

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO TECNOLÓGICO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**RAFHAEL MILANEZI DE ANDRADE**

**DESENVOLVIMENTO DE CÓDIGO NUMÉRICO PARA  
SOLUCIONAR AS EQUAÇÕES BIDIMENSIONAIS DE NAVIER-  
STOKES: AVALIAÇÃO DOS MÉTODOS SIMPLE, SIMPLEC E  
SIMPLER APLICADOS AO PROBLEMA DA CAVIDADE.**

VITÓRIA  
2009

**RAFHAEL MILANEZI DE ANDRADE**

**DESENVOLVIMENTO DE CÓDIGO NUMÉRICO PARA  
SOLUCIONAR AS EQUAÇÕES BIDIMENSIONAIS DE NAVIER-  
STOKES: AVALIAÇÃO DOS MÉTODOS SIMPLE, SIMPLEC E  
SIMPLER APLICADOS AO PROBLEMA DA CAVIDADE.**

Projeto de Graduação apresentado ao  
Departamento de Engenharia Mecânica da  
Universidade Federal do Espírito Santo,  
como requisito parcial para obtenção do  
título de Engenheiro Mecânico.

Orientador: Prof. Dr. Julio Tomás Aquije  
Chacaltana.

VITÓRIA  
2009

**RAFHAEL MILANEZI DE ANDRADE**

**DESENVOLVIMENTO DE CÓDIGO NUMÉRICO PARA  
SOLUCIONAR AS EQUAÇÕES BIDIMENSIONAIS DE NAVIER-  
STOKES: AVALIAÇÃO DOS MÉTODOS SIMPLE, SIMPLEC E  
SIMPLER APLICADOS AO PROBLEMA DA CAVIDADE.**

Projeto de graduação apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro Mecânico.

Aprovado em 20 de Novembro de 2009.

**COMISSÃO EXAMINADORA**

---

**Prof. Dr. Julio Tomás Aquije Chacaltana**  
**Universidade Federal do Espírito Santo**  
**Orientador**

---

**Prof. Dr. Juan Sérgio Romero Saenz**  
**Universidade Federal do Espírito Santo**

---

**Prof. Dr. Maxsuel Marcos Rocha Pereira**  
**Universidade Federal do Espírito Santo.**

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus e toda Espiritualidade, por iluminarem meu caminho e direcionar meus passos até aqui, me apoiando em todos os momentos necessários.

Ao meu orientador Julio Tomas Aquije Chacaltana, pela paciência e assistência prestada em todo desenvolvimento deste trabalho, colaborando para o meu enriquecimento científico.

Aos meus pais Alcione de Andrade e Maria de Lourdes Milanezi por torcerem e orarem pelo meu sucesso.

Agradeço especialmente aos meus Avós Ambrósio Milanezi e Adelayde Milanezi por me acolherem com carinho e por tudo que me foi dado, principalmente a educação.

Aos parentes e amigos que torceram pela minha conquista, prestando apoio nos momentos difíceis.

A todos meus professores que muito colaboraram pelo meu enriquecimento científico.

“A percepção do desconhecido é a mais fascinante das experiências. O homem que não tem os olhos abertos para o misterioso passará pela vida sem ver nada.”

Albert Einstein

## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo desenvolver um código numérico para solucionar as equações bidimensionais de Navier-Stokes usando o método dos volumes finitos aplicado em uma grade estruturada para completar o desenvolvimento de um programa que solucione problemas complexos de engenharia e da física. Para tanto foram realizadas simulações numéricas do escoamento em uma cavidade quadrada com três dos métodos mais conhecidos de solução do acoplamento pressão-velocidade, SIMPLE, SIMPEC e SIMPLER. Os métodos foram avaliados mediante a variação do número de pontos nodais da malha, do número de Reynolds do escoamento e do número de Courant. As simulações apresentaram resultados relevantes, e indicaram que o método SIMPEC foi o mais consistente nas condições propostas. Uma demonstração do potencial do método SIMPEC é apresentada no final do trabalho em uma análise física do escoamento na cavidade quadrada, onde foi analisada a influência do número de Reynolds na disposição dos campos de velocidade e de pressões. Observou-se que a variação do número de Reynolds pode alterar bastante a física do problema, modificando a formação do vórtice e das recirculações do escoamento.

Palavras-chave: Cavidade, SIMPLE, SIMPEC, SIMPLER.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 3-1 – Deslocamento de uma porção de massa no espaço e tempo. Onde $\forall C$ representa o volume de controle contendo uma massa $M$ do Fluido. ....	19
Figura 3-2 – Deslocamento de uma porção de massa no espaço e tempo. ....	22
Figura 4-1 – Representação de um volume de controle e sua vizinhança .....	27
Figura 4-2 –Exemplo de campo de pressão. (Malalasekera,1995) .....	38
Figura 4-3 –Malha da componente u da velocidade defasada. (Patankar, 1980) .....	39
Figura 4-4 – Malha defasada. (Malalasekera,1995) .....	40
Figura 4-5 – Volume de controle em u e as componentes de velocidade da sua vizinhança. (Malalasekera,1995).....	42
Figura 4-6 – Volume de controle em v e as componentes de velocidade da sua vizinhança. (Malalasekera,1995).....	43
Figura 4-7 – Volume de controle usado para discretizar a equação da continuidade. (Malalasekera,1995) .....	46
Figura 4-8 – Algoritmo SIMPLE. (Malalasekera,1995) .....	48
Figura 4-9 – Algoritmo SIMPLER. (Malalasekera,1995).....	52
Figura 5-1 – Condições de contorno do problema da cavidade. ....	55
Figura 5-2 – Algoritmo SIMPLE implementado nesse trabalho.....	61
Figura 5-3 – Algoritmo SIMPLER implementado nesse trabalho. ....	62
Figura 6-1 – Evolução do erro para malha 40x40, Re=100 e dt=0,0001.....	68
Figura 6-2 – Redução do tempo de loop para malha 40x40, Re=100 e dt=0,0001. ....	68

Figura 6-3 – Evolução do erro para malha 60x60, $Re=100$ e $dt=0,0001$ .....	69
Figura 6-4 – Redução do tempo de loop para malha 60x60, $Re=100$ e $dt=0,0001$ .....	70
Figura 6-5 – Evolução do erro para malha 80x80, $Re=100$ e $dt=0,0001$ .....	71
Figura 6-6 – Redução do tempo de loop para malha 80x80, $Re=100$ e $dt=0,0001$ .....	72
Figura 6-7 – Evolução do erro para malha 100x100, $Re=100$ e $dt=0,0001$ .....	73
Figura 6-8 – Redução do tempo de loop para malha 100x100, $Re=100$ e $dt=0,0001$ .....	74
Figura 6-9 – Evolução do erro para malha 80x80, $Re=100$ e $dt=0,0001$ .....	75
Figura 6-10 – Redução do tempo de loop para malha 80x80, $Re=100$ e $dt=0,0001$ .....	76
Figura 6-11 – Redução do tempo de loop para malha 80x80, $Re=500$ e $dt=0,0001$ .....	77
Figura 6-12 – Evolução do erro para malha 80x80, $Re=500$ e $dt=0,0001$ .....	77
Figura 6-13 – Redução do tempo de loop para malha 80x80, $Re=1000$ e $dt=0,0001$ .....	78
Figura 6-14 – Evolução do erro para malha 80x80, $Re=1000$ e $dt=0,0001$ .....	79
Figura 6-15 – Redução do tempo de loop para malha 80x80, $Re=1500$ e $dt=0,0001$ .....	80
Figura 6-16 – Evolução do erro para malha 80x80, $Re=1500$ e $dt=0,0001$ .....	80
Figura 6-17 – Evolução do erro para malha 80x80, $Re=100$ e $dt=0,00001$ .....	81
Figura 6-18 – Redução do tempo de loop para malha 80x80, $Re=100$ e $dt=0,00001$ .....	82



Figura 6-19 – Evolução do erro para malha 80x80, $Re=100$ e $dt=0,0001$ .....	83
Figura 6-20 – Redução do tempo de loop para malha 80x80, $Re=100$ e $dt=0,0001$ . ....	83
Figura 6-21 – Evolução do erro para malha 80x80, $Re=100$ e $dt=0,0032$ .....	84
Figura 6-22 – Redução do tempo de loop para malha 80x80, $Re=100$ e $dt=0,0032$ . ....	85
Figura 6-23 – Evolução do erro para malha 80x80, $Re=100$ e $dt=0,004$ .....	86
Figura 6-24 – Redução do tempo de loop para malha 80x80, $Re=100$ e $dt=0,004$ . ....	86
Figura 6-25 – Evolução do erro para malha 80x80, $Re=100$ e $dt=0,007$ .....	88
Figura 6-26 – Redução do tempo de loop para malha 80x80, $Re=100$ e $dt=0,007$ . ....	89
Figura 6-27 – Campo de Velocidades para malha 60x60, $Re=100$ e $dt=0,0001$ . ....	90
Figura 6-28 – Detalhe – Vórtice contra-rotativo.....	91
Figura 6-29 – Detalhe – (a) Recirculação canto esquerdo. (b) Recirculação canto direito.....	91
Figura 6-30 – Campo de Pressões para malha 60x60, $Re=100$ e $dt=0,0001$ . .	92
Figura 6-31 – Campo de Velocidades para malha 60x60, $Re=500$ e $dt=0,0001$ . ....	93
Figura 6-32 – Detalhe – Vórtice contra-rotativo.....	93
Figura 6-33 – Detalhe – (a) Recirculação canto esquerdo. (b) Recirculação canto direito.....	94
Figura 6-34 – Campo de Pressões para malha 60x60, $Re=500$ e $dt=0,0001$ . .	95

Figura 6-35 – Campo de Velocidades para malha 60x60, $Re=1000$ e $dt=0,0001$ . .....	95
Figura 6-36 – Detalhe – Vórtice contra-rotativo.....	96
Figura 6-37 – Detalhe – (a) Recirculação canto esquerdo. (b) Recirculação canto direito.....	96
Figura 6-38 – Campo de Pressões para malha 60x60, $Re=1000$ e $dt=0,0001$ .	97
Figura 6-39 – Campo de Velocidades para malha 60x60, $Re=1500$ e $dt=0,0001$ . .....	98
Figura 6-40 – Detalhe – Vórtice contra-rotativo.....	98
Figura 6-41 – Detalhe – (a) Recirculação canto esquerdo. (b) Recirculação canto direito.....	99
Figura 6-42 – Campo de Pressões para malha 60x60, $Re=1500$ e $dt=0,0001$ . .....	100
Figura 6-43 – Campo de Velocidades para malha 60x60, $Re=2000$ e $dt=0,0001$ . .....	101
Figura 6-44 – Detalhe – Vórtice contra-rotativo.....	101
Figura 6-45 – Detalhe – (a) Recirculação canto esquerdo. (b) Recirculação canto direito.....	102
Figura 6-46 – Campo de Pressões para malha 60x60, $Re=2000$ e $dt=0,0001$ . .....	102
Figura 10-1 – Fluxo de Energia pelo Volume de Controle.....	109
Figura 10-2 - Perfis quadráticos usado no esquema QUICK. (Malalasekera,1995).....	119

## LISTA DE SÍMBOLOS

$M$  – Massa.

$m$  – Massa infinitesimal.

$\vec{F}$  – Vetor força.

$\vec{F}_B$  – Vetor força de corpo.

$\vec{F}_S$  – Vetor força de superfície.

$\vec{\tau}$ ,  $\vec{\sigma}$  – Vetores de tensão.

$\hat{T}$  – Tensor de tensões.

$\rho$  – Massa específica.

$\forall$  – Volume.

$\forall C$  – Volume de controle.

$\mathcal{S}$  – Superfície.

$\vec{A}$  – Vetor área.

$\vec{n}$  – Vetor normal.

$\vec{U}$  – Vetor velocidade.

$u$  – Componente da velocidade na direção  $x$ .

$v$  – Componente da velocidade na direção  $y$ .

$\vec{P}$  – Vetor quantidade de movimento

$\vec{g}$  – Aceleração da gravidade.

$P$  – Pressão.

$\hat{I}$  – Tensor identidade.

$\mu$  – Viscosidade dinâmica.

$\lambda$  – Segundo coeficiente de viscosidade.

$\delta_{ij}$  – Delta de Kronecker.

$\dot{\gamma}$  – Taxa de deformação.

$E$  – Energia do sistema.

$Q$  – Quantidade de calor.

$W$  – Trabalho.

$S$  – Energia transmitida por fonte/sumidouro.

$e$  – Energia específica.

$\phi$  – Grandeza conservada

$\Gamma$  – Difusividade da propriedade.

$S_\phi$  – Geração de propriedade.

$n$  – Instante de tempo.

$C$  – Número de Courant.

$Re$  – Número de Reynolds.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>OBJETIVOS .....</b>	<b>18</b>
<b>3</b>	<b>FUNDAMENTOS FÍSICOS E MATEMÁTICOS DO MOVIMENTO DOS FLUIDOS.....</b>	<b>19</b>
3.1	EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA MASSA .....	19
3.2	EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO .....	21
3.3	EQUAÇÃO GERAL DE CONSERVAÇÃO.....	25
<b>4</b>	<b>FUNDAMENTOS DO MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS.....</b>	<b>27</b>
4.1	SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DIFUSIVOS .....	28
4.2	SOLUÇÃO DE PROBLEMAS ADVECTIVO-DIFUSIVOS.....	30
<b>4.2.1</b>	<b>Esquema Upwind.....</b>	<b>34</b>
4.3	SOLUÇÃO DO ACOPLAMENTO PRESSÃO-VELOCIDADE.....	36
<b>4.3.1</b>	<b>Algoritmo Semi Implicit Method for Pressure-Linked Equations (SIMPLE) 43</b>	
<b>4.3.2</b>	<b>Algoritmo SIMPLE Consistente (SIMPLEC).....</b>	<b>48</b>
<b>4.3.3</b>	<b>Algoritmo SIMPLE Revisado (SIMPLER) .....</b>	<b>49</b>
4.4	CONSISTÊNCIA, ESTABILIDADE E CONVERGÊNCIA.....	53
<b>5</b>	<b>DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE TRANSPORTE E DESENVOLVIMENTO DO CÓDIGO NUMÉRICO.....</b>	<b>55</b>
5.1	DESCRIÇÃO DO PROBLEMA.....	55
<b>5.1.1</b>	<b>Discretização das Equações de Transporte .....</b>	<b>56</b>
5.2	DESENVOLVIMENTO DOS ALGORITMOS .....	59
<b>5.2.1</b>	<b>Programa Principal.....</b>	<b>59</b>
<b>5.2.2</b>	<b>Sub-rotinas .....</b>	<b>63</b>
5.3	TRATAMENTO DOS DADOS .....	63

5.4	PARÂMETROS DE AVALIAÇÃO DOS MÉTODOS .....	64
<b>6</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO.....</b>	<b>67</b>
6.1	AVALIAÇÃO DOS MÉTODOS .....	67
<b>6.1.1</b>	<b>Efeito da Malha na Convergência .....</b>	<b>67</b>
6.1.1.1	Malha 40 x 40 .....	67
6.1.1.2	Malha 60 X 60 .....	69
6.1.1.3	Malha 80 x 80 .....	70
6.1.1.4	Malha 100 x 100 .....	72
<b>6.1.2</b>	<b>Efeito do Número de Reynolds na Convergência.....</b>	<b>74</b>
6.1.2.1	Re=100.....	75
6.1.2.2	Re=500.....	76
6.1.2.3	Re=1000.....	78
6.1.2.4	Re=1500.....	79
<b>6.1.3</b>	<b>Efeito do Número de Courant na Convergência.....</b>	<b>81</b>
6.1.3.1	C=0, 0008.....	81
6.1.3.2	C=0, 008.....	82
6.1.3.3	C=0, 256.....	84
6.1.3.4	C=0, 4.....	85
6.2	MELHORIAS PARA O MÉTODO ESCOLHIDO .....	87
6.3	ATUALIZAÇÃO DOS COEFICIENTES .....	88
6.4	ESTUDO DO PROBLEMA DA CAVIDADE .....	90
6.4.1.1	Re=100.....	90
6.4.1.2	Re=500.....	92
6.4.1.3	Re=1000.....	95
6.4.1.4	Re=1500.....	98
6.4.1.5	Re=2000.....	100

7	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	104
8	SUGESTÃO DE TRABALHOS FUTUROS .....	106
9	REFERÊNCIAS .....	107
10	APÊNDICES .....	109
	APÊNDICE A – Equação de Conservação da Energia .....	109
	APÊNDICE B –Outros Métodos para Solução de Problemas Advectivos- Difusivos .....	116
	Esquema Híbrido.....	116
	Esquema Power-Law .....	117
	Esquema QUICK.....	119

# 1 INTRODUÇÃO

A experimentação foi, durante longo tempo, o único instrumento de investigação utilizado no estudo do movimento dos fluidos. A partir dos anos 60, o notável avanço dos computadores e sua crescente disponibilidade nas universidades e centros de pesquisa estimularam o desenvolvimento de códigos computacionais voltados para a simulação numérica de escoamentos de fluidos.

Os métodos de solução das equações de Navier-Stokes evoluíram consideravelmente, transformando estes programas em instrumento de inestimável valor para a análise de problemas de mecânica dos fluidos e transferência de calor. Existe uma série de códigos computacionais comerciais disponíveis, como o CFX e o Fluent, ambos da ANSYS, que são códigos fechados e, muitas vezes, de difícil utilização com relação à alteração da modelagem física matemática original.

Apesar de um ótimo embasamento teórico, a maioria dos livros não aborda todos os detalhes necessários para implementar um algoritmo que resolva as equações governantes do problema, em especial o campo de velocidades de um escoamento.

O estudo, aqui em parte apresentado, foi iniciado a fim de permitir uma pesquisa mais aprofundada e maior conhecimento do método dos volumes finitos, disponibilizando toda a formulação matemática, física e numérica envolvidas para desenvolver um código aberto e de fácil manipulação.

A fase mais complexa dessa pesquisa foi a escolha e implementação do método numérico para solução do acoplamento pressão-velocidade. Diante desse desafio foi desenvolvido um código numérico para solução das equações bidimensionais de Navier-Stokes usando três dos métodos numéricos mais conhecidos para solução do acoplamento pressão-velocidade (SIMPLE, SIMPLEC e SIMPLER), esses métodos foram avaliados para saber qual é o mais adequado para dar continuidade ao desenvolvimento do projeto proposto inicialmente.



Para elementos de comparação, pesa a simplicidade, então, optou-se por implementar os métodos SIMPLE, SIMPLEC e SIMPLER com abordagens simples para a função de interpolação (Upwind), solução do sistema de equações algébricas (Método iterativo de Jacobi) e discretização temporal (Formulação totalmente implícita). Também se optou pela chamada cavidade aberta, que apresentam uma geometria muito simples, contudo o escoamento em seu interior reúne fenômenos bastante complexos, o que favorece uma análise rigorosa do comportamento dos códigos analisados.

Neste trabalho, o escoamento dentro da cavidade usa razão de aspecto 1:1 e malha estruturada com coordenadas ortogonais para realizar a investigação numérica de cada método.

## 2 OBJETIVOS

O estudo da disciplina dinâmica dos fluidos computacional foi iniciado com o objetivo de desenvolver um programa que use técnicas numéricas, em especial o método dos volumes finitos, para a solução de problemas complexos de engenharia e da física, tais como o escoamento de fluidos com ou sem transferência de calor que está envolvido praticamente em todos os processos de produção de energia, nos fenômenos ambientais, nos equipamentos térmicos, etc. E proporcionar uma simulação numérica desses escoamentos que ajude o entendimento e a quantificação do fenômeno facilitando as pesquisas desenvolvidas nessas áreas.

No decorrer do desenvolvimento do programa foi levantada a necessidade de desenvolver e escolher, dentre os métodos existentes, um código numérico para solucionar o acoplamento pressão-velocidade de um escoamento.

Este trabalho tem, então, como objetivo desenvolver um código numérico para solucionar as equações bidimensionais de Navier-Stokes e fazer a avaliação do desempenho dos métodos SIMPLE, SIMPLEC e SIMPLER, ao aplicá-los ao caso teste da cavidade aberta e avaliar qual deles é o melhor para dar continuidade ao desenvolvimento do programa proposto inicialmente.

### 3 FUNDAMENTOS FÍSICOS E MATEMÁTICOS DO MOVIMENTO DOS FLUIDOS.

A seguir, são apresentadas as deduções das equações de conservação da massa e da quantidade de movimento em uma forma mais detalhada que ajude o entendimento das próprias equações, bem como da aplicação das mesmas em nível discreto para volumes elementares. A equação da conservação da energia é apresentada no APÊNCE A, como material informativo.

