		11	17
Total de sólidos	TS	37,5	41,5
Água		58,5	62,5
Estabilizador		0,37	0,37
Emulsificador		0,10	0,10

Darci Prado (2010)

Ferramentas de Apoio à Decisão

Modelos Clássicos

Exemplo 6: Mistura (*Blending*)

	Nome	% G	%SLNG	%TSL	%Açúcar	%TS	%Água	Custo
Matéria-prima disponível								
P1	Creme 40 %	40	5,4	45,4		45,4	54,6	27
P2	Creme 38 %	38	5,6	43,6		43,6	56,4	26
P3	Leite 3,2 %	3,2	8,7	11,9		11,9	88,1	3
P4	Leite 4,0 %	4	8,6	12,6		12,6	87,4	3
P5	Leite condensado gordo	8	20	28		28	72	7
P6	Leite condensado magro		28	28		28	72	3
P7	Manteiga	5	92	97		97	3	15
P8	Sólidos Secos Whey		95	95		95	5	10
P9	Sacarose				100	100		10
P10	Garapa				67	67	33	9
P11	Estabilizador					80	20	55
P12	Emulsificador							78
P13	Água						100	0

Darci Prado (2010)

Ferramentas de Apoio à Decisão

Modelos Clássicos

Exemplo 6: Mistura (*Blending*)

- Variáveis de decisão: $P_i \geq 0$ quantidade de cada matéria-prima ($i=1...12$)
- FO = Min Z = Custo = $27i_1 + 26i_2 + 3i_3 + 3i_4 + 7i_5 + 3i_6 + 15i_7 + 10i_8 + 10i_9 + 9i_{10} + 55i_{11} + 78i_{12}$

➤ Restrições:

Peso: $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 + i_6 + i_7 + i_8 + i_9 + i_{10} + i_{11} + i_{12} + i_{13} = 100$

Gordura (G): $10 \leq 0.4i_1 + 0.38i_2 + 0.032i_3 + 0.04i_4 + 0.08i_5 + 0.05i_7 \leq 16$

SLNG: $10.5 \leq 0.054i_1 + 0.056i_2 + 0.087i_3 + 0.086i_4 + 0.2i_5 + 0.28i_6 + 0.92i_7 + 0.95i_8 \leq 13$

TSL: $20.5 \leq 0.454i_1 + 0.436i_2 + 0.119i_3 + 0.126i_4 + 0.28i_5 + 0.28i_6 + 0.97i_7 + 0.95i_8 \leq 25$

Açúcar: $11 \leq i_9 + 0.67 i_{10} \leq 17$

TS: $37.5 \leq 0.454i_1 + 0.436i_2 + 0.119i_3 + 0.126i_4 + 0.28i_5 + 0.28i_6 + 0.97i_7 + 0.95i_8 + i_9 + 0.67i_{10} + 0.8i_8 \leq 41.5$

Água: $58.5 \leq 0.546i_1 + 0.564i_2 + 0.88i_3 + 0.874i_4 + 0.72i_5 + 0.72i_6 + 0.03i_7 + 0.05i_8 + 0.33i_{10} + 0.2i_{11} + i_{13} \leq 62.5$

Estabilizador: $i_{11} = 0.37$

Emulsificador: $i_{12} = 0.1$

Ferramentas de Apoio à Decisão

Modelos Clássicos

Exemplo 7: Problema da Fazenda

- Melhor uso da terra: otimizar o lucro pela utilização de diferentes culturas.

Atividade	Milho (M)	Trigo (T)	Soja (S)	Açúcar (A)	Disponibilidade
Espaço (hectare)	1	1	1	1	400
Custo de preparo do terreno (R\$)	1000	1200	1500	1200	500.000
Mão de obra (hh/dia)	20	30	25	28	10.000
Lucro Unitário (R\$/hectare)	600	800	900	500	

Darci Prado (2010)

Ferramentas de Apoio à Decisão

Modelos Clássicos

Exemplo 7: Problema da Fazenda

➤ Variáveis de decisão: $M, T, S, A \geq 0$ quantidade (hectares) usado em cada cultivo

➤ FO = Max $Z = \text{Lucro} = 600M + 800T + 900S + 500A$

➤ Restrições:

Espaço: $m + t + s + a \leq 400$

Preparo do terreno: $1000m + 1200t + 1500s + 1200a \leq 500.000$

Mão de Obra: $20m + 30t + 25s + 28a \leq 10.000$

Ferramentas de Apoio à Decisão

Modelos Clássicos

Exemplo 8: Carteira de Investimentos

- Otimizar o lucro do Fundo de Investimentos

Empresa	Categoria	Lucratividade Esperada (%)
E1	A	10
E2	A	15
E3	B	5
E4	C	20
E5	A	12
E6	B	15
E7	A	10
E8	C	5
E9	B	5
E10	C	10