#### 3.1 EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA MASSA

No interior de um fluido em movimento é escolhida uma porção de massa deformável no tempo ilustrada na figura abaixo:

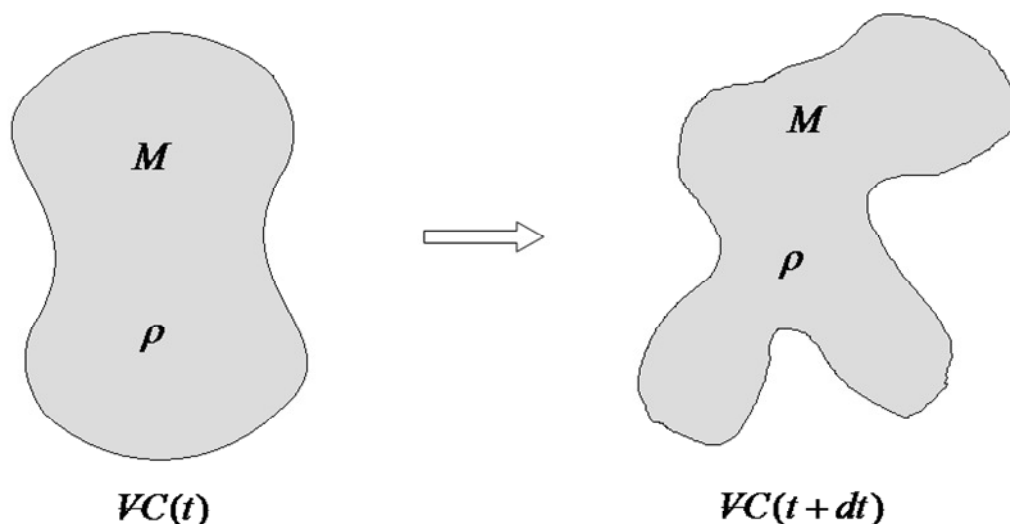


Figura 3-1 – Deslocamento de uma da porção de massa no espaço e tempo. Onde  $VC$  representa o volume de controle contendo uma massa  $M$  do Fluido.

O princípio físico da conservação da massa estabelece que a massa  $M$  de um volume de controle não varia no tempo à medida que o volume se descola pelo espaço. Esse princípio pode se expresso pela equação abaixo:

$$\left. \frac{dM}{dt} \right)_{\text{Sistema}} = 0 \quad (3.1)$$

Onde

$$M_{sistema} = \int_{M(sistema)} dm = \int_{V(sistema)} \rho \cdot dV \quad (3.2)$$

Então:

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \cdot dV = 0 \quad (3.3)$$

Devida a dificuldade em se acompanhar uma quantidade de massa que segue com o escoamento, o método de análise de matéria fixa (método Lagrangiano) será transformado para um método de análise mais simples que analisa as propriedades físicas da matéria em um volume fixo no espaço, ou seja, o observador pode obter as informações necessárias sobre o escoamento olhando apenas para um volume fixo enquanto a massa flui através de sua superfície (método Euleriano).

A mudança de método descrita acima pode ser alcançada ao se aplicar o Teorema dos Transportes de Reynolds que estabelece a correspondência entre uma propriedade de uma porção fixa de massa na referência Lagrangeana e a equivalente na referência Euleriana.

$$\frac{D\beta}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \beta dV + \int_{SC} \rho \cdot \beta (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS \quad (3.4)$$

Então aplicando o Teorema dos Transportes de Reynolds para a equação anterior:

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \cdot dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \cdot dV + \int_{SC} \rho \vec{U} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (3.5)$$

O Teorema da Divergência ou de Gauss indica que para um volume delimitado por uma superfície fechada arbitrária, tomando-se em cada ponto da superfície a normal externa, tem-se:

$$\int_{SC} (\vec{U} \cdot \vec{n}) dS = \int_{VC} \nabla \cdot \vec{u} dV \quad (3.6)$$

Assim, a equação da conservação da massa pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \cdot dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \cdot dV + \int_{VC} \nabla \cdot \vec{U} \cdot dV = 0 \quad (3.7)$$

De forma que o volume é fixo no espaço e tempo, pode-se afirmar que a derivada temporal da integral da densidade no volume é igual à integral da derivada temporal da densidade no volume de controle, logo:

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \cdot dV = \int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dV + \int_{VC} \nabla \cdot \vec{U} \cdot dV = 0 \quad (3.8)$$

Agrupando os termos em uma só integral:

$$\int_{VC} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{U} \right] \cdot dV = 0 \quad (3.9)$$

Que representa a forma integral da equação da conservação da massa, ou equação da continuidade.

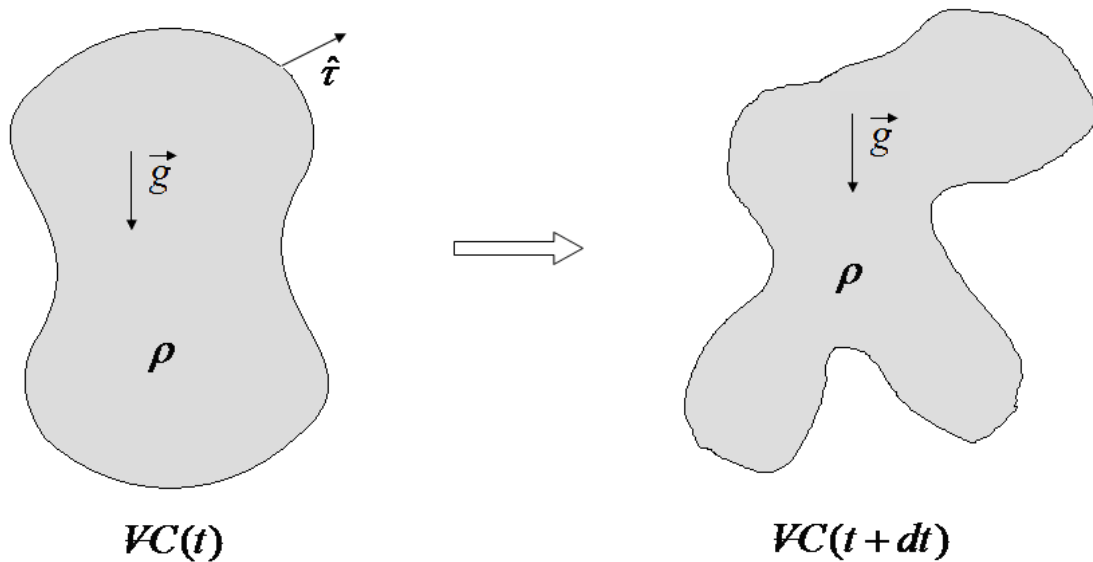
Em contra partida, como o volume de controle é um volume qualquer, a equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad (3.10)$$

Que representa a forma diferencial da equação da continuidade.

### 3.2 EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

No interior de um fluido em movimento é escolhida uma porção de massa deformável no tempo ilustrada na figura abaixo:



**Figura 3-2 – Deslocamento de uma porção de massa no espaço e tempo.**

De acordo com a Primeira lei de Euler a resultante das forças que agem em um corpo é igual à taxa de variação da quantidade de movimento deste corpo em relação ao tempo.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Bigg)_{\text{Sistema}} \quad (3-11)$$

A quantidade de movimento do sistema em questão pode ser escrito na forma:

$$\vec{P}_{\text{Sistema}} = \int_{M(\text{Sistema})} \vec{U} dm = \int_{VC} \rho \vec{U} dV \quad (3.12)$$

Então, a segunda lei de Newton assume a forma abaixo:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{U} dV \quad (3.13)$$

A força  $\vec{F}$  resultante inclui todas as forças de corpo e de superfície atuantes no sistema, assim:

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{U} dV \quad (3.14)$$

Como descrito anteriormente, existe uma dificuldade em se acompanhar uma quantidade de massa que segue com o escoamento, então, o método de análise de matéria fixa (método Lagrangiano) será transformado para um método de análise mais simples que analisa as propriedades físicas da matéria em um volume fixo (método Euleriano).

A mudança de método descrita acima pode ser alcançada ao se aplicar o Teorema dos Transportes de Reynolds Eq. (3.4), resultando na seguinte equação:

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{U} dV + \int_{SC} \rho \vec{U} (\vec{U} \cdot \vec{n}) dS \quad (3.15)$$

De acordo com o teorema de Gauss Eq. (3.6), a equação da conservação da quantidade de movimento pode ser escrita como:

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{U} dV + \int_{VC} \nabla \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) dV \quad (3.16)$$

Analogamente à manipulação matemática feita na equação da continuidade, pode-se afirmar que a derivada temporal da integral da densidade no volume é igual à integral da derivada temporal da densidade no volume de controle, logo:

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{U}) dV + \int_{VC} \nabla \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) dV \quad (3.17)$$

Agrupando em uma mesma integral:

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \int_{VC} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{U}) + \nabla \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) \right] dV \quad (3.18)$$

Como a força da gravidade é a única força de corpo atuante no caso estudado, pode-se escrever:

$$\vec{F}_B = \int_{VC} \rho \vec{g} dV \quad (3.19)$$

As forças de superfície aparecem devidas as diferenças de pressão no escoamento, essas diferença de pressão provoca o surgimento de tensões na superfície do volume de controle.

$$\vec{F}_s = \int_{SC} \vec{\tau} dS = \int_{SC} \vec{n} \cdot \hat{T} dS \quad (3.20)$$

De acordo com o teorema da divergência pode-se escrever:

$$\vec{F}_s = \int_{VC} (\nabla \cdot \hat{T}) dV \quad (3.21)$$

Voltando à equação da conservação da quantidade de movimento:

$$\int_{VC} (\nabla \cdot \hat{T}) dV + \int_{VC} \rho \vec{g} dV = \int_{VC} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{U}) + \nabla \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) \right] dV \quad (3.22)$$

Agrupando em uma mesma integral:

$$\int_{VC} \left\{ \rho \vec{g} + \nabla \cdot \hat{T} - \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{U}) + \nabla \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) \right] \right\} dV = 0 \quad (3.23)$$

Que representa a forma integral da equação da conservação da quantidade de movimento.

Em contra partida, como o volume de controle é um volume qualquer, a equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{U}) + \nabla \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) \right] = \nabla \cdot \hat{T} + \rho \vec{g} \quad (3.24)$$

Que representa a forma diferencial da equação da conservação da quantidade de movimento ou equação de Cauchy.

Supondo que:

$$\hat{T} = -P\hat{I} + \lambda \nabla \cdot \vec{U}\hat{I} + \sigma \quad (3.25)$$

Se o fluido for newtoniano, tem-se:



$$\hat{\sigma} = 2\mu\hat{\gamma} \quad (3.26)$$

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{2}\nabla\vec{U} + \frac{1}{2}(\nabla\vec{U})^T \quad (3.27)$$

Então:

$$\hat{T} = -P\hat{I} + \lambda\nabla\cdot\vec{U}\hat{I} + \mu\hat{\gamma} \quad (3.28)$$

A hipótese de Stokes diz que para compressões ou expansões isentrópicas no escoamento tem-se:

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (3.29)$$

Logo:

$$\hat{T} = -P\hat{I} - \frac{2}{3}\nabla\cdot\vec{U}\hat{I} + \mu\hat{\gamma} \quad (3.30)$$

Substituindo nas equações de Cauchy:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{U}) + \nabla\cdot(\rho\vec{U}\vec{U}) \right] = \nabla\cdot \left[ -P\hat{I} - \frac{2}{3}\nabla\cdot\vec{U}\hat{I} + \mu\hat{\gamma} \right] + \rho\vec{g} \quad (3.31)$$

Manipulando-se matematicamente o primeiro termo do lado esquerdo da equação acima, chega-se às equações de Navier-Stokes:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{U}) + \nabla\cdot(\rho\vec{U}\vec{U}) \right] = -\nabla P + \frac{1}{3}\mu\nabla(\nabla\cdot\vec{U}) + \mu\nabla^2\vec{U} + \rho\vec{g} \quad (3.32)$$

Reordenando:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{U}) + \nabla\cdot(\rho\vec{U}\vec{U}) \right] = \mu\nabla^2\vec{U} - \nabla P + \frac{1}{3}\mu\nabla(\nabla\cdot\vec{U}) + \rho\vec{g} \quad (3.33)$$

### 3.3 EQUAÇÃO GERAL DE CONSERVAÇÃO

Em geral, as equações de conservação apresentam termos que representam o acúmulo, o transporte convectivo, o transporte difusivo e a geração de uma

dada grandeza. Veja, por exemplo, a Eq. (10.30) no APÊNDICE A. O primeiro termo do membro esquerdo é o termo de acúmulo, enquanto que o outro é o termo de transporte por convecção. No lado direito o primeiro termo corresponde ao transporte difusivo, sendo o último o termo de geração. Por essa similaridade, as equações de conservação podem ser escritas da seguinte forma geral (Lage, 2001):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot (\rho\phi\vec{U}) = \nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi) + S_\phi \quad (3.34)$$

Onde  $\phi$  é a grandeza conservada,  $\Gamma$  é a difusividade desta grandeza e  $S_\phi$  é o termo de geração. Considerando  $S_\phi$  como sendo a soma do termo de geração com todos os outros termos existentes na equação de conservação original que não se enquadram nem na forma de termos de transporte e nem na de termo de acúmulo. Por isso, o termo  $S_\phi$  é, por vezes, Chamado de “lixeira” da equação de conservação, na forma dada pela equação acima (Lage, 2001).

## 4 FUNDAMENTOS DO MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS

O método de volumes finitos é construído a partir da divisão do domínio de integração das equações em volumes de controles, ou seja, para cada célula existe um ponto nodal ou nó. Os nós estão situados no centro dos volumes de controle.

A Figura 4-1 mostra a representação de um volume de controle e sua vizinhança. O ponto  $P$  é o ponto principal (nó principal) de um volume de controle genérico. Os pontos  $E$ ,  $W$ ,  $N$  e  $S$  são os pontos principais dos volumes de controle vizinhos a leste, oeste, norte e sul respectivamente, sendo  $x$  e  $y$  as distâncias entre estes pontos e  $P$ . As faces dos volumes de controle são representadas pelas linhas pontilhadas e  $\Delta x$  e  $\Delta y$  são as distâncias entre as faces, ou dimensão do volume de controle. As velocidades nas faces leste e oeste são representadas por  $u_e$  e  $u_w$ , da mesma forma as velocidades nas faces norte e sul são representadas por  $v_n$  e  $v_s$ . As velocidades são obtidas nas faces dos volumes de controle, enquanto todas as outras variáveis são obtidas nos nós.

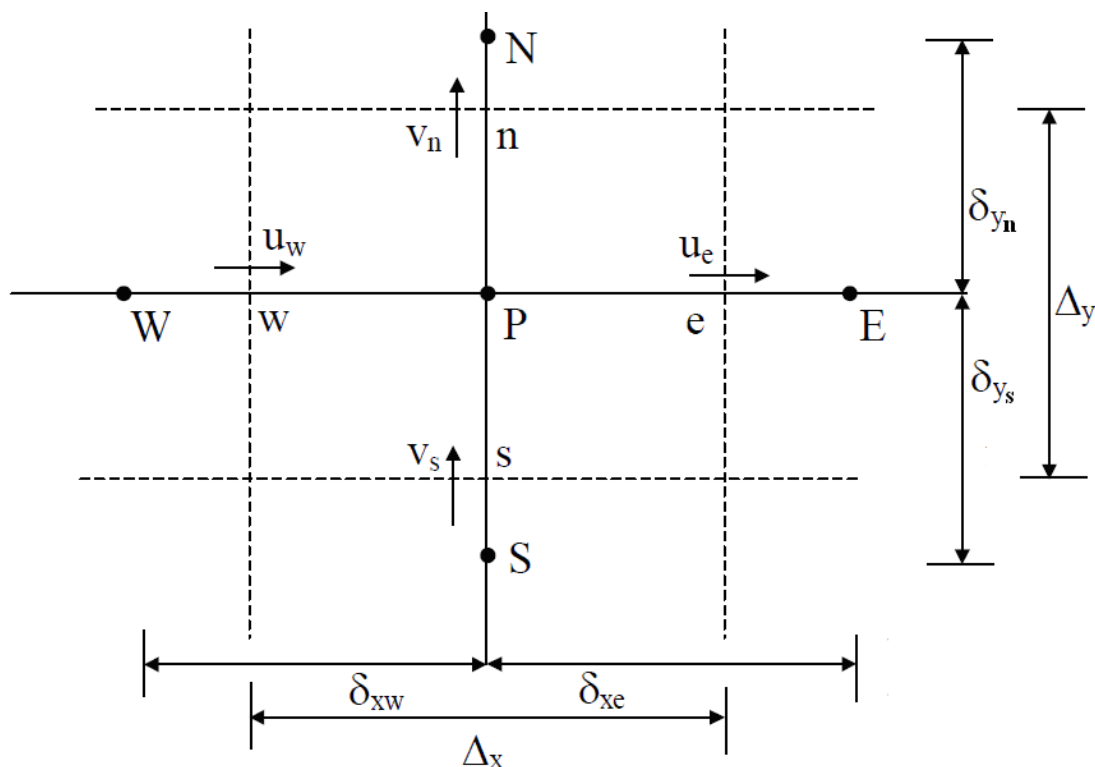


Figura 4-1 – Representação de um volume de controle e sua vizinhança

O método consiste na integração das equações diferenciais de conservação em cada volume de controle. Assumindo perfis para a variação das variáveis entre pontos nodais, obtêm-se as equações discretizadas. Assim, as equações discretizadas expressam o princípio de conservação da mesma forma que a equação diferencial faz para volumes infinitesimais, garantindo desta forma a conservação integral das grandezas envolvidas.

#### 4.1 SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DIFUSIVOS

Dada a equação geral de transporte na forma diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot (\rho\phi\vec{U}) = \nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi) + S_\phi \quad (4.1)$$

O problema difusivo bidimensional transiente é dado pela equação

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) = \nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi) + S_\phi \quad (4.2)$$

Integrando cada termo da equação no domínio definido pelo volume de controle representado na Figura 4-1

$$\int_{VC} \left( \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) \right) dV = \int_{VC} (\nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi)) dV + \int_{VC} (S_\phi) dV \quad (4.3)$$

O Teorema da Divergência ou de Gauss indica que para um volume delimitado por uma superfície fechada arbitrária, tomando-se em cada ponto da superfície a normal externa, tem-se:

$$\int_S (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = \int_V \nabla \cdot \vec{u} dV \quad (4.4)$$

Então o primeiro termo do lado direito da equação pode ser transformado em integral da superfície tomando a seguinte forma:

$$\int_{VC} \left( \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) \right) dV = \int_S ((\Gamma\nabla\phi) \cdot \vec{n}) dS + \int_{VC} (S_\phi) dV \quad (4.5)$$

De acordo com a Figura 4-1 o primeiro termo do lado direito da equação acima será integrado nas faces  $w$ ,  $e$ ,  $s$  e  $n$  do volume de controle, o que leva à seguinte equação:

$$\int_{VC} \left( \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) \right) dV = \int \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w dy + \int \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s dx + \int_{VC} (S_\phi) dV \quad (4.6)$$

A equação acima ainda é uma expressão exata para a conservação da propriedade no volume em questão, pois a forma de cálculo dos fluxos médios através das faces e das densidades médias no volume ainda não foi especificada. A aproximação dessas grandezas utilizando seus valores em pontos discretos da malha e em um dado instante de tempo é que produz o erro da aproximação numérica (Lage, 2001).

A equação anterior deve ser discretizada segundo a malha da Figura 4-1. As derivadas parciais de primeira ordem em relação a  $x$  devem ser aproximadas nas faces designadas por  $e$  e  $w$ , enquanto que as derivadas parciais em relação a  $y$  tem de ser calculadas nas faces  $n$  e  $s$ . Para que a equação discretizada inclua apenas os pontos  $P$ ,  $W$ ,  $E$ ,  $S$  e  $N$ , a única maneira de se aproximar estas derivadas é ao longo das curvas que passam pelo ponto médio das faces,  $x=x_p$  e  $y=y_p$  obtendo-se o resultado expresso pelas equações abaixo (Lage, 2001).

$$\Gamma \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w = \Gamma_w \frac{(\phi_P - \phi_W)}{\delta x_w} \quad (4.7)$$

$$\Gamma \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s = \Gamma_s \frac{(\phi_P - \phi_S)}{\delta y_s} \quad (4.8)$$

Analogamente para as faces  $e$  e  $n$ , chega-se a seguinte equação discreta

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{\Delta t} (\rho_P \phi_P) - \frac{\Delta V}{\Delta t} (\rho_P \phi_P)^0 = & - \frac{\Gamma_w}{\delta x_w} (\phi_P - \phi_W) \Delta y + \frac{\Gamma_e}{\delta x_e} (\phi_E - \phi_P) \Delta y - \\ & \frac{\Gamma_s}{\delta y_s} (\phi_S - \phi_P) \Delta x + \frac{\Gamma_n}{\delta y_n} (\phi_P - \phi_N) \Delta x + (S_u + S_P \phi_P) \Delta V \end{aligned} \quad (4.9)$$

Nota-se que estas aproximações para as derivadas se referem a apenas um ponto sobre cada uma das faces, ponto obtido pela interseção da curva  $x=x_p$  ou  $y=y_p$ . Estes valores serão considerados como representativos sobre as faces correspondentes, de modo que os integrandos da Eq. (4.6) passam a ser considerados constantes. Assim, a seguinte equação discretizada é obtida (Lage, 2001).

$$a_p \phi_p = a_w \phi_w + a_e \phi_e + a_s \phi_s + a_n \phi_n + b \quad (4.10)$$

Onde

$$a_w = \frac{\Gamma_w}{\delta x_w} \Delta y \quad (4.11)$$

$$a_e = \frac{\Gamma_e}{\delta x_e} \Delta y \quad (4.12)$$

$$a_s = \frac{\Gamma_s}{\delta x_s} \Delta x \quad (4.13)$$

$$a_n = \frac{\Gamma_n}{\delta x_n} \Delta x \quad (4.14)$$

$$a_p = a_w + a_e + a_s + a_n + \rho_p \frac{\Delta V}{\Delta t} - S_p \Delta V \quad (4.15)$$

$$b = \rho_p^0 \frac{\Delta V}{\Delta t} \phi_p^0 + S_u \Delta V \quad (4.16)$$

## 4.2 SOLUÇÃO DE PROBLEMAS ADVECTIVO-DIFUSIVOS

A diferença em relação aos problemas puramente difusivos é a presença dos termos de transporte convectivo da grandeza conservada. Estes termos, ao serem discretizados, impõem a necessidade da especificação dos valores da grandeza conservada nas faces dos volumes finitos. Esta interpolação do valor da variável dependente necessita de cuidados especiais, ou o esquema numérico será instável (Lage, 2001).

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot (\rho\phi\vec{U}) = \nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi) + S_\phi \quad (4.17)$$

Integrando cada termo da equação no domínio definido pelo volume de controle representado na Figura 4-1

$$\int_{VC} \left( \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) \right) dV + \int_{VC} \nabla \cdot (\rho\phi\vec{U}) = \int_{VC} (\nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi)) dV + \int_{VC} (S_\phi) dV \quad (4.18)$$

O Teorema da Divergência ou de Gauss indica que para um volume delimitado por uma superfície fechada arbitrária, tomando-se em cada ponto da superfície a normal externa, tem-se:

$$\int_S (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = \int_V \nabla \cdot \vec{u} dV \quad (4.19)$$

Então o segundo termo do lado esquerdo e o primeiro termo do lado direito da equação podem ser transformados em integrais de superfície tomando a seguinte forma:

$$\int_{VC} \left( \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) \right) dV + \int_S ((\rho\phi\vec{U}) \cdot \vec{n}) dS = \int_S ((\Gamma\nabla\phi) \cdot \vec{n}) dS + \int_{VC} (S_\phi) dV \quad (4.20)$$

De acordo com a Figura 4-1 o segundo termo do lado esquerdo e o primeiro termo do lado direito da equação acima serão integrados nas faces  $w$ ,  $e$ ,  $s$  e  $n$  do volume de controle, o que leva à seguinte equação:

$$\begin{aligned} \int_{VC} \left( \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) \right) dV + \int_{\substack{w \\ e \\ s \\ n}} (\rho\phi\vec{U}) \cdot \vec{n} dS &= \int_{\substack{w \\ e \\ s \\ n}} (\Gamma\nabla\phi) \cdot \vec{n} dS + \int_{VC} (S_\phi) dV \\ \int_{\substack{w \\ e \\ s \\ n}} \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) dy + \int_{\substack{w \\ e \\ s \\ n}} \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) dx + \int_{VC} (S_\phi) dV &= \end{aligned} \quad (4.21)$$

O termo de variação no tempo e os termos difusivos da equação acima podem ser tratados como vistos anteriormente. Então, ao resolver a equação acima, se chega à seguinte equação discreta:

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta V}{\Delta t} (\rho_P \phi_P)^{n+1} - \frac{\Delta V}{\Delta t} (\rho_P \phi_P)^n - \rho_w u_w \phi_w \Delta y + \rho_e u_e \phi_e \Delta y - \rho_s u_s \phi_s \Delta x + \rho_n u_n \phi_n \Delta x = \\
& - \frac{\Gamma_w}{\delta x_w} (\phi_P - \phi_w) \Delta y + \frac{\Gamma_e}{\delta x_e} (\phi_E - \phi_P) \Delta y - \frac{\Gamma_s}{\delta y_s} (\phi_S - \phi_P) \Delta x + \frac{\Gamma_n}{\delta y_n} (\phi_P - \phi_N) \Delta x + (S_u + S_P \phi_P) \Delta V
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Nota-se que estas aproximações para as derivadas se referem a apenas um ponto sobre cada uma das faces, ponto obtido pela interseção da curva  $x=x_p$  ou  $y=y_p$ . Estes valores serão considerados como representativos sobre as faces correspondentes, de modo que os integrandos da Eq. (4.21) passam a ser considerados constantes (Lage, 2001).

Definindo:

$$D = \frac{\Gamma}{\delta x_i} \tag{4.23}$$

$$F = \rho u \tag{4.24}$$

A equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta V}{\Delta t} (\rho_P \phi_P) - \frac{\Delta V}{\Delta t} (\rho_P \phi_P)^0 - F_w \phi_w \Delta y + F_e \phi_e \Delta y - F_s \phi_s \Delta x + F_n \phi_n \Delta x = \\
& - D_w (\phi_P - \phi_w) \Delta y + D_e (\phi_E - \phi_P) \Delta y - D_s (\phi_S - \phi_P) \Delta x + D_n (\phi_P - \phi_N) \Delta x + (S_u + S_P \phi_P) \Delta V
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Os valores de  $\phi$  interpolados nas faces precisam ser agora determinados. Utilizando a mesma hipótese de variação linear de  $\phi$  com  $x$  e  $y$  que originou a aproximação dos termos difusivos, podem-se interpolar estes valores através de uma média ponderada, esse método é chamado de diferenças centrais, isto é:

$$\phi_w = \frac{\delta x_w^+ \phi_w + \delta x_w^- \phi_P}{\delta x_w} \tag{4.26}$$

$$\phi_e = \frac{\delta x_e^+ \phi_P + \delta x_e^- \phi_E}{\delta x_e} \tag{4.27}$$



$$\phi_s = \frac{\delta y_s^+ \phi_s + \delta y_s^- \phi_P}{\delta y_s} \quad (4.28)$$

$$\phi_n = \frac{\delta y_n^+ \phi_P + \delta y_n^- \phi_N}{\delta y_n} \quad (4.29)$$

Para malhas uniformes,  $\delta x_w = \delta x_e = \delta x$  e  $\delta x_w^+ = \delta x_w^- = \delta x_e^+ = \delta x_e^- = \frac{\delta x}{2}$ .

Substituindo essas equações na equação acima, é obtida a seguinte equação discretizada:

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + b \quad (4.30)$$

Onde

$$a_W = D_w \Delta y + F_w \frac{\delta x_w^+}{\delta x_w} = D_w \left( 1 + Pe_w \frac{\delta x_w^+}{\delta x_w} \right) \quad (4.31)$$

$$a_E = D_e \Delta y - F_e \frac{\delta x_e^-}{\delta x_e} = D_e \left( 1 - Pe_e \frac{\delta x_e^-}{\delta x_e} \right) \quad (4.32)$$

$$a_S = D_s \Delta x + F_s \frac{\delta y_s^+}{\delta y_s} = D_s \left( 1 + Pe_s \frac{\delta y_s^+}{\delta y_s} \right) \quad (4.33)$$

$$a_N = D_n \Delta x - F_n \frac{\delta y_n^-}{\delta y_n} = D_n \left( 1 - Pe_n \frac{\delta y_n^-}{\delta y_n} \right) \quad (4.34)$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + (F_e - F_w) \Delta y + (F_n - F_s) \Delta x + \rho_P \frac{\Delta \Psi}{\Delta t} - S_P \Delta \Psi \quad (4.35)$$

$$b = \rho_P^0 \frac{\Delta \Psi}{\Delta t} \phi_P^0 + S_u \Delta \Psi \quad (4.36)$$

A seguinte variável é definida

$$Pe = \frac{F}{D} \quad (4.37)$$

$Pe$  é o número de Péclet da malha. A seguinte relação deve ser satisfeita, para que os coeficientes sejam positivos:

$$-2 < Pe < 2 \quad (4.38)$$

A equação acima é efetivamente uma restrição ao tamanho da malha que pode ser usada para resolver os problemas de convecção-difusão. Na medida em que  $u$  aumenta, o tamanho da malha tem de diminuir para que a restrição seja satisfeita. Isto leva a malhas excessivamente grandes para problemas que são dominados pela convecção. Nota-se que a malha não é grande devido à complexidade do problema, e sim a restrição de estabilidade. Assim, o uso da discretização obtida usando as equações que caracterizam o método das diferenças centrais tem limitações práticas, e outras formas de interpolação de  $\phi$  nas faces deve ser utilizada (Lage, 2001).

A interpretação física da dificuldade da discretização anterior em representar corretamente a solução do problema pode ser obtida das próprias Eqs. (4.26) a (4.29), onde o valor interpolado de  $\phi$  nas faces não depende do valor da velocidade  $u$ . Entretanto, sabe-se que quando a convecção domina o valor de  $\phi$  em uma dada face tem uma dependência maior com o valor da variável a montante do que com o valor a jusante, tendendo a ser igual ao valor a montante quando a velocidade tende a infinito (Lage, 2001).

De acordo com essas hipóteses são apresentados a seguir alguns métodos numéricos existentes na literatura para superar essa restrição de estabilidade. Para facilitar a abordagem, serão abordados nos tópicos seguintes problemas de convecção-difusão unidimensional, sem geração e em regime permanente.

#### 4.2.1 Esquema Upwind

Do exposto, pode-se pensar na seguinte forma de interpolar os valores de  $\phi$  nas faces para os problemas dominados pela convecção: O valor de  $\phi$  na face é igual ao valor de  $\phi$  no volume a montante.

Então, se o fluxo vai da esquerda para a direita, ou seja,  $F_w > 0$  e  $F_e > 0$  o esquema upwind determina:

$$\phi_w = \phi_W \quad (4.39)$$

$$\phi_e = \phi_P \quad (4.40)$$

E a equação discretizada se torna

$$-F_w \Delta y \phi_W + F_e \Delta y \phi_P = -D_w (\phi_P - \phi_W) \Delta y + D_e (\phi_E - \phi_P) \Delta y \quad (4.41)$$

Que pode ser rearranjada como:

$$[(D_w + F_w) \Delta y + D_e \Delta y + (F_e - F_w) \Delta y] \phi_P = (D_w + F_w) \Delta y \phi_W + D_e \Delta y \phi_E \quad (4.42)$$

Se o fluxo vai da esquerda para a direita  $F_w < 0$  e  $F_e < 0$ :

$$\phi_w = \phi_P \quad (4.43)$$

$$\phi_e = \phi_E \quad (4.44)$$

E a equação discretizada se torna

$$-F_w \Delta y \phi_P + F_e \Delta y \phi_E = -D_w (\phi_P - \phi_W) \Delta y + D_e (\phi_E - \phi_P) \Delta y \quad (4.45)$$

Que pode ser rearranjada como:

$$[(D_e + F_e) \Delta y + D_w \Delta y + (F_e - F_w) \Delta y] \phi_P = (D_e + F_e) \Delta y \phi_E + D_w \Delta y \phi_W \quad (4.46)$$

Desta forma chega-se a seguinte equação na forma canônica:

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + b \quad (4.47)$$

Onde:

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) \Delta y \quad (4.48)$$

$$a_W = (D_w + \max(F_w, 0)) \Delta y \quad (4.49)$$

$$a_E = (D_e + \max(-F_e, 0)) \Delta y \quad (4.50)$$

$$b = 0 \quad (4.51)$$

Existem outros esquemas de solução de problemas advectivos, alguns dos mais citados na literatura estão formulados no APÊNDICE B como material informativo.

#### 4.3 SOLUÇÃO DO ACOPLAMENTO PRESSÃO-VELOCIDADE

Nos tópicos anteriores foi formulado o procedimento para resolver a equação geral de transporte na presença de um campo de velocidades conhecido. Contudo, exceto em circunstâncias especiais, não é possível conhecer previamente o campo de escoamento, antes de calcular as componentes da velocidade local e o campo de densidade da equação governante apropriada (Patankar, 1980).

As componentes da velocidade são governadas pela equação da quantidade de movimento, que é um caso particular da equação geral de transporte (com  $\phi = u$ ,  $\Gamma = \mu$  na direção  $x$  de escoamento,  $\phi = v$ ,  $\Gamma = \mu$ , para direção  $y$ ). Com o método desenvolvido anteriormente é possível calcular o campo de escoamento local, salvo algumas restrições (Patankar, 1980).

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} \cdot (\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y} \cdot (\rho v u) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + S_u \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot (\rho v) + \frac{\partial}{\partial x} \cdot (\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y} \cdot (\rho v v) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + S_v \quad (4.53)$$

A dificuldade real no cálculo do campo de velocidades está em determinar o campo de pressões. O gradiente de pressão forma uma parte do termo fonte para a equação da quantidade de movimento. Contudo, não há uma equação discretizada para a pressão. Para um campo de pressão dado não há dificuldade particular para se resolver a equação do momentum. Porém, o meio de se determinar o campo de pressão é mais difícil (Patankar, 1980).

O campo de pressão é indiretamente especificado pela equação da continuidade. Quando o campo de pressões correto é substituído na equação da quantidade de movimento, o campo de velocidades resultante deve

satisfazer a equação da continuidade. Dessa forma o problema pressão-velocidade pode ser resolvido adotando uma solução iterativa (Patankar, 1980).

Equação da continuidade

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} \cdot (\rho v) = 0 \quad (4.54)$$

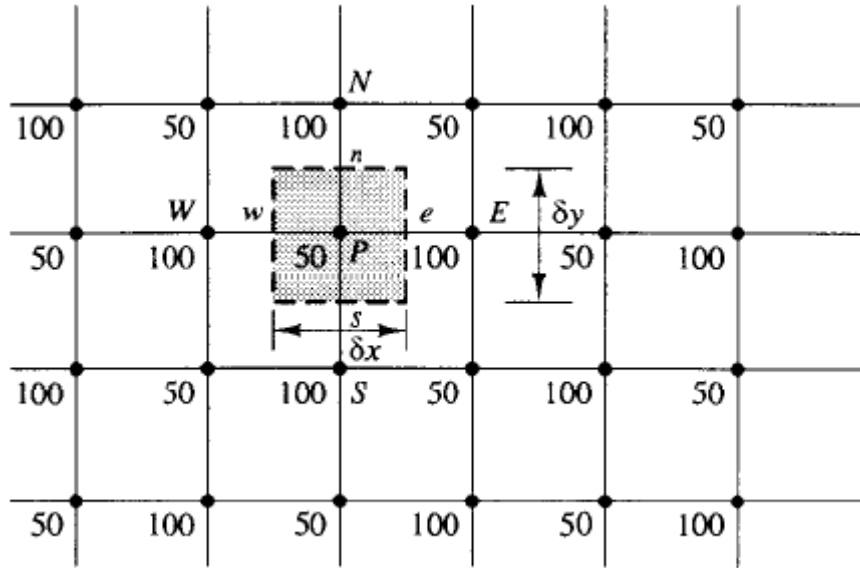
Ao se iniciar a construção da discretização da equação da quantidade de movimento, a integração do gradiente de pressão resulta na diferença  $P_W - P_E$  na direção  $x$  e  $P_S - P_N$  na direção  $y$ , que é a parcela de força por área exercida no volume de controle pelo campo de pressões. Para expressar  $P_W - P_E$  e  $P_S - P_N$  em termos de pontos nodais, se as faces volume de controle  $w$ ,  $e$ ,  $s$  e  $n$  são localizadas a meia distância do centro, tem-se:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{(P_e - P_w)}{\delta x} = \frac{\frac{(P_E + P_P)}{2} - \frac{(P_P + P_W)}{2}}{\delta x} = \frac{(P_E - P_W)}{2\delta x} \quad (4.55)$$

Similarmente para o gradiente de pressão na direção  $y$ :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{(P_N - P_S)}{2\delta y} \quad (4.56)$$

Dessa forma a equação da quantidade de movimento conterà a diferença de pressão entre dois pontos alternados e não dois pontos adjacentes. A consequência para isso é que a pressão será tomada de forma mais grosseira do que estava sendo. Isso tenderia a reduzir a exatidão da solução. Porém há outro problema ainda mais sério que pode ser visto melhor na Figura 4-2 onde o campo de pressões é proposto em termos discretos para cada ponto nodal. Tal campo de pressões em zigzag não pode ser considerado uma realidade, contudo, para qualquer campo de pressão, o valor da pressão no ponto  $P$ , expresso em termos de  $P_W - P_E$  e  $P_S - P_N$ , pode se calculado como zero, uma vez que os valores alternativos de pressão sejam dados em todas as direções. Assim, é devastadora a consequência de um campo de pressões ondulado ser tratado como um campo de pressões uniforme pela equação da continuidade (Patankar, 1980).



**Figura 4-2 –Exemplo de campo de pressão. (Malalasekera,1995)**

Uma dificuldade similar é encontrada ao tentar discretizar a equação da continuidade. Para regime estacionário bidimensional com densidade constante a equação da continuidade pode ser simplificada para:

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} \cdot (\rho v) = 0 \quad (4.57)$$

Integrando essa equação no volume de controle visto na Figura 4-2, tem-se:

$$(\rho u)_e - (\rho u)_w + (\rho v)_n - (\rho v)_s = 0 \quad (4.58)$$

Sendo a densidade constante:

$$u_e - u_w + v_n - v_s = 0 \quad (4.59)$$

Para expressar  $u$  e  $v$  em termos de pontos nodais, se as faces volume de controle  $w$ ,  $e$ ,  $s$  e  $n$  são localizadas a meia distância do centro, tem-se:

$$\frac{u_P + u_E}{2} - \frac{u_W + u_P}{2} + \frac{v_N + v_P}{2} - \frac{v_P + v_S}{2} = 0 \quad (4.60)$$

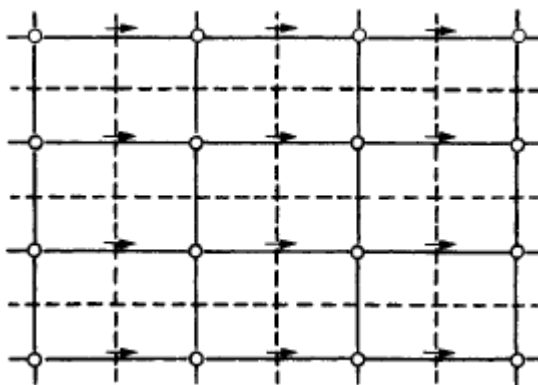
Ou

$$u_E - u_W + v_N - v_S = 0 \quad (4.61)$$

Assim, acontece um caso similar ao descrito anteriormente para o campo de pressões. Um campo de velocidades ondulado pode satisfazer a equação da continuidade, porém essa não seria a solução ideal.

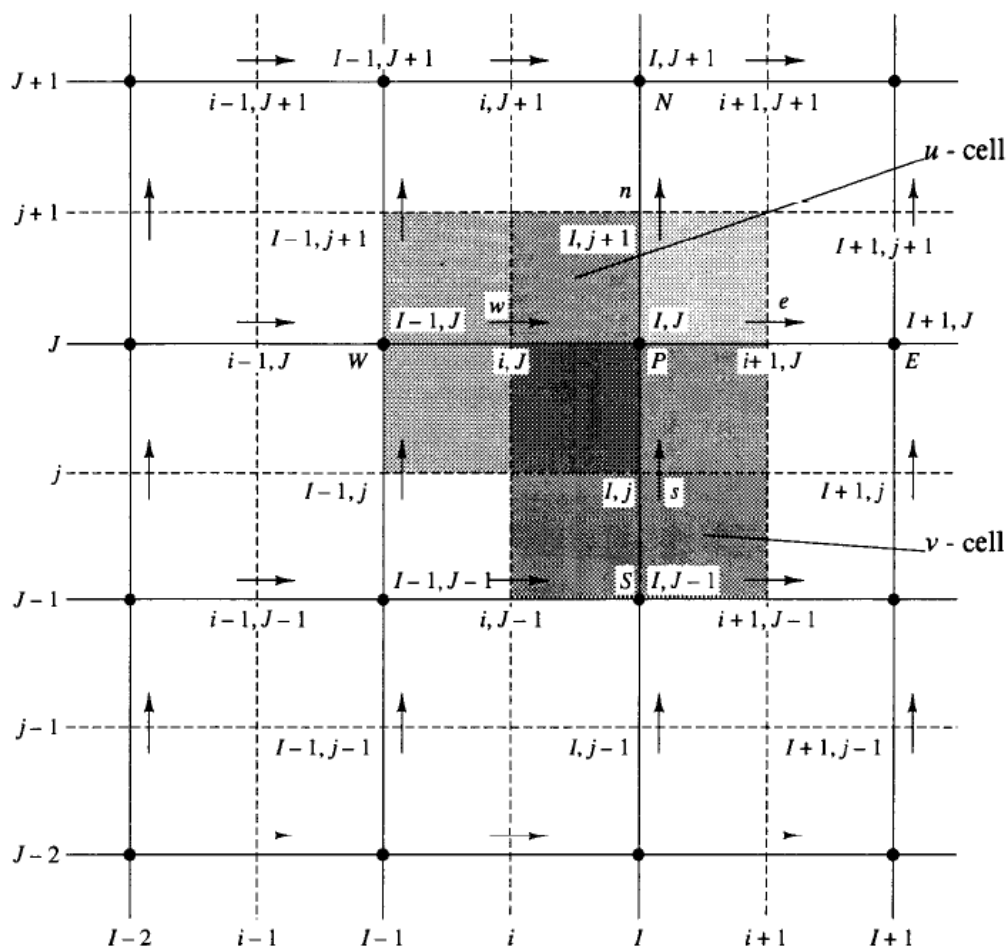
As dificuldades descritas até agora podem ser resolvidas sabendo que não é necessário calcular todas as variáveis para a mesma malha. Pode-se empregar uma rede diferente (malha defasada) para cada variável dependente. No caso dos componentes da velocidade há um significativo benefício a ser obtido por organizar a malha em diferentes variáveis. O benefício é que as dificuldades descritas anteriormente seriam totalmente superadas (Patankar, 1980).

Usando a técnica de malha defasada, as componentes da velocidade são calculadas na face do volume de controle. Desse modo, a componente  $u$  da velocidade é calculada no ponto médio da face normal a direção  $x$ . A localização da velocidade  $u$  pode ser vista na Figura 4-3 pelas setas, enquanto os pontos nodais são representados pelos pequenos círculos. As linhas pontilhadas indicam as faces dos volumes de controle.