- **Observações:**
- Nenhum investimento isolado pode ultrapassar 15% do capital total
- Limite por categoria = 40%
- Total a ser investido = \$ 100.000,00

Darci Prado (2010)

Ferramentas de Apoio à Decisão

Modelos Clássicos

Exemplo 8: Carteira de Investimentos

- Variáveis de decisão: $E_i \geq 0$ quantidade investido em cada empresa
- FO = Max Z = Lucro = $0.1E1 + 0.15E2 + 0.05E3 + 0.20E4 + 0.12E5 + 0.15E6 + 0.10E7 + 0.05E8 + 0.05E9 + 0.1E10$
- Restrições:

Total a ser investido: $E1 + E2 + E3 + E4 + E5 + E6 + E7 + E8 + E9 + E10 = 100.000,00$

Investimento isolado: $E_i < 15.000,00 \quad \forall i = 1 \dots 10$

Investimento por categoria:

$$E1 + E2 + E5 + E7 < 40.000,00$$

$$E3 + E6 + E9 < 40.000,00$$

$$E4 + E8 + E10 < 40.000,00$$

Ferramentas de Apoio à Decisão

Modelos Clássicos

Exemplo 9: Carteira de Investimentos com Condição Lógica

Financial management problem (ref: Sarker and Newton, section 4.3.2)

- ABC Credit Union offers five types of loans:

Loan ID	Interest Charged (%)
1	9.0
2	8.0
3	6.5
4	7.5
5	10.0

- The credit union has \$ 50 million available for these loans.
- The objective is to maximize the yield on investment in loans while satisfying the diversification constraints of the next page.
- Diversification constraints:
 1. Amount invested in loan 2 cannot be greater than 25 % of the amount in loan 3.
 2. Amount invested in loan 1 must be less than or equal to the amount in loan 4.
 3. At least 70 % of the investment must be in loans 3 and 4.
 4. At least 3 \$ invested in loan 3 for each \$ invested in loan 4.

Ferramentas de Apoio à Decisão

Modelos Clássicos

Exemplo 9: Carteira de Investimentos com Condição Lógica

- Decision variables:

x_i = amount invested in loan i (expressed in millions \$) ,
 $i = 1, 2, \dots, 5$.

- Objective function:

$$\max \sum_{i=1}^5 t_i x_i$$

where t_i = interest charged for loan i .

- Constraints:

Budget: $\sum_{i=1}^5 x_i \leq 50$

Div. 1: $x_2 \leq 0.25x_3$

Div. 2: $x_1 \leq x_4$

Div. 3: $x_3 + x_4 \geq 0.7 \left(\sum_{i=1}^5 x_i \right)$

Div. 4: $x_3 \geq 3x_4$

Nonnegativity: $x_i \geq 0$

Ferramentas de Apoio à Decisão

Modelos Clássicos

Exemplo 10: Corte de Barras

- Otimização das perdas no corte de barras de 6 metros.

Demanda:

- 50 barras de 2m
- 60 barras de 3m
- 90 barras de 4m

Possibilidades:

X4	4	2	
X3	3	3	
X2	2	4	
X42	4	2	
X32	3	2	1
X33	3	3	
X222	2	2	2
X22	2	2	2

Darci Prado (2010)

ESQUEMA	X4	X3	X2	X42	X32	X33	X222	X22
PERDAS	2	3	4	0	1	0	0	2

Ferramentas de Apoio à Decisão

Modelos Clássicos

Exemplo 10: Corte de Barras

ESQUEMA	X4	X3	X2	X42	X32	X33	X222	X22
PERDAS	2	3	4	0	1	0	0	2

➤ Variável: X_i = Quantidade de barras cortadas em cada esquema

➤ FO = Minimizar Sobras = $2X_4 + 3X_3 + 4X_2 + X_{32} + 2X_{22}$

➤ Restrições:

$$X_4 + X_{42} = 90$$

$$X_3 + X_{32} + 2.X_{33} = 60$$

$$X_2 + X_{42} + X_{32} + 3.X_{222} + 2.X_{22} = 50$$

Solução:

$$X_4 = 40 \quad X_{42} = 50 \quad X_{33} = 30 \quad \text{Perdas} = 80\text{m}$$

Ferramentas de Apoio à Decisão

Modelos Clássicos

Exemplo 11: Planejamento Agregado da Produção – Fábrica de Sapato

MÊS	1	2	3	4	5	6
DEMANDA (pares)	5000	6000	5000	9000	7000	5000

Premissas:

- Tempo de produção: 30 min / par de sapato
- Tempo disponível: 150 h / mês
- Tempo máximo disponível de horas extras = 30 h / empregado x mês
- Salário empregado: R\$ 2.000,00 / mês (hora regular)
- Custo da HE: R\$ 50,00 / hora
- Custo unitário de manutenção de estoque: R\$ 1,00 / sapato
- Número máximo de empregados simultaneamente = 20 empregados
- Estoque inicial = $E_0 = 1000$ sapatos
- Ao final do período, a empresa deseja ter um estoque mínimo = 2000 sapatos
- Número empregados inicialmente = 15 empregados
- Custo de Recrutamento = R\$ 770,00 / recrutamento
- Custo Demissão = R\$ 1.000,00 / demissão

Ferramentas de Apoio à Decisão

Modelos Clássicos

Exemplo 11: Planejamento Agregado da Produção

➤ **Variável:**

O_i = Número de operários disponíveis no período i

HE_i = Número de horas extras utilizadas no período i

E_i = Número de sapatos em estoque no período i

C_i = Número de contratações no período i

D_i = Número de demissões no período i

➤ **FO** = MIN Z = Custo Total = $2000 \cdot \sum_{i=1}^6 O_i + 50 \cdot \sum_{i=1}^6 HE_i + 1 \cdot \sum_{i=1}^6 E_i + 770 \cdot \sum_{i=1}^6 C_i + 1000 \cdot \sum_{i=1}^6 D_i$

➤ **Restrições:**

$$O_i \leq 20 \quad \forall i = 1 \dots 6$$

$$HE_i \leq 30 \cdot O_i \quad \forall i = 1 \dots 6$$

$$E_0 = 1000$$

$$E_6 \geq 2000$$

$$O_0 = 15$$

$$E_1 = E_0 + 300 \cdot O_1 + 2 \cdot HE_1 - 5000$$

$$E_2 = E_1 + 300 \cdot O_2 + 2 \cdot HE_2 - 6000$$

$$E_3 = E_2 + 300 \cdot O_3 + 2 \cdot HE_3 - 5000$$

$$E_4 = E_3 + 300 \cdot O_4 + 2 \cdot HE_4 - 9000$$

$$E_5 = E_4 + 300 \cdot O_5 + 2 \cdot HE_5 - 7000$$

$$E_6 = E_5 + 300 \cdot O_6 + 2 \cdot HE_6 - 5000$$

$$O_1 = O_0 + C_1 - D_1$$

$$O_2 = O_1 + C_2 - D_2$$

$$O_3 = O_2 + C_3 - D_3$$

$$O_4 = O_3 + C_4 - D_4$$

$$O_5 = O_4 + C_5 - D_5$$

$$O_6 = O_5 + C_6 - D_6$$

Ferramentas de Apoio à Decisão

Modelagem de Sistemas Produtivos: Otimização de Recursos

Exemplo 12: Madeireira

A Madeireira Araucária fabrica tábuas e compensados a partir de 2 tipos de madeira: mogno e cedro. As tábuas de mogno são aparelhadas de tal forma que 1800 metros cúbicos de madeira (bruta) fornecem 1000 metros cúbicos do produto acabado. Para o cedro, mais macio, 1400 metros cúbicos de madeira (bruta) fornecem 1000 metros cúbicos do produto acabado. No processo de fabricação do compensado, 2 volumes de cedro são combinados com 1 volume de mogno para gerar 2 volumes do produto acabado. O IBDF permite, no período considerado, um abate de 32.000 metros cúbicos de mogno e 72.000 metros cúbicos de cedro. Os compromissos de venda já assumidos são de pelo menos 5.000 metros cúbicos de tábuas de cada madeira (mogno e cedro) e 6.000 de compensado. Os lucros por metro cúbico são de R\$7,00, R\$5,00 e R\$8,00 para as tábuas de mogno e cedro e para o compensado, respectivamente.

Ferramentas de Apoio à Decisão

Modelagem de Sistemas Produtivos: Otimização de Recursos

Exemplo 12: Madeireira

➤ Variáveis de decisão:

$X1 \geq 0$ = quantidade de tábuas de mogno (m³)

$X2 \geq 0$ = quantidade de tábuas de cedro (m³)

$X3 \geq 0$ = quantidade de compensado (m³)

➤ Função Objetivo: Max Lucro = 7,00 X1 + 5,00 X2 + 8,00 X3

➤ Restrições:

▪ Abate de árvores:

mogno $1,8 X1 + 0,5 X3 \leq 32.000$

cedro $1,4 X2 + X3 \leq 72.000$

▪ compromissos de venda:

$X1 \geq 5000$

$X2 \geq 5000$

$X3 \geq 6000$