**Figura 4-3 –Malha da componente  $u$  da velocidade defasada. (Patankar, 1980)**

Procedendo analogamente, fica fácil de ver como que a localização da componente  $v$  da velocidade é definida. Na Figura 4-4 é representada a disposição dos volumes de controle para a malha defasada para as componentes  $u$  e  $v$  da velocidade (Patankar, 1980).



**Figura 4-4 – Malha defasada. (Malalasekera,1995)**

A consequência imediata de se usar malhas defasadas é que o fluxo de massa através das faces do volume de controle (representado pelos coeficientes  $F$ 's dos itens anteriores) pode ser calculado sem nenhuma interpolação. No entanto, esta característica, embora tenha certa comodidade na discretização da equação geral para  $\phi$ , não é a mais importante vantagem no uso de malhas defasadas (Patankar, 1980).

As vantagens mais importantes são duas. Para o uso de malhas defasadas é fácil de ver que a equação da continuidade conteria a diferença de componentes de velocidade adjacentes, e que isso preveniria a ocorrência de um campo de velocidades ondulado, logo, apenas um campo de velocidades razoáveis teriam a possibilidade de ser aceito na equação da continuidade. A segunda vantagem no uso de malhas defasadas é que a diferença de pressão entre dois pontos nodais adjacentes agora se torna uma tendência natural de



força para a componente de velocidade localizada entre esses pontos. Conseqüentemente, o campo de pressões visto na Figura 4-2 deixaria de ser sentido como um campo uniforme e não seria aceito como possível solução (Patankar, 1980).

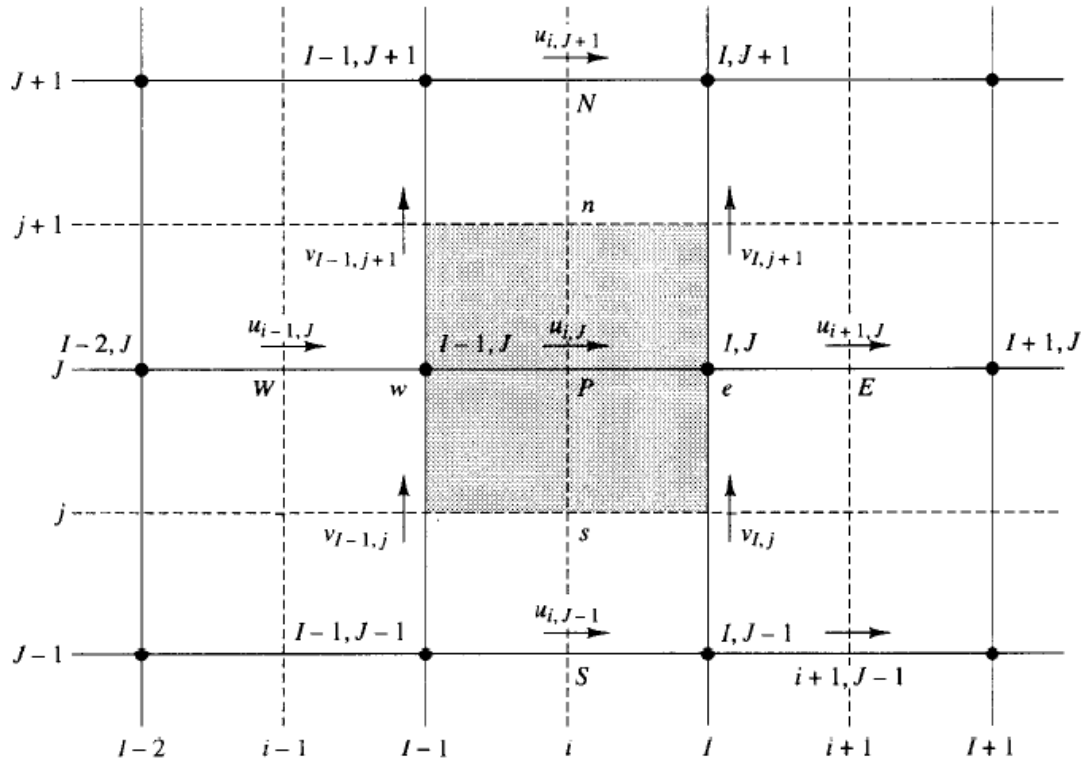
Com o uso de malhas defasadas os gradientes de pressão nas direções  $x$  e  $y$  são dados por:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{(P_E - P_W)}{\delta x_u} \quad (4.62)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{(P_N - P_S)}{\delta y_v} \quad (4.63)$$

As dificuldades descritas podem, então, ser atribuídas a prática de calcular todas as variáveis usando pontos nodais comuns para velocidade e pressão; com o uso de malha defasada essas dificuldades são inteiramente superadas (Patankar, 1980).

Adotar o uso de malha defasada faz da discretização da equação da conservação da quantidade de movimento um tanto diferente da discretização das outras equações onde o cálculo da variável  $\phi$  era feito em malha coincidente. Porém essa diferença é apenas um detalhe e não a essência (Patankar, 1980).



**Figura 4-5 – Volume de controle em u e as componentes de velocidade da sua vizinhança. (Malalasekera,1995)**

O cálculo dos coeficientes de difusão e convecção nas faces do volume de controle centrado nas velocidades (Figura 4-5) requer interpolações apropriadas, porém essencialmente a formulação é similar a descrita nos itens 4.1 e 4.2. Logo a discretização resultante da equação da conservação da quantidade de movimento pode ser escrita como:

$$a_{i,J}u_{i,J} = \sum a_{nb}u_{nb} - \frac{(P_{I,J} - P_{I-1,J})}{\delta x_u} \Delta V_u + \bar{S} \Delta V_u \quad (4.64)$$

Ou

$$a_{i,J}u_{i,J} = \sum a_{nb}u_{nb} + (P_{I-1,J} - P_{I,J})A_{i,J} + b_{i,J} \quad (4.65)$$

Aqui o número de termos vizinhos dependerá da quantidade de dimensões que o problema está tratando. Os coeficientes vizinhos ( $a_{nb}$ ) avaliam a influência da difusão e convecção no volume de controle. O termo  $b$  é definido de maneira similar aos itens anteriores (Patankar, 1980).

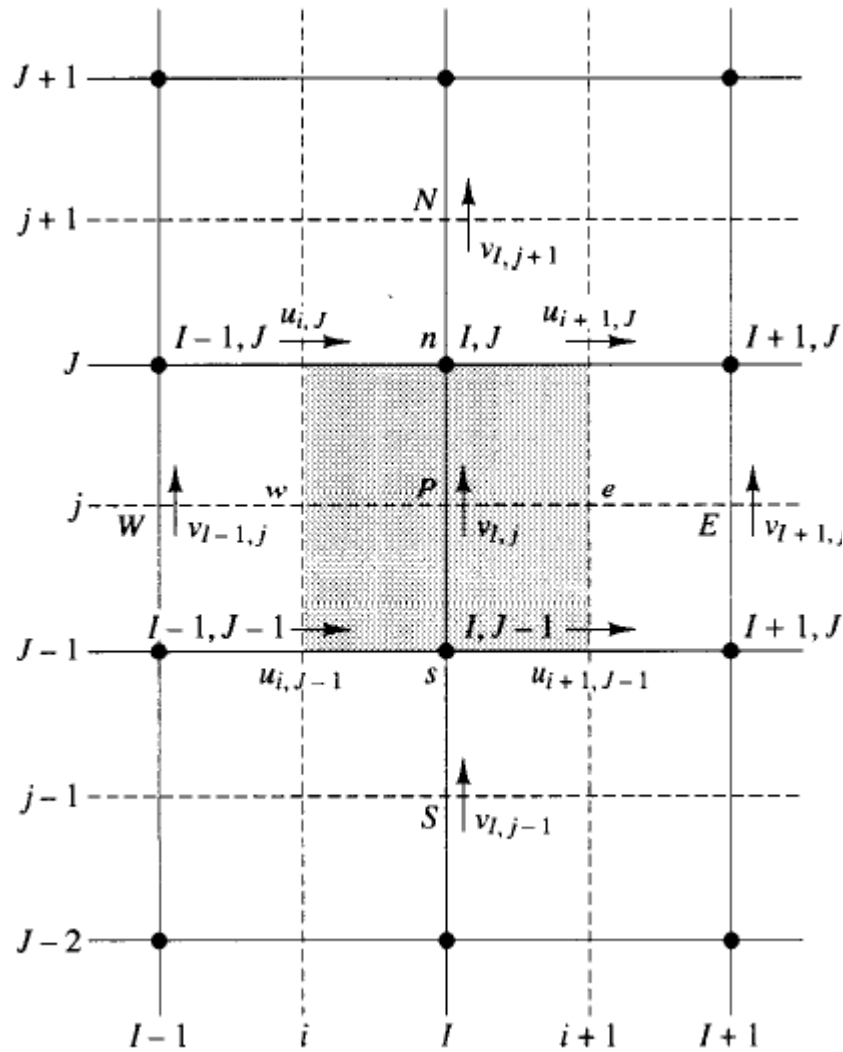


Figura 4-6 – Volume de controle em  $v$  e as componentes de velocidade da sua vizinhança. (Malalasekera,1995)

A discretização da equação da quantidade de movimento para a direção  $y$  é manipulada de maneira similar. A Figura 4-6 representa o volume de controle para a equação da quantidade de movimento na direção  $y$ ; a malha é defasada na direção  $y$ . Logo, a discretização da equação para  $v$  é dada por:

$$a_{I,j}v_{I,j} = \sum a_{nb}v_{nb} + (P_{I,J-1} - P_{I,J})A_{I,j} + b_{I,j} \quad (4.66)$$

#### 4.3.1 Algoritmo Semi Implicit Method for Pressure-Linked Equations (SIMPLE)

A equação da quantidade de movimento só pode ser resolvida quando o campo de pressões é dado ou é, de alguma forma, estimado. A não ser que um campo de pressões correto é utilizado, o campo de velocidades resultante não

satisfará a equação da continuidade. Tal imperfeito campo de velocidades, baseado no campo de pressões  $P^*$  suposto, será denotado por  $u^*$  e  $v^*$ . Esse campo de velocidades “asterisco” resultará da solução das seguintes equações discretizadas (Patankar, 1980):

$$a_{i,j}u_{i,j}^* = \sum a_{nb}u_{nb}^* + (P_{I-1,j}^* - P_{I,j}^*)A_{i,j} + b_{i,j} \quad (4.67)$$

$$a_{I,j}v_{I,j}^* = \sum a_{nb}v_{nb}^* + (P_{I,j-1}^* - P_{I,j}^*)A_{I,j} + b_{I,j} \quad (4.68)$$

Se as equações obtidas acima forem subtraídas da equação da quantidade de movimento para velocidades e pressões corretas, surgirão novas equações descritas por:

$$a_{i,j}(u_{i,j} - u_{i,j}^*) = \sum a_{nb}(u_{nb} - u_{nb}^*) + [(P_{I-1,j} - P_{I-1,j}^*) - (P_{I,j} - P_{I,j}^*)]A_{i,j} \quad (4.69)$$

$$a_{I,j}(v_{I,j} - v_{I,j}^*) = \sum a_{nb}(v_{nb} - v_{nb}^*) + [(P_{I,j-1} - P_{I,j-1}^*) - (P_{I,j} - P_{I,j}^*)]A_{I,j} \quad (4.70)$$

Admitindo que as velocidades e pressões “asterisco” são valores aproximados, seus respectivos valores reais podem ser obtidos somando um termo de correção como nas seguintes equações:

$$u = u^* + u' \quad (4.71)$$

$$v = v^* + v' \quad (4.72)$$

$$P = P^* + P' \quad (4.73)$$

Substituindo essa relação nas Eqs. (4.69) e (4.70) chega-se às equações abaixo de correção para as velocidades.

$$a_{i,j}u'_{i,j} = \sum a_{nb}u'_{nb} + (P'_{I-1,j} - P'_{I,j})A_{i,j} \quad (4.74)$$

$$a_{I,j}v'_{I,j} = \sum a_{nb}v'_{nb} + (P'_{I,j-1} - P'_{I,j})A_{I,j} \quad (4.75)$$

Nesse ponto uma aproximação é introduzida:  $\sum a_{nb}u'_{nb}$  e  $\sum a_{nb}v'_{nb}$  são desconsiderados para simplificar as equações de correção das velocidades. A

omissão desses termos é a aproximação proposta pelo algoritmo SIMPLE. Dessa forma obtém (Malalasekera,1995):

$$u'_{i,j} = d_{i,j} (P'_{i-1,j} - P'_{i,j}) \quad (4.76)$$

$$v'_{i,j} = d_{i,j} (P'_{i,j-1} - P'_{i,j}) \quad (4.77)$$

Onde

$$d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}} \quad (4.78)$$

$$d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}} \quad (4.79)$$

Então a solução para as velocidades  $u$  e  $v$  é dada pelas expressões abaixo:

$$u_{i,j} = u^*_{i,j} + d_{i,j} (P'_{i-1,j} - P'_{i,j}) \quad (4.80)$$

$$v_{i,j} = v^*_{i,j} + d_{i,j} (P'_{i,j-1} - P'_{i,j}) \quad (4.81)$$

Analogamente, podem-se escrever expressões similares para  $u_{i+1,j}$  e  $v_{i,j+1}$ :

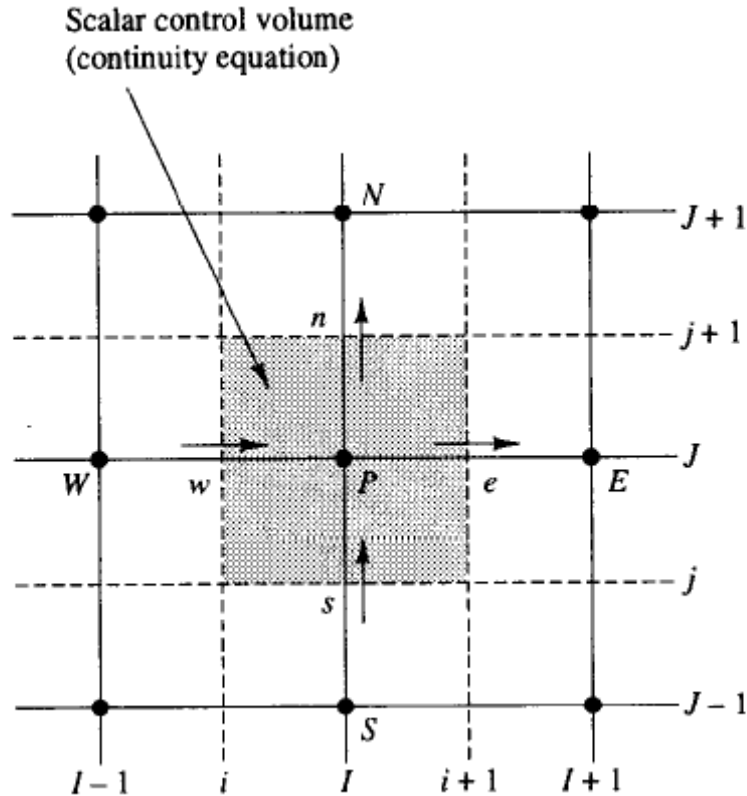
$$u_{i+1,j} = u^*_{i+1,j} + d_{i+1,j} (P'_{i,j} - P'_{i+1,j}) \quad (4.82)$$

$$v_{i,j+1} = v^*_{i,j+1} + d_{i,j+1} (P'_{i,j} - P'_{i,j+1}) \quad (4.83)$$

Onde:

$$d_{i+1,j} = \frac{A_{i+1,j}}{a_{i+1,j}} \quad (4.84)$$

$$d_{i,j+1} = \frac{A_{i,j+1}}{a_{i,j+1}} \quad (4.85)$$



**Figura 4-7 – Volume de controle usado para discretizar a equação da continuidade.**  
(Malalasekera,1995)

Assim, até este ponto, foi considerada somente a equação da quantidade de movimento, contudo, como mencionado anteriormente, o campo de velocidades também está sujeito à restrição de satisfazer a equação da continuidade. A equação da continuidade é satisfeita na forma discretizada para o volume de controle mostrado na Figura 4-7:

$$[(\rho u A)_{i+1,J} - (\rho u A)_{i,J}] + [(\rho v A)_{I,j+1} - (\rho v A)_{I,J}] = 0 \quad (4.86)$$

Substituindo os valores calculados de  $u^*$  e  $v^*$  tem-se:

$$\begin{aligned} & [\rho_{i+1,J} A_{i+1,J} (u_{i+1,J}^* + d_{i+1,J} (P'_{I,J} - P'_{I+1,J})) - \rho_{i,J} A_{i,J} (u_{i,J}^* + d_{i,J} (P'_{I-1,J} - P'_{I,J}))] + \\ & [\rho_{I,j+1} A_{I,j+1} (v_{I,j+1}^* + d_{I,j+1} (P'_{I,J} - P'_{I,j+1})) - \rho_{I,j} A_{I,j} (v_{I,j}^* + d_{I,j} (P'_{I,J-1} - P'_{I,J}))] = 0 \end{aligned} \quad (4.87)$$

Rearranjando a equação acima:

$$\begin{aligned} & [(\rho d A)_{i+1,J} + (\rho d A)_{i,J} + (\rho d A)_{I,j+1} + (\rho d A)_{I,j}] P'_{I,J} = (\rho d A)_{i+1,J} P'_{I+1,J} + (\rho d A)_{i,J} P'_{I-1,J} + \\ & (\rho d A)_{I,j+1} P'_{I,j+1} + (\rho d A)_{I,j} P'_{I,j-1} + [(p u^* A)_{i,J} - (p u^* A)_{i+1,J} + (p v^* A)_{I,j} - (p v^* A)_{I,j+1}] \end{aligned} \quad (4.88)$$

Identificando os coeficientes  $P'$ , pode-se escrever a equação acima como:

$$a_{I,J}P'_{I,J} = a_{I+1,J}P'_{I+1,J} + a_{I-1,J}P'_{I-1,J} + a_{I,J+1}P'_{I,J+1} + a_{I,J-1}P'_{I,J-1} + b'_{I,J} \quad (4.89)$$

Onde

$$a_{I,J} = a_{I+1,J} + a_{I-1,J} + a_{I,J+1} + a_{I,J-1} \quad (4.90)$$

$$a_{I+1,J} = (\rho dA)_{i+1,J} \quad (4.91)$$

$$a_{I-1,J} = (\rho dA)_{i,J} \quad (4.92)$$

$$a_{I,J+1} = (\rho dA)_{I,j+1} \quad (4.93)$$

$$a_{I,J-1} = (\rho dA)_{I,j} \quad (4.94)$$

$$b'_{I,J} = (pu^* A)_{i,J} - (pu^* A)_{i+1,J} + (pv^* A)_{I,j} - (pv^* A)_{I,j} \quad (4.95)$$

Que representa a equação da continuidade discretizada como uma equação para correção de pressão  $P'$ . O termo fonte  $b'$  na equação da continuidade é o desequilíbrio resultante do campo de velocidade incorreta  $u^*$  e  $v^*$ . A omissão dos termos  $\sum a_{nb}u'_{nb}$  e  $\sum a_{nb}v'_{nb}$  não afeta na solução final, visto que a correção de pressões e velocidades serão todos zerados na solução convergida resultando  $P^*=P$ ,  $u^*=u$  e  $v^*=v$  (Malalasekera,1995).

É importante comentar que a equação de correção de pressão é suscetível a divergir, a não ser que alguma sub-relaxação seja usada durante o processo iterativo, ou seja:

$$P^{new} = P^* + \alpha_p P' \quad (4.96)$$

Onde  $\alpha_p$  é o fator de sub-relaxação da pressão.

Por fim, o algoritmo SIMPLE é construído na forma mostrada na figura abaixo.

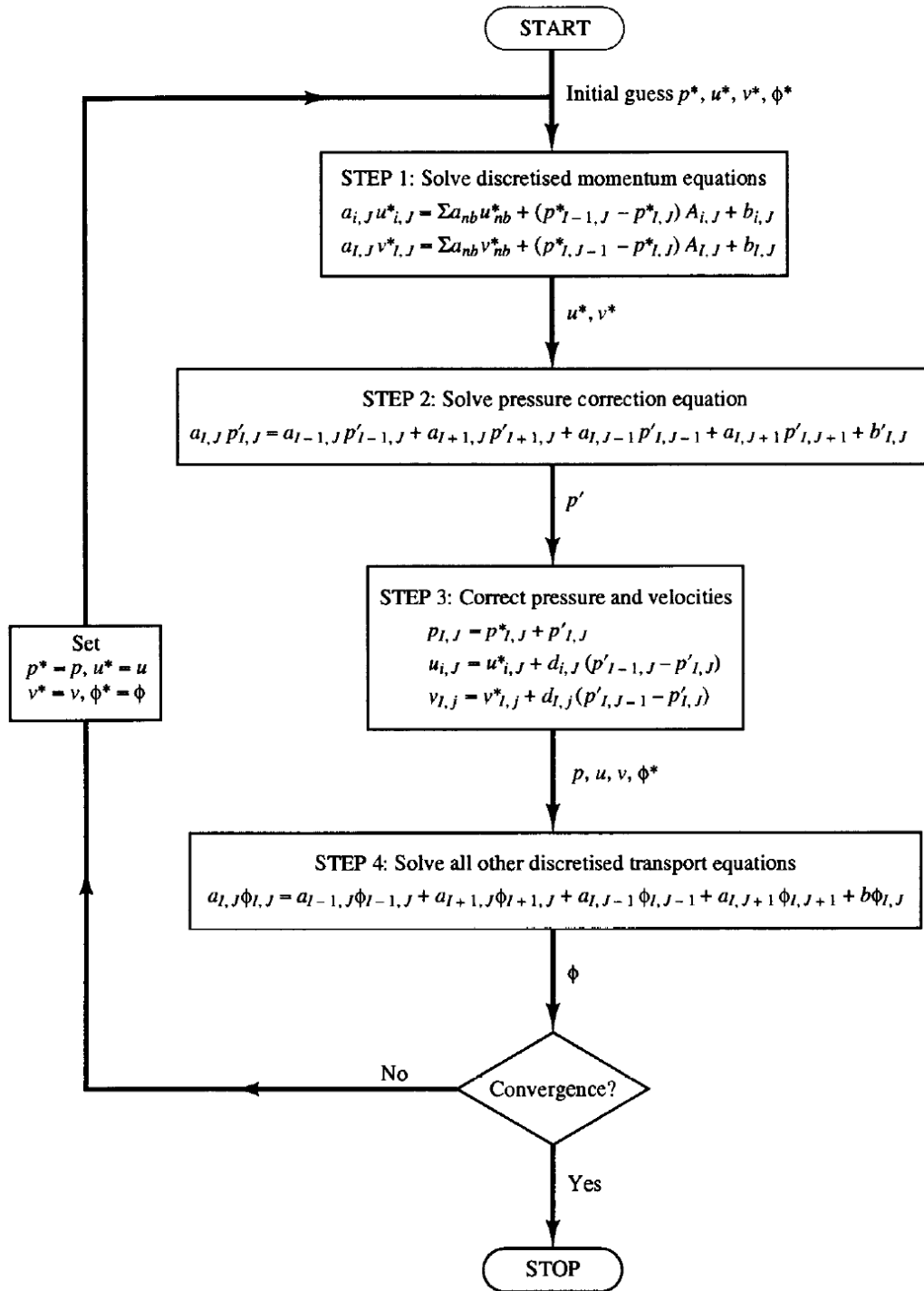


Figura 4-8 – Algoritmo SIMPLE. (Malalasekera, 1995)

#### 4.3.2 Algoritmo SIMPLE Consistente (SIMPLEC)

O método SIMPLEC tem o procedimento idêntico ao SIMPLE, diferindo apenas nas equações de correção das velocidades. No método SIMPLEC, não são desprezadas os termos  $\sum a_{nb} u'_{nb}$  e  $\sum a_{nb} v'_{nb}$  como feito no método SIMPLE (Maliska 2004).



Tomando a velocidade  $u$  como exemplo, considere a Eq. (4.74) representada abaixo:

$$a_{i,J}u'_{i,J} = \sum a_{nb}u'_{nb} + (P'_{I-1,J} - P'_{I,J})A_{i,J} \quad (4.97)$$

No método SIMPLEC, para tornar mais robusta a equação de correção das velocidades, o termo  $\sum a_{nb}u'_{i,J}$  é subtraído de ambos os lados da equação acima (Maliska 2004):

$$a_{i,J}u'_{i,J} - \sum a_{nb}u'_{i,J} = \sum a_{nb}(u'_{nb} - u'_{i,J}) + (P'_{I-1,J} - P'_{I,J})A_{i,J} \quad (4.98)$$

Agora, despreza-se o termo  $\sum a_{nb}(u'_{nb} - u'_{i,J})$  das diferenças das variações, ficando a equação de correção das velocidades como:

$$u_{i,J} = u_{i,J}^* + \frac{A_{i,J}}{a_{i,J} - \sum a_{nb}}(P'_{I-1,J} - P'_{I,J}) \quad (4.99)$$

$$u_{i,J} = u_{i,J}^* + d_{i,J}(P'_{I-1,J} - P'_{I,J}) \quad (4.100)$$

Onde:

$$d_{i,J} = \frac{A_{i,J}}{a_{i,J} - \sum a_{nb}} \quad (4.101)$$

A diferença entre os métodos SIMPLE e SIMPLEC está apenas na expressão do termo  $d_{i,J}$ , em cujo denominador, agora, aparece a diferença  $a_{i,J} - \sum a_{nb}$ , e não apenas  $a_{i,J}$ , como nos métodos SIMPLE. Tal efeito evita a severa sub-relaxação em  $P'$ , necessária no método SIMPLE para se obter a convergência (Maliska 2004).

### 4.3.3 Algoritmo SIMPLE Revisado (SIMPLER)

Como o cálculo da pressão através da Eq. (4.96) não é um procedimento robusto, o método SIMPLER apresenta uma nova maneira de calcular o campo de pressões em cada iteração, procurando associar o cálculo do campo de pressões com as equações que regem o fenômeno. A correção do campo de

velocidades é feita de maneira idêntica àquela do método SIMPLE. Para calcular a pressão, as equações do movimento, já aproximadas para os volumes finitos, para  $u$  e  $v$  são descritas na seguinte forma (Maliska 2004):

$$u_{i,j} = \hat{u}_{i,j} + \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}} (P'_{I-1,j} - P'_{I,j}) \quad (4.102)$$

$$v_{I,j} = \hat{v}_{I,j} + \frac{A_{I,j}}{a_{I,j}} (P'_{I,j-1} - P'_{I,j}) \quad (4.103)$$

É importante observar a similaridade entre as Eqs. (4.80) e (4.81) e as equações anteriores, tendo em mente que as duas primeiras não são as equações do movimento, mas sim expressões deduzidas apenas com o objetivo de criar uma maneira de corrigir as velocidades. As anteriores são, por sua vez, exatamente as equações do movimento, em que todos os termos que não aparecem explicitamente foram agrupados em  $\hat{u}_{i,j}$  e  $\hat{v}_{I,j}$  que, em cada uma das equações do movimento, respectivamente, representam uma parcela da velocidade. Essas velocidades não são obtidas com a solução de sistemas lineares, mas determinadas algebricamente, utilizando as mais recentes velocidades disponíveis, através de (Maliska 2004):

$$\hat{u}_{i,j} = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b_{i,j}}{a_{i,j}} \quad (4.104)$$

$$\hat{v}_{I,j} = \frac{\sum a_{nb} v_{nb} + b_{I,j}}{a_{I,j}} \quad (4.105)$$

O objetivo, agora, é determinar a pressão que está presente nas duas equações do movimento. Uma maneira, entre muitas, de isolar a pressão dessas três equações é substituí-la nas equações da conservação da massa. Pode-se criar qualquer outro artifício para isolar a pressão das equações do movimento. Usar a equação da conservação da massa, além de fazer a tarefa, constitui-se em uma forma robusta de fazê-la. É bom frisar que, nesse passo, não existe a necessidade de satisfazer a conservação da massa. Isso já foi

feito no passo anterior, quando as velocidades  $u^*$  e  $v^*$  foram corrigidas com o campo  $P'$  (Maliska 2004).

Introduzindo as equações acima, escritas para as faces do volume de controle para a conservação da massa, e dadas por:

$$u_{i,j} = \hat{u}_{i,j} + d_{i,j} (P_{I-1,j} - P_{I,j}) \quad (4.106)$$

$$v_{I,j} = \hat{v}_{I,j} + d_{I,j} (P_{I,j-1} - P_{I,j}) \quad (4.107)$$

Na equação de conservação da massa, obtém-se uma equação para a pressão na forma:

$$a_{I,j} P_{I,j} = a_{I+1,j} P_{I+1,j} + a_{I-1,j} P_{I-1,j} + a_{I,j+1} P_{I,j+1} + a_{I,j-1} P_{I,j-1} + b_{I,j} \quad (4.108)$$

A pressão obtida com a solução da equação anterior é a nova pressão para o próximo ciclo iterativo. Logicamente, o campo de pressões obtido com a solução da equação anterior não é utilizado para corrigir as velocidades  $\hat{u}_{i,j}$  e  $\hat{v}_{I,j}$ , uma vez que o passo de velocidades já satisfaz a equação da conservação da massa, operação realizada no item da correção da velocidade com  $P'$ . A figura abaixo representa a seqüência de cálculo para o método SIMPLER (Maliska 2004).

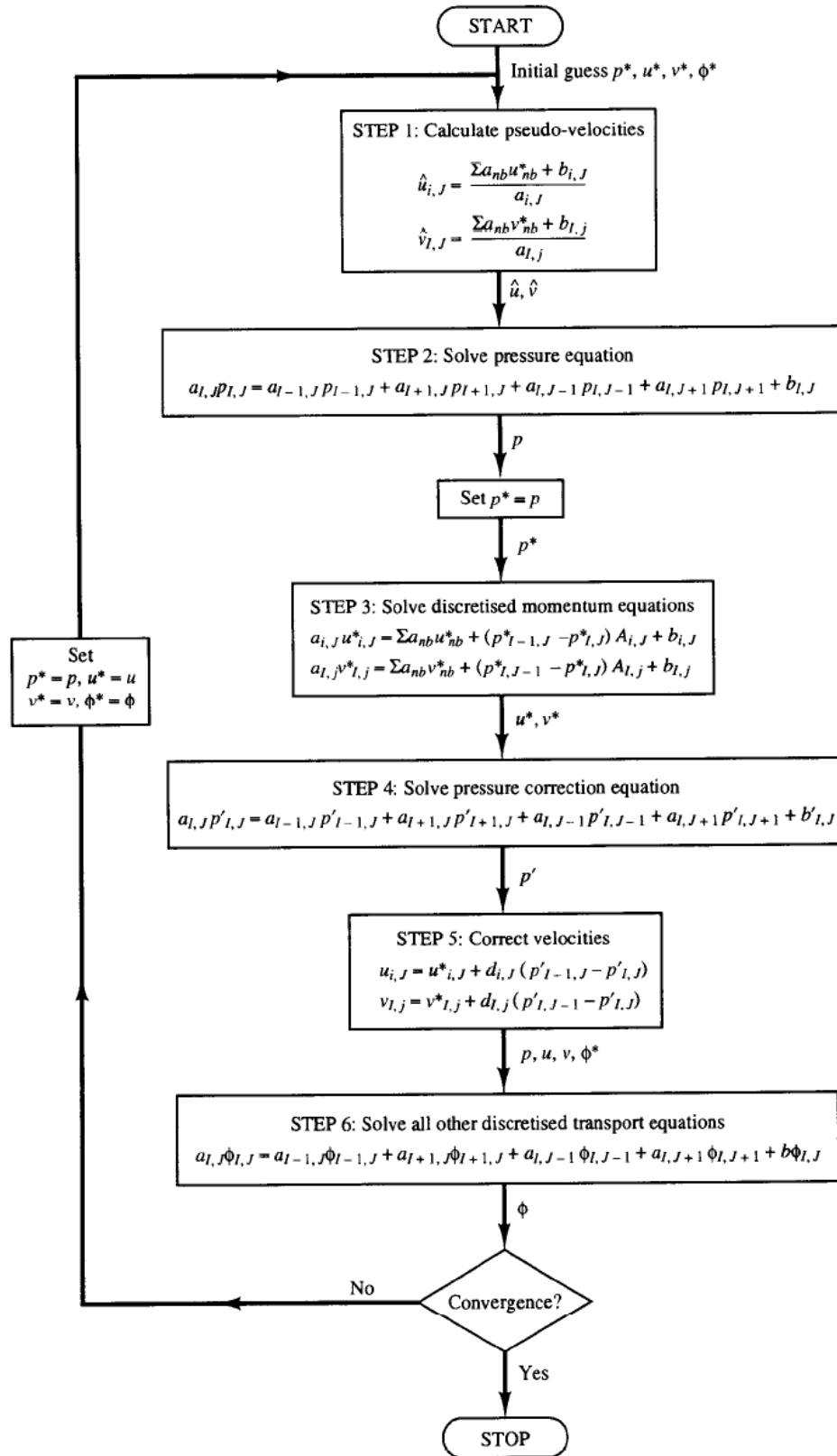


Figura 4-9 – Algoritmo SIMPLER. (Malalasekera,1995)

Neste trabalho são apresentados apenas os métodos SIMPLE, SIMPLEC e SIMPLER, porém existem outros métodos de solução do acoplamento pressão-

velocidade, como o método PRIME, PISO, CELLS entre outros, quem também podem ser implementados para calcular o campo de velocidades de um escoamento.

#### 4.4 CONSISTÊNCIA, ESTABILIDADE E CONVERGÊNCIA

Em geral, os problemas práticos de interesse da engenharia e da física dão origem a sistemas de equações complexo sobre cujos comportamentos matemáticos pouco se conhece. Por exemplo, quando se tem um problema regido por uma única equação linear, existem ferramentas matemáticas que podem provar se uma determinada aproximação numérica é estável e convergente. Quando se está trabalhando com sistemas de equações não lineares, resolvidas em geral de forma seqüencial, em que acoplamentos delicados estão presentes, é muito difícil provar matematicamente que uma aproximação numérica é estável e convergente. Seria um presente maravilhoso aos usuários de métodos numéricos se os analistas numéricos pudessem fornecer as condições (tamanho da malha, tamanho do intervalo de tempo, coeficiente de relaxação, etc) para que as aproximações numéricas dos problemas acoplados e não-lineares fossem estáveis e convergentes (Maliska 2004).

Por não se ter esses parâmetros é que a tarefa de realizar simulações numéricas, além de exigir o perfeito conhecimento da física do problema, requer experiências para encontrar os parâmetros que levam o processo iterativo para convergência. Um dos requisitos fundamentais de uma aproximação numérica é que ela reproduza a equação diferencial quando os tamanhos da malha espacial e temporal tendam a zero, Isto é, os erros de truncamento devem tender a zero quando a malha tende a um infinito número de pontos. A aproximação numérica que possuir essa característica é dita consistente. Em resumo, as equações discretizadas devem tender as equações diferenciais quando a malha tende a zero (Maliska 2004).

Outra característica importante desejada é que a solução numérica obtida seja a solução exata das equações discretizadas, ou seja, tenham estabilidade. Aqui, diversos fatores interferem, tais como os erros de arredondamento da

máquina, que vão se multiplicando e podem desestabilizar a solução; dificuldades de tratamentos de acoplamento entre as variáveis, fazendo com que algumas variáveis evoluam mais rapidamente que outras, provocando instabilidades etc. A questão da estabilidade é o mais sério problema na obtenção da solução numérica, exatamente pela falta de conhecimento das características matemáticas das aproximações, conforme já discutido (Maliska 2004).

Consistência e estabilidade são condições necessárias e suficientes para a convergência. A solução numérica é convergente quando é estável e tende para a solução das equações diferenciais quando a malha é refinada (Maliska 2004).

## 5 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE TRANSPORTE E DESENVOLVIMENTO DO CÓDIGO NUMÉRICO.

Neste item serão apresentados a discretização das equações de transporte e o desenvolvimento do código numérico para solução das equações bidimensionais de Navier-stokes, será explicado também como se dará a avaliação dos métodos SIMPLE, SIMPLEC e SIMPLER.

### 5.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Devida a simplicidade de implementação e à geometria quadrada da cavidade, optou-se por usar malhas estruturadas para se dividir o domínio usado para fazer a avaliação dos métodos numéricos. Na Figura 5-1 podem-se ver quais foram as condições dos contornos para se desenvolver o problema.

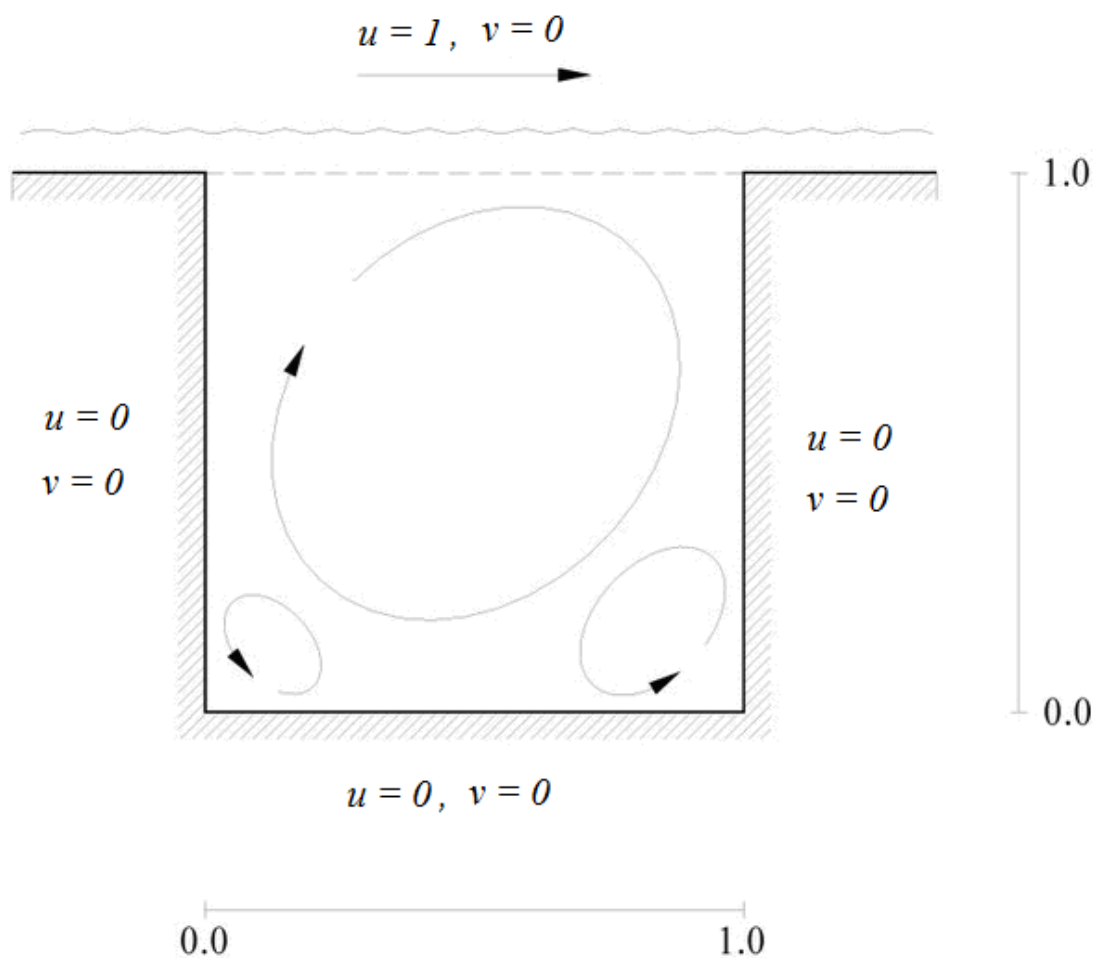


Figura 5-1 – Condições de contorno do problema da cavidade.

Depois da avaliação dos métodos, também será feita uma avaliação física do problema da cavidade resolvido com o método que apresentou os melhores resultados. Nesta etapa, serão avaliados o campo de velocidades (recirculações, vórtice) e o campo de pressões para diferentes números de Reynold.

### 5.1.1 Discretização das Equações de Transporte

A formulação para a equação da conservação da quantidade de movimento na direção  $x$  pode ser representada pela Eq. (3.34):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot (\rho\phi\vec{U}) = \nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi) + S_\phi \quad (5.1)$$

Onde o termo fonte é descrito por:

$$S_\phi = -\nabla P + \rho\vec{g} \quad (5.2)$$

Antes de dar continuidade ao desenvolvimento, nota-se a necessidade de decidir sobre o comportamento do fluxo da propriedade  $\phi$  nas faces do volume elementar durante o intervalo de tempo  $\Delta t$  para que a integração possa ser realizada (Maliska 2004).

$$\phi^\theta = \theta\phi + (1 - \theta)\phi^0 \quad (5.3)$$

Onde  $\phi^0$  é tomado no instante  $t$  e  $\phi^1$  é tomado no instante  $t + dt$ .

Para efeitos de avaliação dos métodos, é escolhido  $\theta = 1$  caracterizando a discretização temporal como totalmente implícita, devido a sua maior adequação a problemas transientes gerais.

O gradiente de pressão é, então, retirado do termo fonte e, aplicando a integral nas faces do volume de controle, chega-se a seguinte expressão:



$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{\Delta t}(\rho_P \phi_P) - \frac{\Delta V}{\Delta t}(\rho_P \phi_P)^0 - F_w \phi_w \Delta y + F_e \phi_e \Delta y - F_s \phi_s \Delta x + F_n \phi_n \Delta x = -D_w(\phi_P - \phi_w) \Delta y + \\ D_e(\phi_E - \phi_P) \Delta y - D_s(\phi_S - \phi_P) \Delta x + D_n(\phi_P - \phi_N) \Delta x + \frac{(P_w - P_E)}{\Delta x} + S_\phi \Delta V \end{aligned} \quad (5.4)$$

Onde:

$$\phi_P = u_{i,j} \quad (5.5)$$

$$\phi_w = u_{i-1,j} \quad (5.6)$$

$$\phi_e = u_{i+1,j} \quad (5.7)$$

$$\phi_s = u_{i,j-1} \quad (5.8)$$

$$\phi_n = u_{i,j+1} \quad (5.9)$$

Neste ponto se faz necessária a escolha de uma função de interpolação para quantificar o valor de  $\phi$  no centro dos volumes diferenciais.

Devido aos bons resultados apresentados na literatura e a fácil implementação, optou-se pela escolha do esquema Upwind para realizar essa função. Logo, usando este método, pode escrever a equação acima na seguinte forma canônica:

$$a_P \phi_P = a_w \phi_w + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + \frac{(P_w - P_E)}{\Delta x} + b \quad (5.10)$$

Onde:

$$a_P = a_w + a_E + a_S + a_N + (F_e - F_w) \Delta x + (F_n - F_s) \Delta y + \frac{\Delta V}{\Delta t} \rho_P - S_p \quad (5.11)$$

$$a_w = (D_w + \max(F_w, 0)) \Delta y \quad (5.12)$$

$$a_E = (D_e + \max(-F_e, 0)) \Delta y \quad (5.13)$$

$$a_s = (D_s + \max(F_s, 0))\Delta x \quad (5.14)$$

$$a_N = (D_n + \max(-F_n, 0))\Delta x \quad (5.15)$$

$$b = \rho g_x + \frac{\Delta V}{\Delta t} \rho_P^0 \phi_P^0 + Su \quad (5.16)$$

Essa expressão é aplicada em todo o domínio analisado com exceção das condições de contorno. Então, para se programar uma expressão correta para todos os coeficientes em todo o domínio, é montada a seguinte tabela:

**Tabela 5-1 – Coeficientes para a equação da quantidade de movimento em x.**

J	1	2...N	N
$a_w$	$(D_w + \max(F_w, 0))\Delta y$	$(D_w + \max(F_w, 0))\Delta y$	$(D_w + \max(F_w, 0))\Delta y$
$a_E$	$(D_e + \max(-F_e, 0))\Delta y$	$(D_e + \max(-F_e, 0))\Delta y$	$(D_e + \max(-F_e, 0))\Delta y$
$a_s$	0	$(D_s + \max(F_s, 0))\Delta x$	$(D_s + \max(F_s, 0))\Delta x$
$a_N$	$(D_n + \max(-F_n, 0))\Delta x$	$(D_n + \max(-F_n, 0))\Delta x$	0
$S_u$	$(2D_s + \max(F_s, 0))\Delta x \phi_0$	0	$(2D_n + \max(-F_n, 0))\Delta x \phi_L$
$S_P$	$-(2D_s + \max(F_s, 0))\Delta x$	0	$-(2D_n + \max(-F_n, 0))\Delta x$

Procedendo de forma análoga para a equação da quantidade de movimento na direção y chega-se a seguinte expressão:

$$a_P \phi_P = a_w \phi_w + a_E \phi_E + a_s \phi_s + a_N \phi_N + \frac{(P_s - P_N)}{\Delta y} + b \quad (5.17)$$

Onde:

$$a_P = a_w + a_E + a_s + a_N + (F_e - F_w)\Delta x + (F_n - F_s)\Delta y + \frac{\Delta V}{\Delta t} \rho_P - S_P \quad (5.18)$$

$$a_w = (D_w + \max(F_w, 0))\Delta y \quad (5.19)$$

$$a_E = (D_e + \max(-F_e, 0))\Delta y \quad (5.20)$$

$$a_s = (D_s + \max(F_s, 0))\Delta x \quad (5.21)$$

$$a_N = (D_n + \max(-F_n, 0))\Delta x \quad (5.22)$$

$$b = \rho g_y + \frac{\Delta V}{\Delta t} \rho_p^0 \phi_p^0 + Su \quad (5.23)$$

Da mesma forma, para implementar uma expressão correta para todos os coeficientes em todo o domínio, é montada a seguinte tabela:

**Tabela 5-2 – Coeficientes para a equação da quantidade de movimento em y.**

I	1	2...N	N
$a_w$	0	$(D_w + \max(F_w, 0))\Delta y$	$(D_w + \max(F_w, 0))\Delta y$
$a_e$	$(D_e + \max(-F_e, 0))\Delta y$	$(D_e + \max(-F_e, 0))\Delta y$	0
$a_s$	$(D_s + \max(F_s, 0))\Delta x$	$(D_s + \max(F_s, 0))\Delta x$	$(D_s + \max(F_s, 0))\Delta x$
$a_n$	$(D_n + \max(-F_n, 0))\Delta x$	$(D_n + \max(-F_n, 0))\Delta x$	$(D_n + \max(-F_n, 0))\Delta x$
$S_u$	$(2D_w + \max(F_w, 0))\Delta y \phi_0$	0	$(2D_e + \max(-F_e, 0))\Delta y \phi_L$
$S_p$	$-(2D_w + \max(F_w, 0))\Delta y$	0	$-(2D_e + \max(-F_e, 0))\Delta y$

Com relação às condições de contorno para a equação da continuidade, é aplicado: havendo velocidades prescritas nas fronteiras, as condições de contorno para  $P$  e  $P'$  nos métodos SIMPLE, SIMPLEC e SIMPLER, devem ser de forma a não ter correções para as velocidades, o que é conseguido aplicando na equação da continuidade as velocidades setadas para os contornos.

## 5.2 DESENVOLVIMENTO DOS ALGORITMOS

Foi implementado um algoritmo para cada método de resolução do acoplamento pressão-velocidade (APÊNDICES C, D e E), em linguagem Fortran.

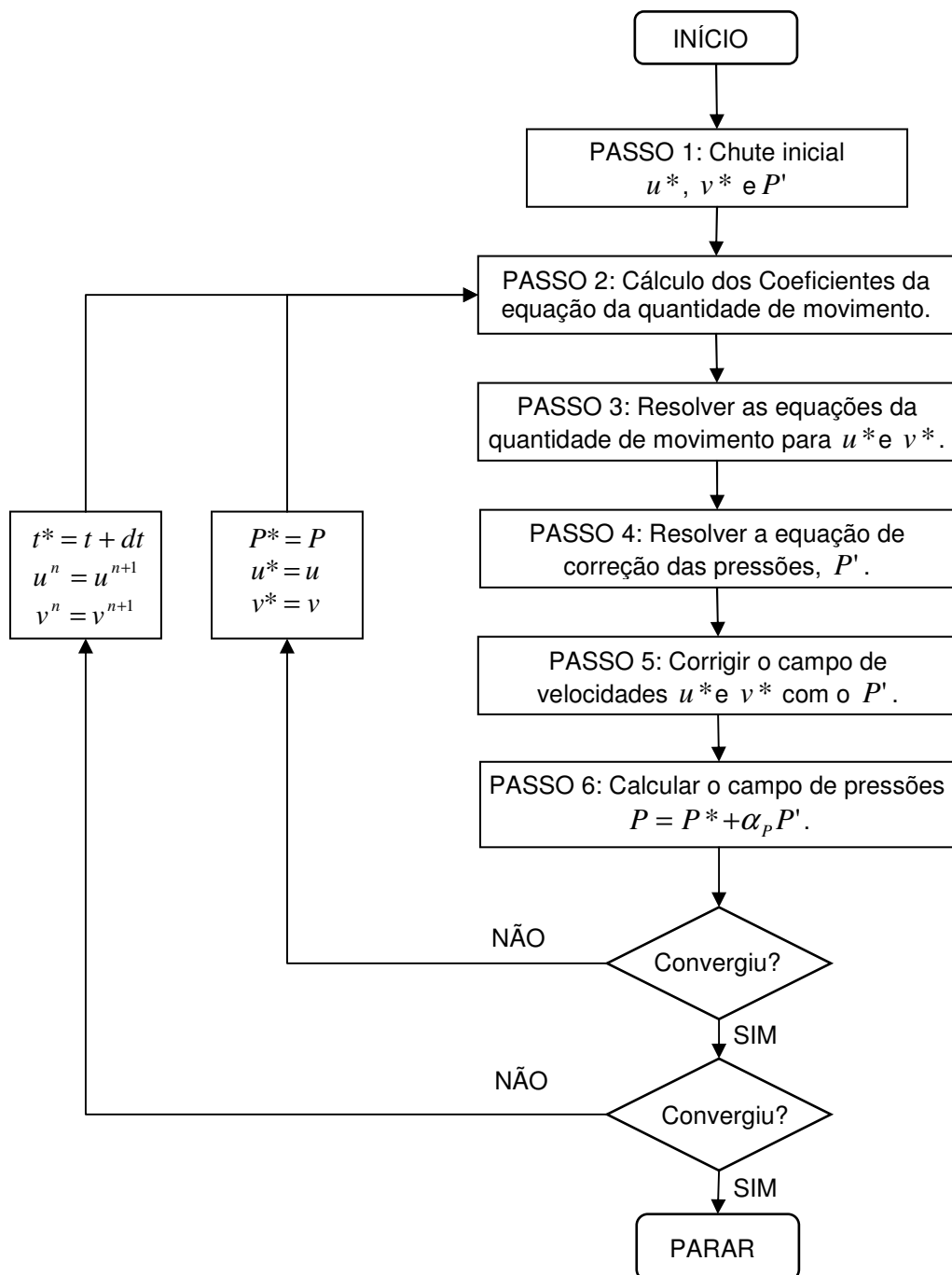
Cada programa implementado se divide basicamente em: Programa Principal e Sub-rotinas.

### 5.2.1 Programa Principal

No programa principal são tratadas inicialmente as características físicas do problema como os limites do domínio analisado, a malha de divisão do domínio, as condições de contorno, os fatores de sub-relaxação e as propriedades físicas do fluido; também são tratados os chutes iniciais para as velocidades e pressão.

Os métodos SIMPLE, SIMPLEC e SIMPLER possuem diferentes procedimentos para resolver as equações de conservação da quantidade de movimento e equação da continuidade para alcançar a convergência. Neste trabalho foram feitos os seguintes passos para programar cada método:

- SIMPLE



**Figura 5-2 – Algoritmo SIMPLE implementado nesse trabalho.**

- SIMPLEC

O método SIMPLEC foi elaborado para apresentar os mesmos passos que o algoritmo SIMPLE. A diferença entre os dois métodos é a forma de corrigir o campo de velocidades com o valor de  $P'$  como já apresentado.

- SIMPLER

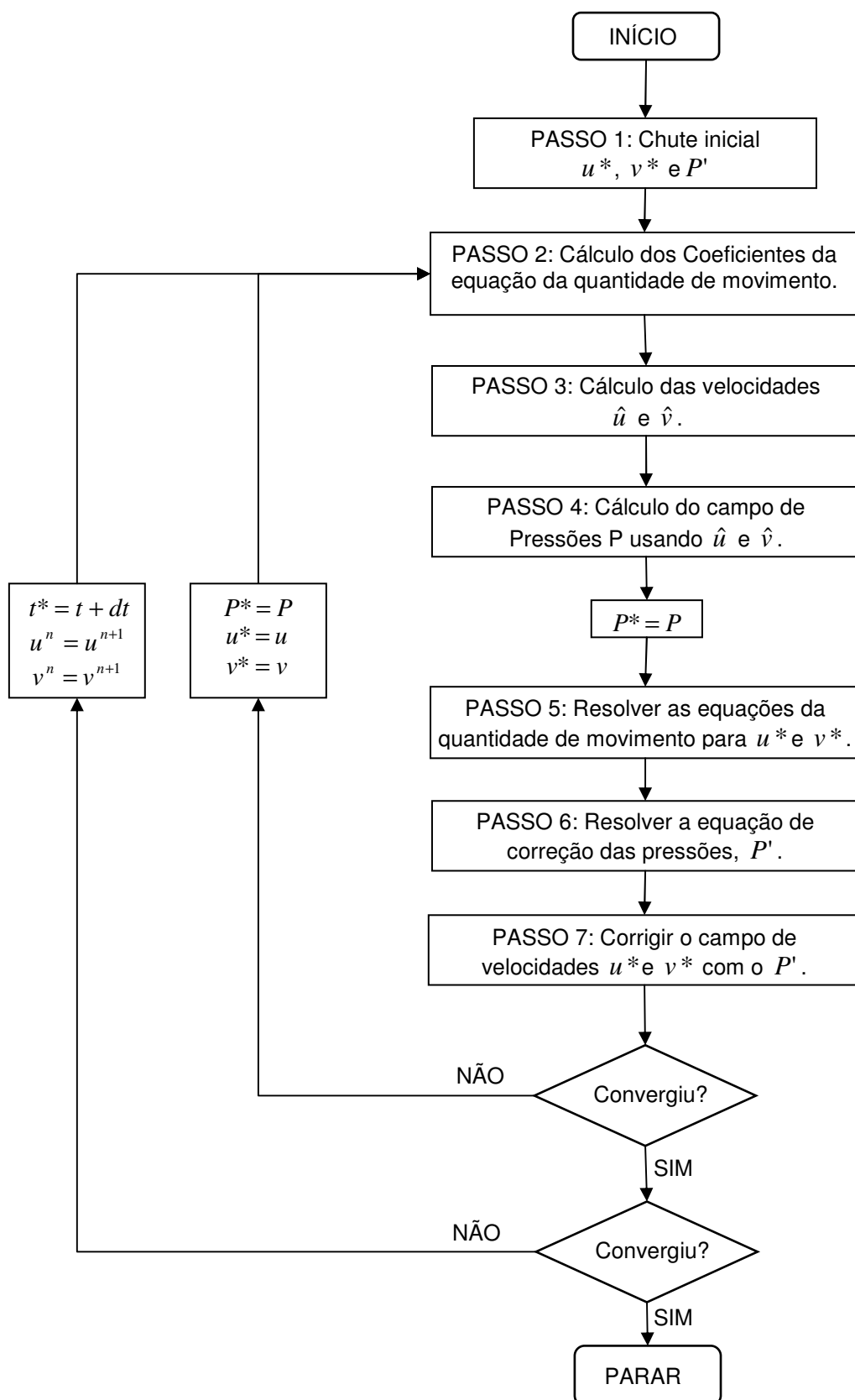


Figura 5-3 – Algoritmo SIMPLER implementado nesse trabalho.

São feitos dois loops para se chegar à convergência do problema analisado: o primeiro trata do acréscimo do passo de tempo para resolução das equações em regime não estacionário. O segundo loop trata da convergência das equações em cada instante de tempo setados pelo primeiro loop.

O programa principal também tem a função de exportar os resultados em arquivos para serem tratados posteriormente.

### 5.2.2 Sub-rotinas

As sub-rotinas foram criadas para tornar os métodos mais eficientes ao evitar alguns cálculos repetitivos.

## 5.3 TRATAMENTO DOS DADOS

Os dados exportados pelos programas foram divididos em 3 tipos de arquivos:

- O arquivo “erro.dat” contém basicamente na primeira coluna a evolução do número de passos de tempo, na segunda coluna a diferença entre a velocidade no instante  $(n+1)$  e no instante  $(n)$  e na terceira, o tempo de iteração necessário para evoluir do instante  $(n)$  para o instante  $(n+1)$ ;
- O arquivo “parametro.dat” contém o número de referência do método, o número de passos de tempo necessários para a convergência, o passo de tempo utilizado e o número de Reynolds;
- O arquivo “ $n$ ” contém os valores das velocidades  $u$  e  $v$  e das pressões referentes de cada ponto do domínio no instante de tempo “ $n$ ”. É usado a variável “ $n$ ” para que esses valores sejam plotados a cada passo de tempo.

Os dados exportados para um software para gerar as figuras que serão apresentadas nos resultados e para gerar uma animação de como é a evolução dos campos de velocidades e pressão ao longo do tempo.

Para cada simulação são geradas 4 figuras:

- Campo de Velocidades: Nessa figura é apresentado o campo de velocidades da cavidade quando o escoamento atinge regime permanente.
- Campo de Pressões: Nessa figura é apresentado o campo de pressões da cavidade quando o escoamento atinge regime permanente.
- Redução do Erro: Nessa figura é apresentada a evolução da maior diferença entre velocidade no instante  $(n+1)$  e no instante  $(n)$  ( $V^{n+1} - V^n$ ) para cada acréscimo do passo de tempo da simulação.
- Redução do tempo de loop: Nessa figura é apresentado o tempo de iteração necessário para evoluir do instante  $(n)$  para o instante  $(n+1)$  para cada acréscimo do passo de tempo da simulação<sup>1</sup>.

#### 5.4 PARÂMETROS DE AVALIAÇÃO DOS MÉTODOS

Como dito anteriormente o problema da cavidade servirá de parâmetro para avaliar os métodos SIMPLE, SIMPLEC e SIMPLER. Cada método será avaliado de acordo com a variação de alguns parâmetros:

- Número de elementos da malha:

Avaliar o refino da malha é um critério muito importante para se comprovar a consistência do algoritmo em chegar à solução real do problema quando o número de pontos da malha tende ao infinito. Porém é sempre possível que a

---

<sup>1</sup>Os ruídos do gráfico “Redução do tempo de loop” foram filtrados com a função smooth para facilitar a visualização e a análise dos resultados.



convergência seja influenciada pelo aumento ou redução do número de volumes discretos da malha.

Uma malha mais refinada reduz os erros de truncamento das funções de interpolação, porém torna o problema mais complexo ao aumentar o número de equações lineares a serem resolvidas, além de aumentar o tempo computacional para resolvê-las. Nessas condições, onde é exigida mais precisão, os erros de arredondamento do processador podem influenciar bastante o resultado final.

Então, cada método será avaliado de acordo com sua consistência e convergência quando se varia o número de pontos nodais da malha do domínio da cavidade.

- Número de Reynolds:

Os algoritmos devem ser capazes de resolver problemas com diferentes números de Reynolds para serem aplicados na solução de problemas reais de escoamento. O número de Reynolds é definido por:

$$Re = \frac{\rho LU}{\mu} \quad (5.24)$$

Onde  $L$  e  $U$  são comprimentos e velocidades característicos do escoamento, que, nesse trabalho, são unitários. Assim, o número de Reynolds do escoamento será definido pela razão entre massa específica ( $\rho$ ) e a viscosidade dinâmica ( $\mu$ ) do fluido.

- Número de Courant.

Na matemática, a condição Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) é uma condição de convergência de equações diferenciais quando solucionadas numericamente. Como consequência dessa condição, o passo de tempo deve ser inferior a certo valor, caso contrário a solução não irá convergir. (R. Courant, K. Friedrichs and H. Lewy, 1928)

Se uma onda está cruzando uma malha discreta, então o intervalo de tempo deve ser inferior ao tempo necessário para que a onda atravesse os pontos da malha adjacente. Em consequência, quando a separação entre os pontos da malha se reduz, o limite superior para o intervalo de tempo é inferior: (R. Courant, K. Friedrichs and H. Lewy, 1928)

$$C = \frac{u\Delta t}{\Delta x} \quad (5.25)$$

Onde:

$C$  é o número de Courant

$u$  é a velocidade do escoamento [m/s]

$\Delta t$  é o passo de tempo [s]

$\Delta x$  é o comprimento do volume [m]

Segundo a condição CFL para que o modelo seja estável, é essencial que o número de Courant ( $C$ ) seja menor que a unidade.

Embora o cálculo do número de Courant seja importante para determinar o passo de tempo de um determinado método, é sempre possível que a convergência seja influenciada de forma significativa pela utilização de diferentes passos de tempo, mesmo que estejam dentro do limite impostos pela condição CFL.

Então um dos critérios de escolha do melhor método numérico para solução do problema da cavidade, é testar a convergência dos algoritmos quando se varia o passo de tempo, ou seja, o número de Courant.

## 6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos com a simulação dos algoritmos. Estão divididos em: Avaliação dos métodos, melhoria do método escolhido e o estudo físico do problema da cavidade.

Foi usado um laptop com processador Intel® Core™ 2 Duo T8100 @ 2.1 GHz, 4,00 GB de memória RAM e sistema operacional Windows Vista™ Home Basic de 32 Bits para fazer todas as simulações apresentadas abaixo.

### 6.1 AVALIAÇÃO DOS MÉTODOS

Neste item serão analisadas a acuracidade e a convergência dos métodos SIMPLE, SIMPLEC e SIMPLEC aplicados à solução do escoamento na cavidade quadrada, quando se variam diferentes parâmetros.

Será explorado sempre o máximo de cada método, ou seja, o valor do coeficiente de sub-relaxação  $\alpha_p$  será o maior possível em todas as simulações dos métodos SIMPLE e SIMPLEC.

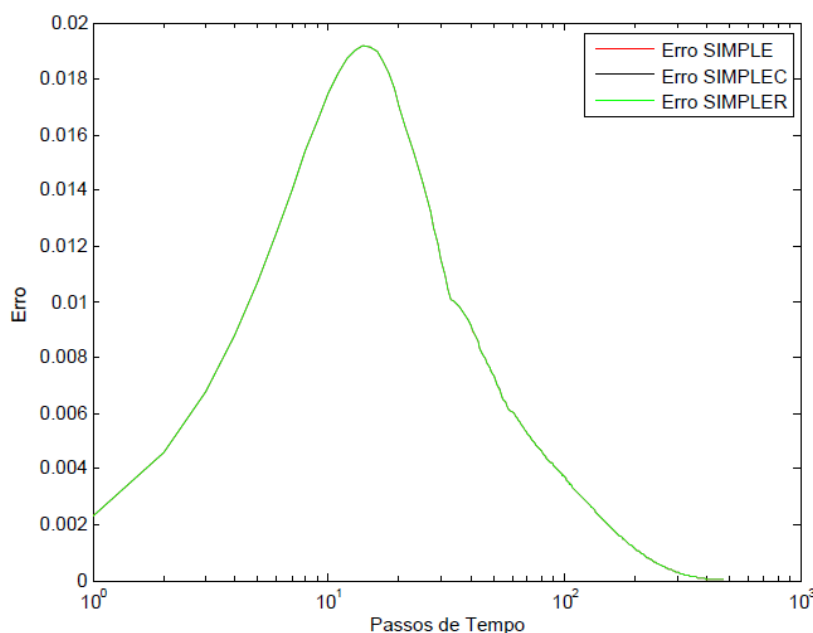
Neste item os campos de velocidade e pressão obtidos na simulação serão omitidos, para compactar mais os resultados. No item 6.4 serão apresentados mais detalhes sobre a física do escoamento na cavidade quadrada.

#### 6.1.1 Efeito da Malha na Convergência

Aqui será avaliada a convergência de cada método quando se refina a malha do domínio analisado. A idéia é escolher um valor fixo para o número de Reynolds e para o passo de tempo e variar apenas a o número de pontos nodais da malha para ver o comportamento de cada método.

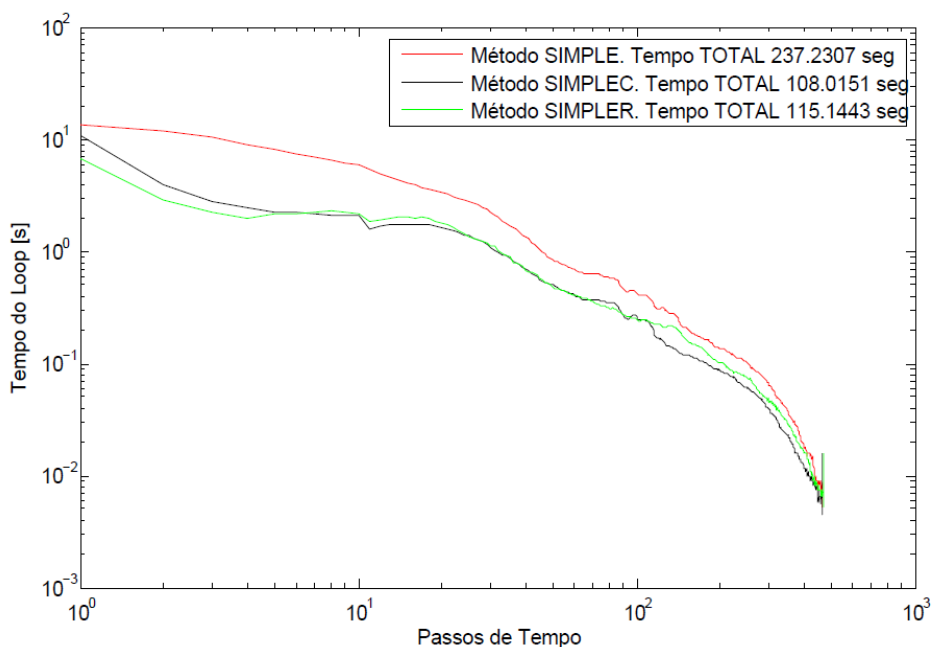
##### 6.1.1.1 Malha 40 x 40

Abaixo são mostrados os resultados da simulação dos três métodos para uma malha de 40x40 volumes, número de Reynolds 100 e passo de tempo de  $10^{-4}$ .



**Figura 6-1 – Evolução do erro para malha 40x40, Re=100 e dt=0,0001.**

Como pode ser visto, os três métodos convergiram para essa simulação. O erro (diferença entre a velocidade no instante  $(n+1)$  e no instante  $(n)$ ), plotado de acordo com o passo de tempo, foi o mesmo para cada método, por isso apenas uma linha é aparente. Esse resultado comprova a eficiência dos métodos para esses parâmetros.



**Figura 6-2 – Redução do tempo de loop para malha 40x40, Re=100 e dt=0,0001.**

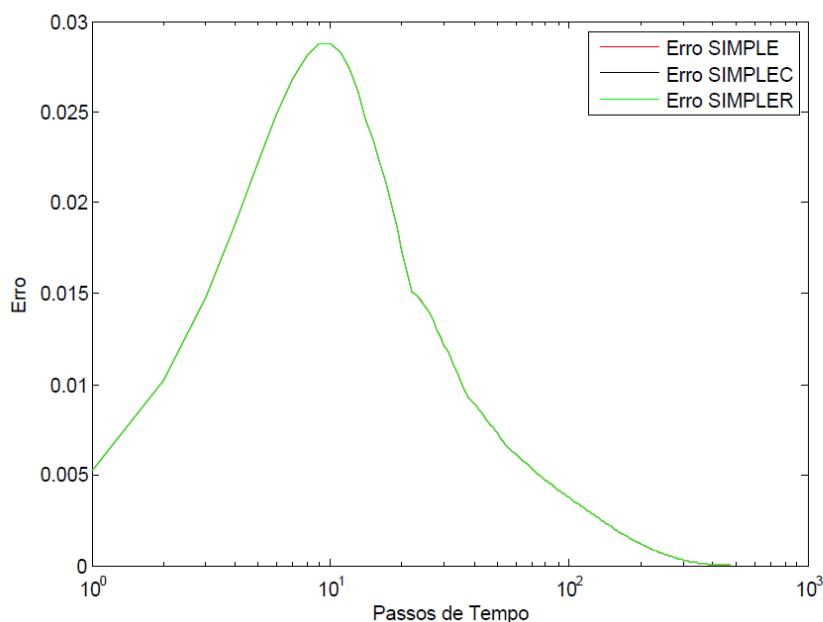
A figura anterior mostra a redução do tempo computacional de loop (obtido com a função smooth descrita anteriormente) com o avanço do passo de tempo.

Nessa figura também é possível ver o tempo computacional total necessário para cada método convergir.

O método SIMPLE, apesar da convergência, se mostrou muito lento. Foram necessários quase 240 segundos para que esse método chegasse ao resultado final em quanto os métodos SIMPLEC e SIMPLER atingiram a convergência em torno de 110 segundos.

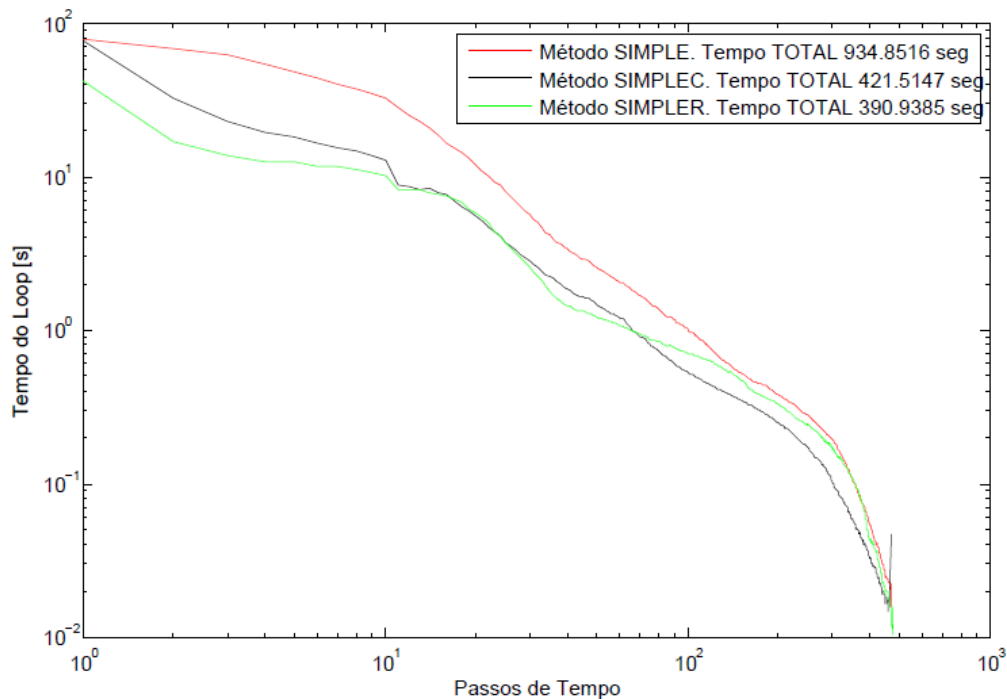
#### 6.1.1.2 Malha 60 X 60

Os resultados abaixo são realizados para os três métodos com uma malha mais refinada, agora 60x60 volumes, número de Reynolds 100 e passo de tempo de  $10^{-4}$ .



**Figura 6-3 – Evolução do erro para malha 60x60, Re=100 e dt=0,0001.**

Nessa simulação os três métodos também convergiram como pode ser visto na figura anterior. O erro também foi o mesmo para os três métodos, por isso apenas uma linha é aparente.



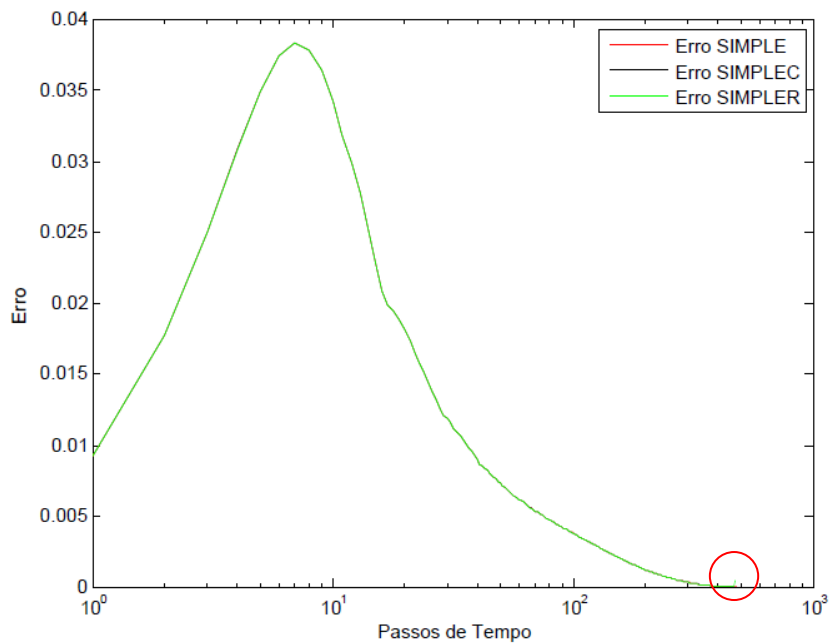
**Figura 6-4 – Redução do tempo de loop para malha 60x60, Re=100 e dt=0,0001.**

Novamente o método SIMPLE se mostrou muito lento. Foram necessários quase 1000 segundos para que o método chegasse ao resultado final em quanto os métodos SIMPLEC e SIMPLER atingiram a convergência em torno de 400 segundos.

Apesar de realizar um número maior de cálculos o algoritmo SIMPLER se mostrou um pouco mais rápido que o método SIMPLEC para os parâmetros acima descritos.

#### 6.1.1.3 Malha 80 x 80

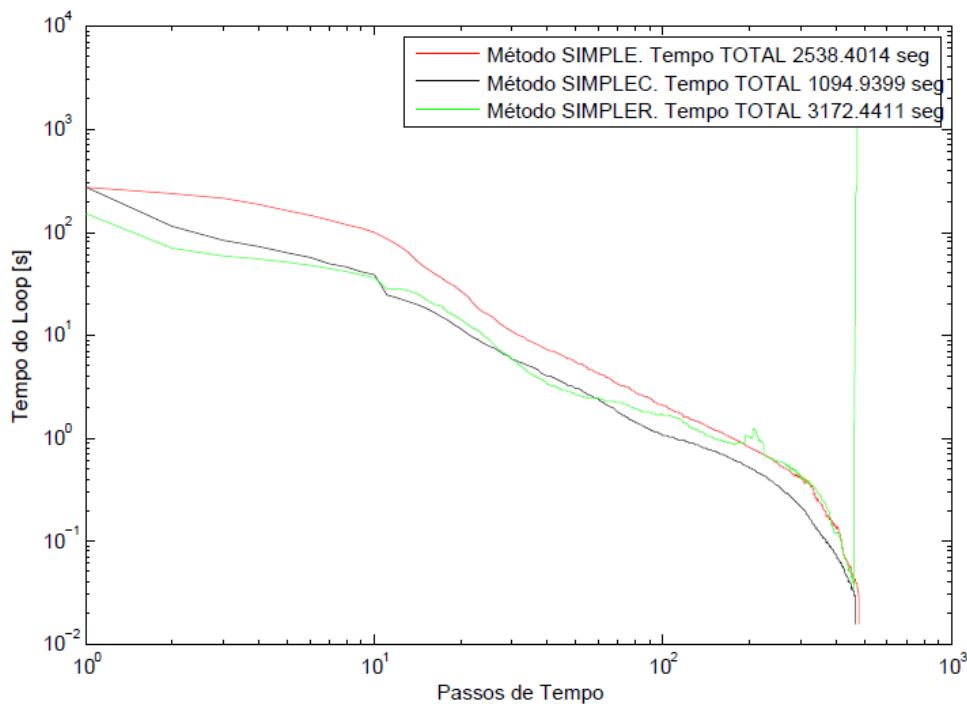
Abaixo são mostrados os resultados da simulação dos três métodos para uma malha ainda mais refinada, 80x80 volumes, número de Reynolds 100 e passo de tempo de  $10^{-4}$ .



**Figura 6-5 – Evolução do erro para malha 80x80,  $Re=100$  e  $dt=0,0001$ .**

Nessa simulação o método SIMPLER divergiu, os métodos SIMPLE e SIMPLEC convergiram e atingiram o mesmo resultado final. No ponto sinalizado na figura anterior é possível ver o ponto onde o método SIMPLER divergiu, ou seja, o método chegou bem perto de convergir, porém por alguma instabilidade numérica não foi possível chegar aos resultados corretos.

O refino da malha, por um lado, tende a reduzir os erros de truncamento das funções de interpolação, em contrapartida, aumenta a complexidade do problema, sendo necessário resolver um sistema de equações maior.



**Figura 6-6 – Redução do tempo de loop para malha 80x80,  $Re=100$  e  $dt=0,0001$ .**

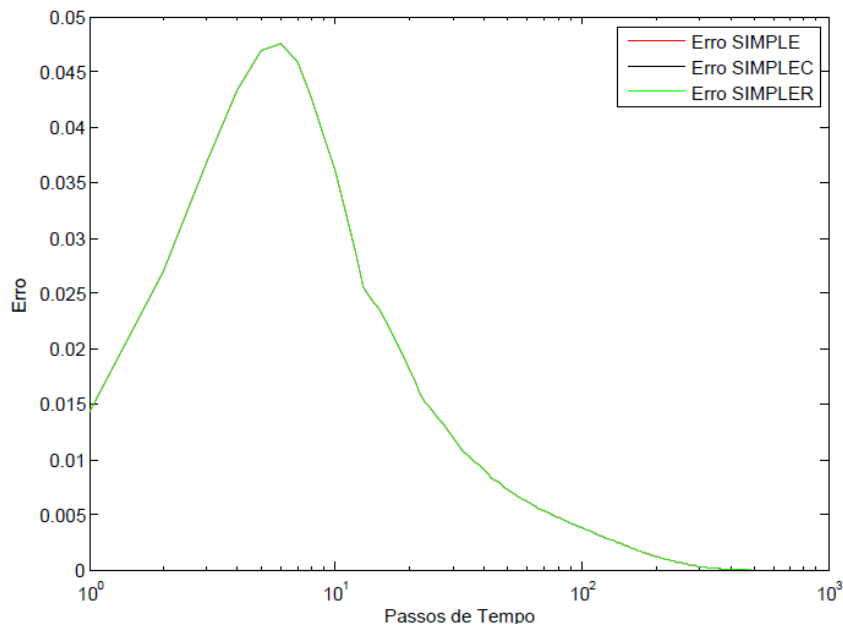
Novamente o método SIMPLE se mostrou muito lento. Foram necessários mais de 2500 segundos para que o método chegue ao resultado final em quanto o método SIMPLEC atingiu a convergência em menos da metade do tempo.

A linha que representa a redução do tempo de loop do método SIMPLER se mostrou instável antes de divergir. Mais comentários sobre a divergência do método serão feitos no item 6.1.3.

#### 6.1.1.4 Malha 100 x 100

Nesse item a malha será ainda mais refinada, 100x100 volumes, porém os parâmetros setados nos itens anteriores continuarão os mesmos.



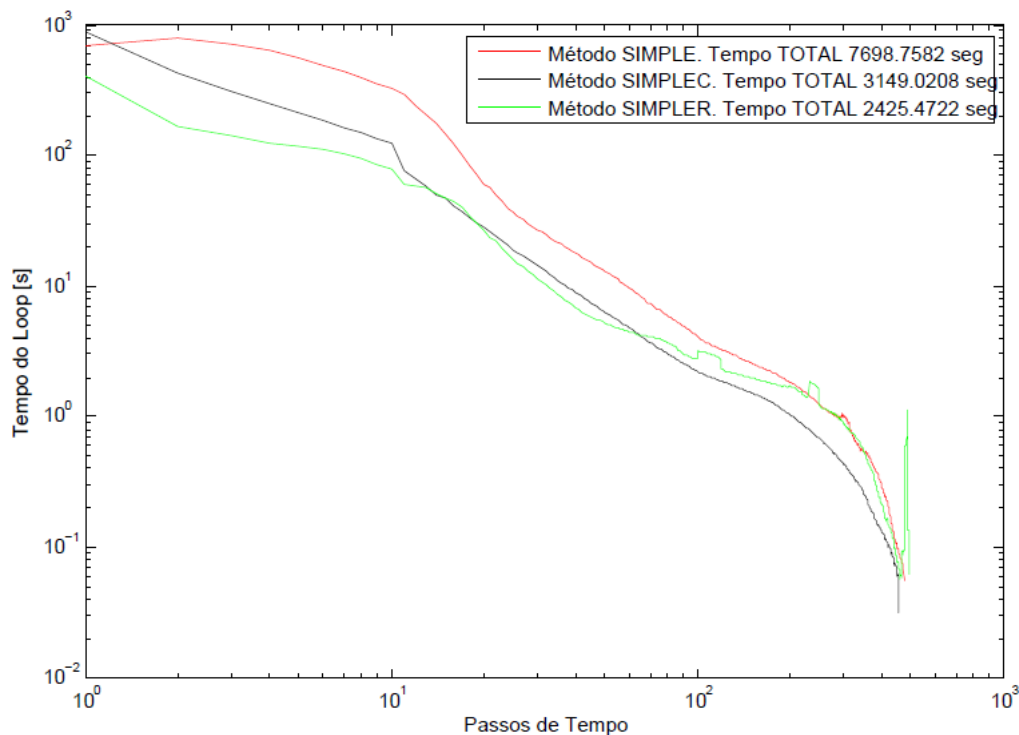


**Figura 6-7 – Evolução do erro para malha 100x100, Re=100 e dt=0,0001.**

Nessa simulação o método SIMPLER voltou a convergir. O erro também foi o mesmo para os três métodos, por isso apenas uma linha é aparente.

Como o método SIMPLER divergiu anteriormente não se pode admitir que apresente convergência para malhas mais refinadas. Nesse caso, o refino da malha, reduziu os erros de truncamento associados aos termos advectivos, por isso o método convergiu.

A linha que representa a redução do tempo de loop do método SIMPLER (Figura 6-8) se mostrou muito instável, provando que, apesar da convergência, o método ainda apresenta erros de truncamento que influenciam o resultado para malha mais refinada.



**Figura 6-8 – Redução do tempo de loop para malha 100x100, Re=100 e dt=0,0001.**

O método SIMPLE continua se mostrando mais lento que os outros dois métodos. Foram necessários quase 7700 segundos para que o método chegasse ao resultado final em quanto o método SIMPLEC atingiu a convergência em menos 3100 segundos e o método SIMPLER em menos de 2500.

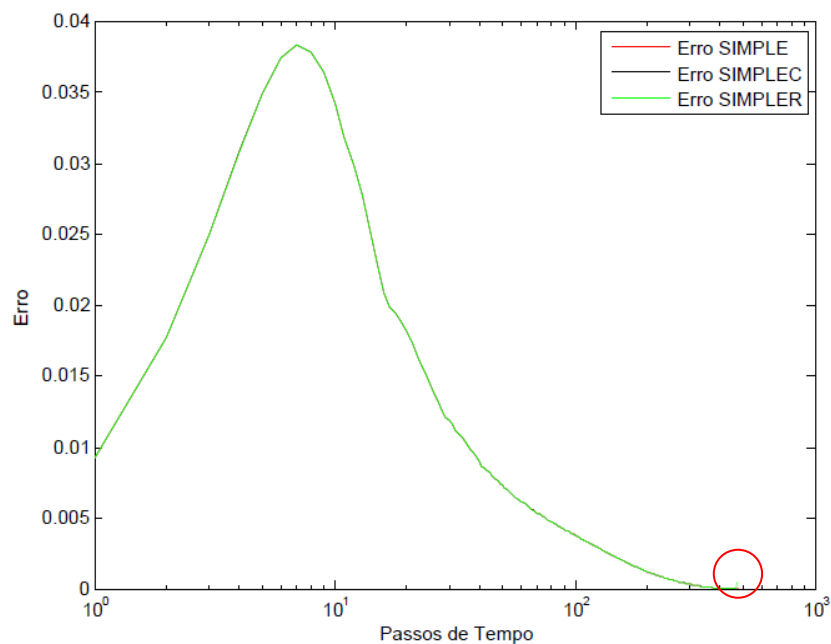
Comparando os resultados apresentados na Figura 6-1, na Figura 6-3, na Figura 6-5 e na Figura 6-7, nota-se que o refino da malha provocou um aumento do erro (diferença entre a velocidade no instante  $(n+1)$  e no instante  $(n)$ ), ou seja, foi exigido mais dos métodos quando se usam malhas refinadas. Por isso o aumento no tempo de convergência.

### 6.1.2 Efeito do Número de Reynolds na Convergência

Aqui se observará a convergência de cada método quando se aumenta o número de Reynolds do escoamento. Semelhantemente ao que foi feito no tópico anterior, a idéia aqui é apenas variar o número de Reynolds do escoamento e verificar o comportamento dos métodos.

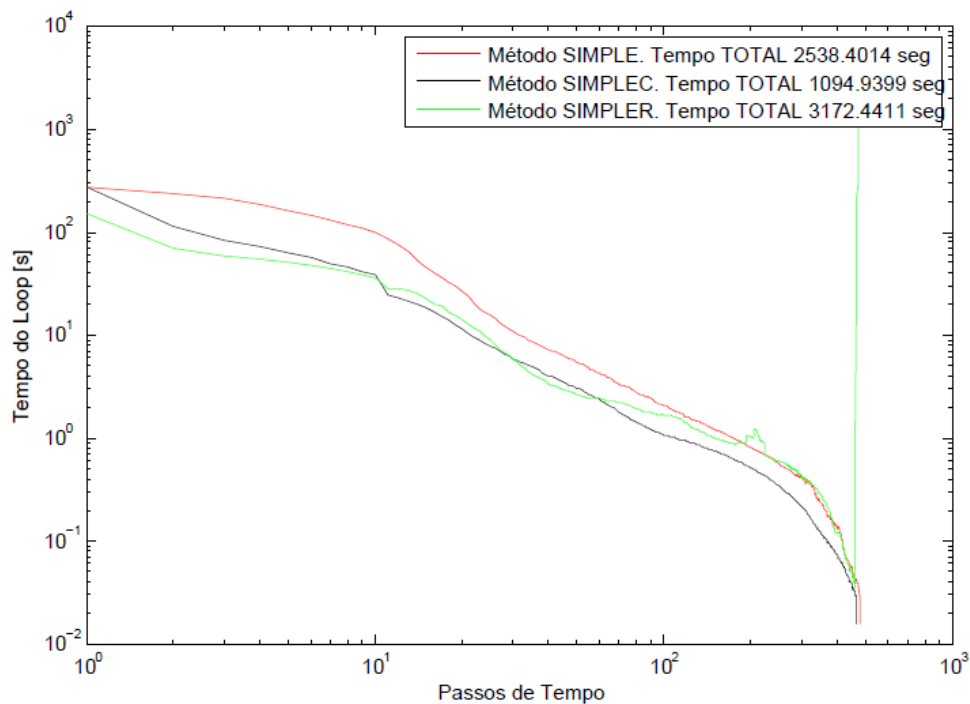
### 6.1.2.1 Re=100

Abaixo são mostrados os resultados da simulação dos três métodos para uma malha de 80x80 volumes, número de Reynolds 100 e passo de tempo de  $10^{-4}$ . Essa simulação é idêntica a do item 6.1.1.3, mas agora o interesse é analisar o efeito da variação do número de Reynolds na convergência dos métodos.



**Figura 6-9 – Evolução do erro para malha 80x80, Re=100 e  $dt=0,0001$ .**

Como explicado anteriormente, nessa simulação o método SIMPLER divergiu, os métodos SIMPLE e SIMPLEC convergiram e atingiram o mesmo resultado final.

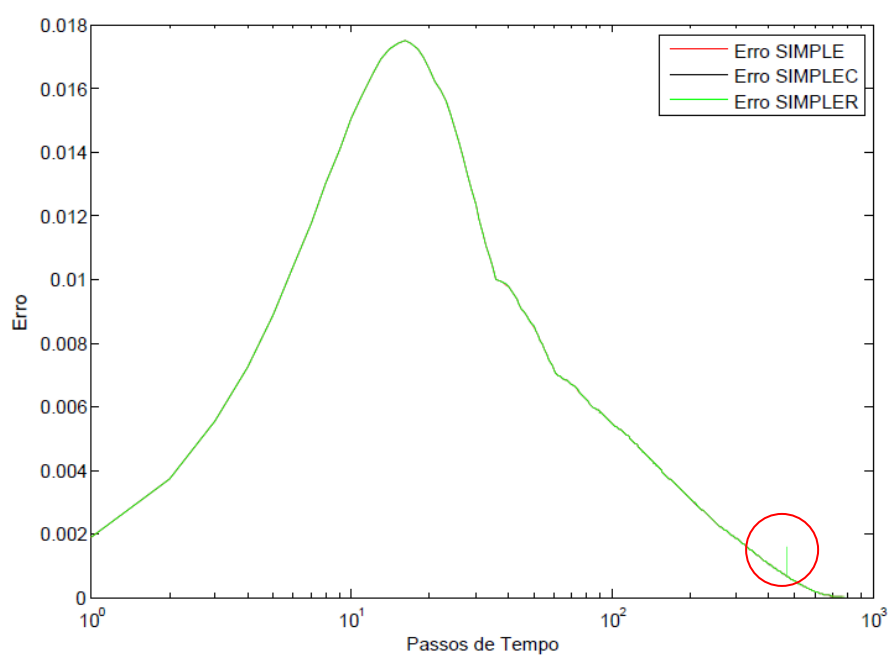


**Figura 6-10 – Redução do tempo de loop para malha 80x80, Re=100 e dt=0,0001.**

O método SIMPLE se mostrou muito lento. Foram necessários quase 2500 segundos para que o método chegasse ao resultado final em quanto o método SIMPLEC atingiu a convergência em menos da metade do tempo.

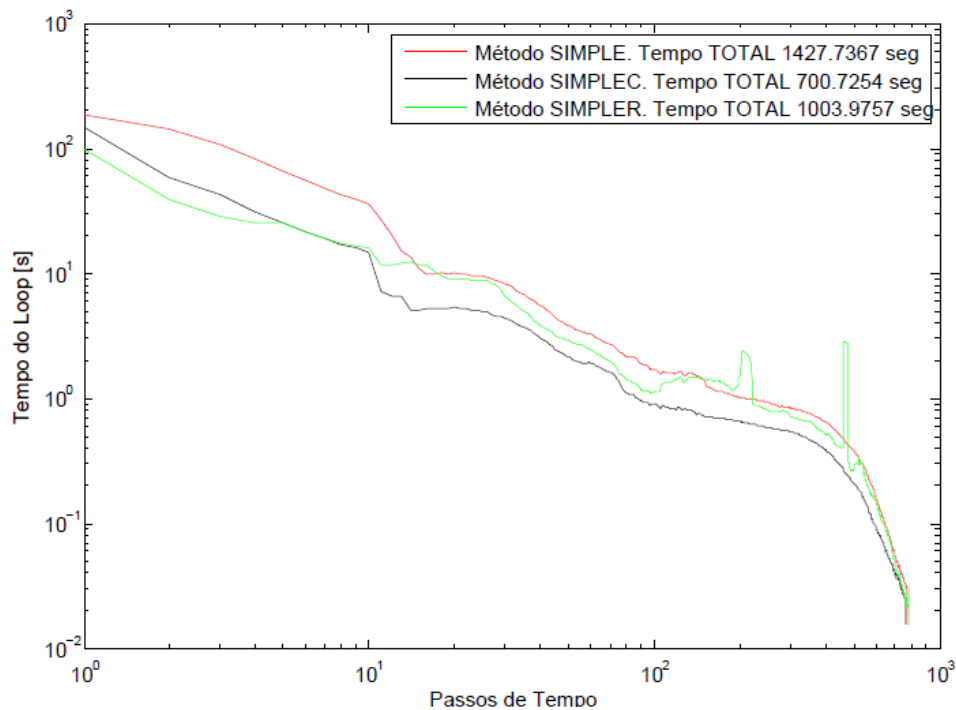
#### 6.1.2.2 Re=500

Abaixo são mostrados os resultados da simulação dos três métodos para uma malha de 80x80 volumes, número de Reynolds 500 e passo de tempo de  $10^{-4}$ .



**Figura 6-11 – Redução do tempo de loop para malha 80x80,  $Re=500$  e  $dt=0,0001$ .**

Nessa simulação o método SIMPLER voltou a convergir. O erro também foi o mesmo para os três métodos, por isso apenas uma linha é aparente. Porém é possível ver uma instabilidade, perto do ponto de convergência, que poderia ter levado o método SIMPLER a divergir.



**Figura 6-12 – Evolução do erro para malha 80x80,  $Re=500$  e  $dt=0,0001$ .**

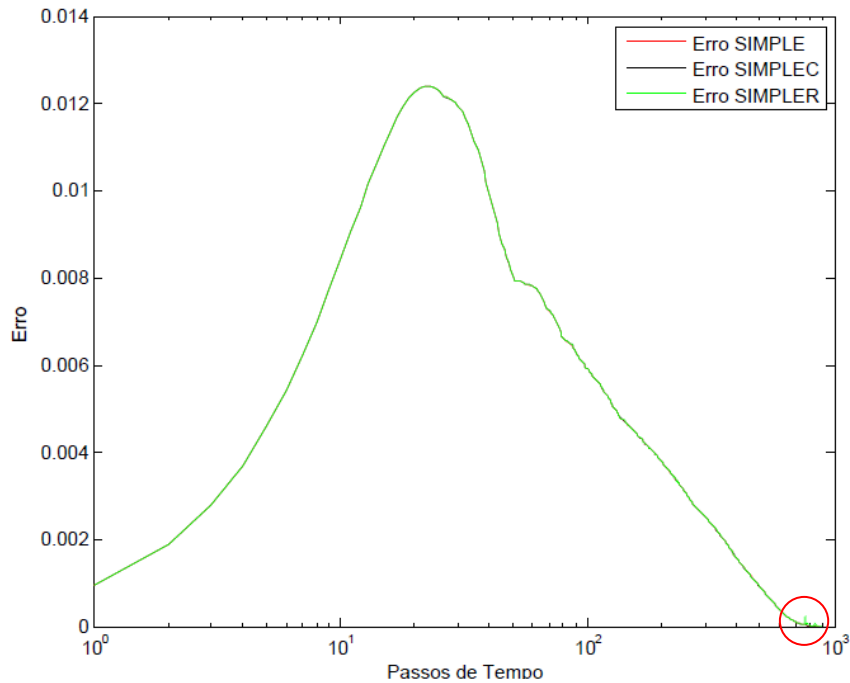
Mais uma vez o método SIMPLE se mostrou mais lento. Foram necessários mais de 1400 segundos para que o método chegasse ao resultado final enquanto o método SIMPLEC atingiu a convergência em menos da metade do tempo.

A linha que representa a redução do tempo de loop do método SIMPLER se mostrou instável antes de divergir e isso levou o método gastar mais tempo para atingir a convergência.

É importante notar que o aumento do número de Reynolds fez o tempo computacional para os métodos atingirem a convergência diminuir, além de possibilita a convergência para o método SIMPLER que não tinha convergido para um número de Reynolds menor.

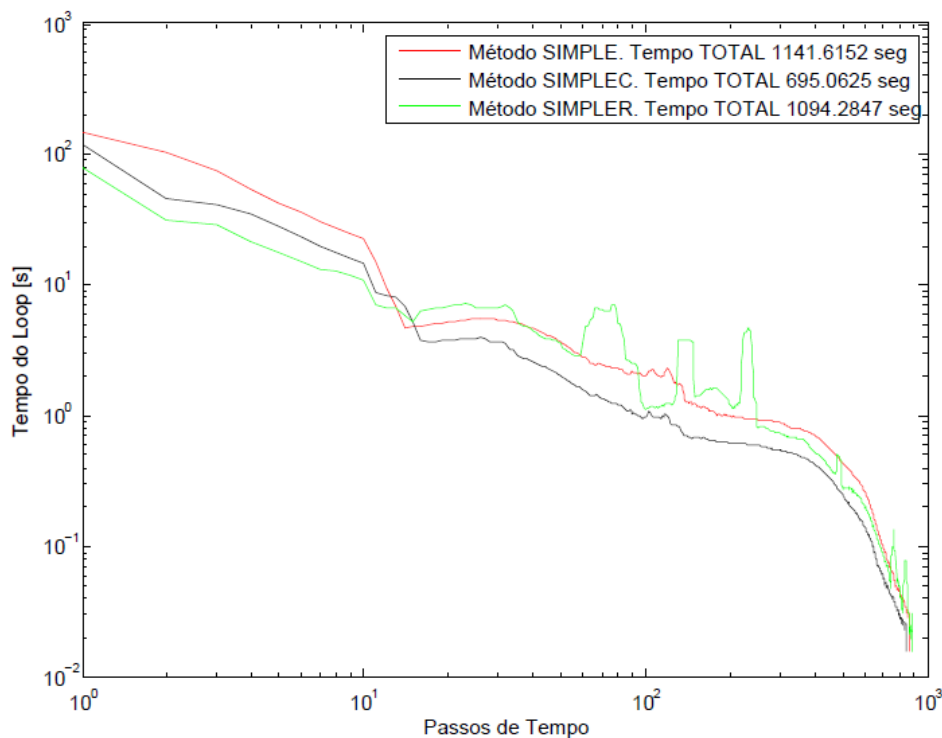
### 6.1.2.3 Re=1000

Abaixo são mostrados os resultados da simulação dos três métodos para uma malha de 80x80 volumes, número de Reynolds 1000 e passo de tempo de  $10^{-4}$ .



**Figura 6-13 – Redução do tempo de loop para malha 80x80, Re=1000 e  $dt=0,0001$ .**

Nessa simulação os três métodos convergiram como pode ser visto na figura anterior. Porém é possível ver uma pequena instabilidade na linha que representando o algoritmo SIMPLER perto do ponto de convergência.



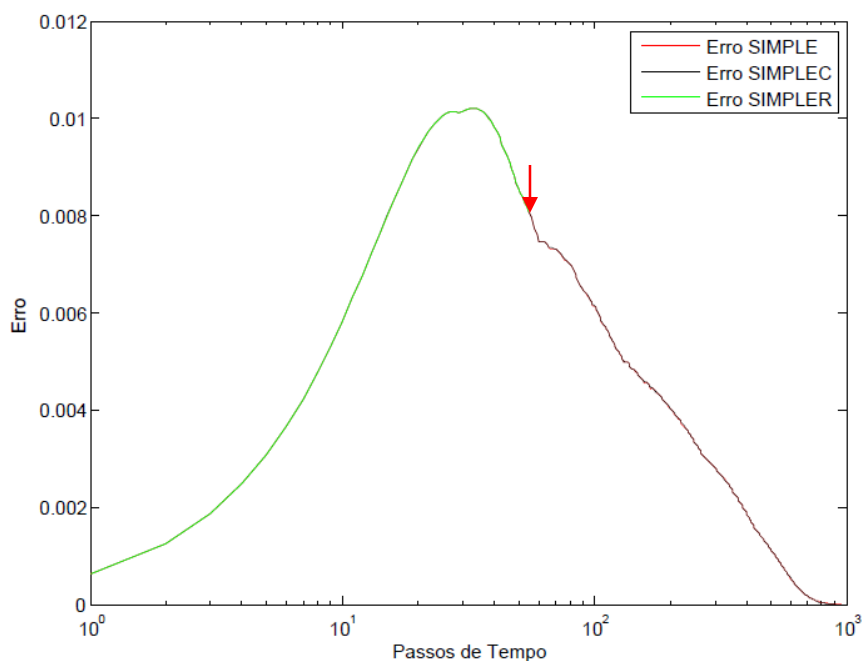
**Figura 6-14 – Evolução do erro para malha 80x80,  $Re=1000$  e  $dt=0,0001$ .**

Nessa simulação, foram necessários quase 1200 segundos para que o método SIMPLE chegasse ao resultado final enquanto o método SIMPLEC atingiu a convergência com menos de 700 segundos.

Para  $Re=1000$  ainda se observa que a linha de redução do tempo de loop do método SIMPLER foi muito instável o que levou o método a gastar mais tempo para atingir a convergência (quase 1100 segundos). O aumento do número de Reynolds para 1000 fez o tempo computacional para os métodos atingirem a convergência diminuir um pouco mais.

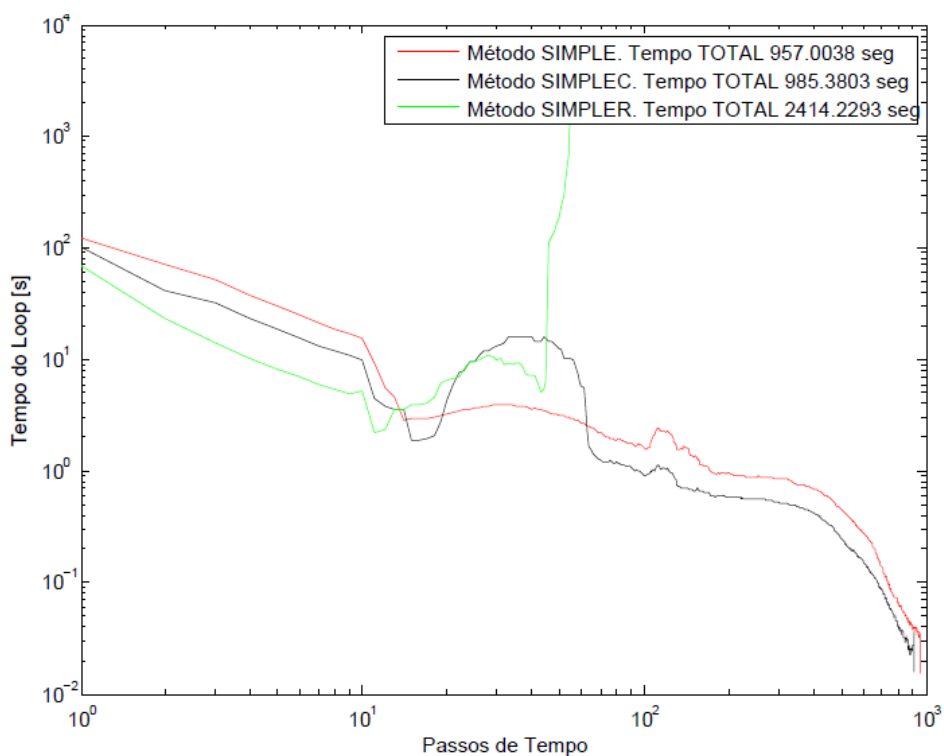
#### 6.1.2.4 $Re=1500$

Nesse item o número de Reynolds será aumentando mais uma vez, porém os parâmetros setados nos itens anteriores continuarão os mesmos.



**Figura 6-15 – Redução do tempo de loop para malha 80x80,  $Re=1500$  e  $dt=0,0001$ .**

Nessa simulação o método SIMPLER divergiu, os métodos SIMPLE e SIMPLEC convergiram e atingiram o mesmo resultado final. No ponto sinalizado na figura anterior é possível ver o onde o método SIMPLER divergiu, deixando a mostra a linha representando o método SIMPLEC e SIMPLE.



**Figura 6-16 – Evolução do erro para malha 80x80,  $Re=1500$  e  $dt=0,0001$ .**



Diferente dos outros resultados, a linha de redução do tempo de loop do método SIMPLE se mostrou mais estável formando, no gráfico anterior, uma curva mais suave até a convergência. Por essa estabilidade, o método SIMPLE foi um pouco mais rápido que o SIMPLER. O Método SIMPLER divergiu muito antes do ponto de convergência, mostrando que, nessas condições, o método tem mais dificuldade em convergir que os outros dois quando o número de Reynolds é maior.

Comparando os resultados apresentados na Figura 6-9, na Figura 6-11, na Figura 6-13 e na Figura 6-15, nota-se que o aumento do número de Reynolds provocou uma significativa redução do erro, ou seja, foi mais fácil para os métodos calcular o escoamento na cavidade quando  $Re$  é maior. Por isso a redução do tempo de convergência.

### 6.1.3 Efeito do Número de Courant na Convergência

Aqui será avaliada a convergência de cada método quando se aumenta o número de Courant. O aumento do número de Courant nesse item é dado pelo aumento do passo de tempo.

#### 6.1.3.1 $C=0,0008$

Abaixo são mostrados os resultados da simulação dos três métodos para uma malha de  $80 \times 80$  volumes, número de Reynolds 100 e passo de tempo de  $10^{-5}$ .

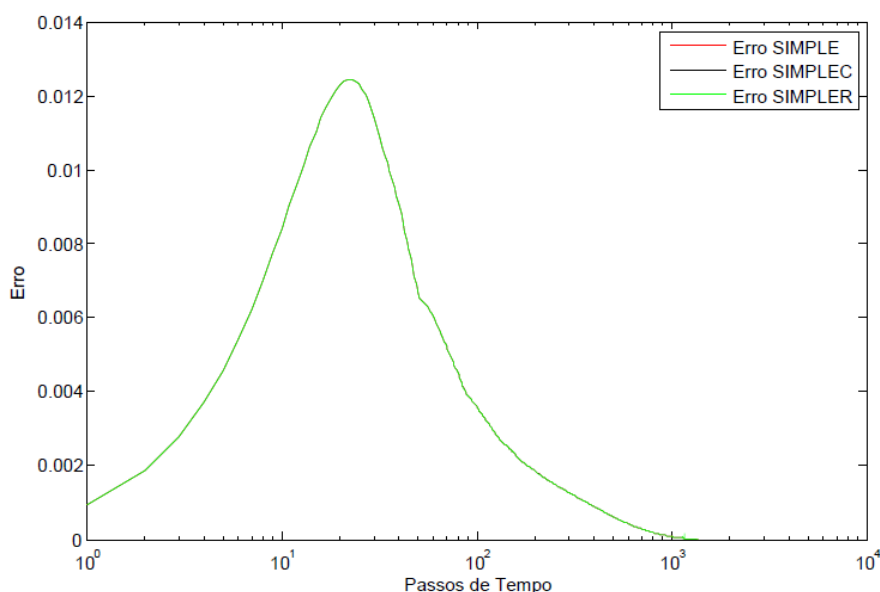
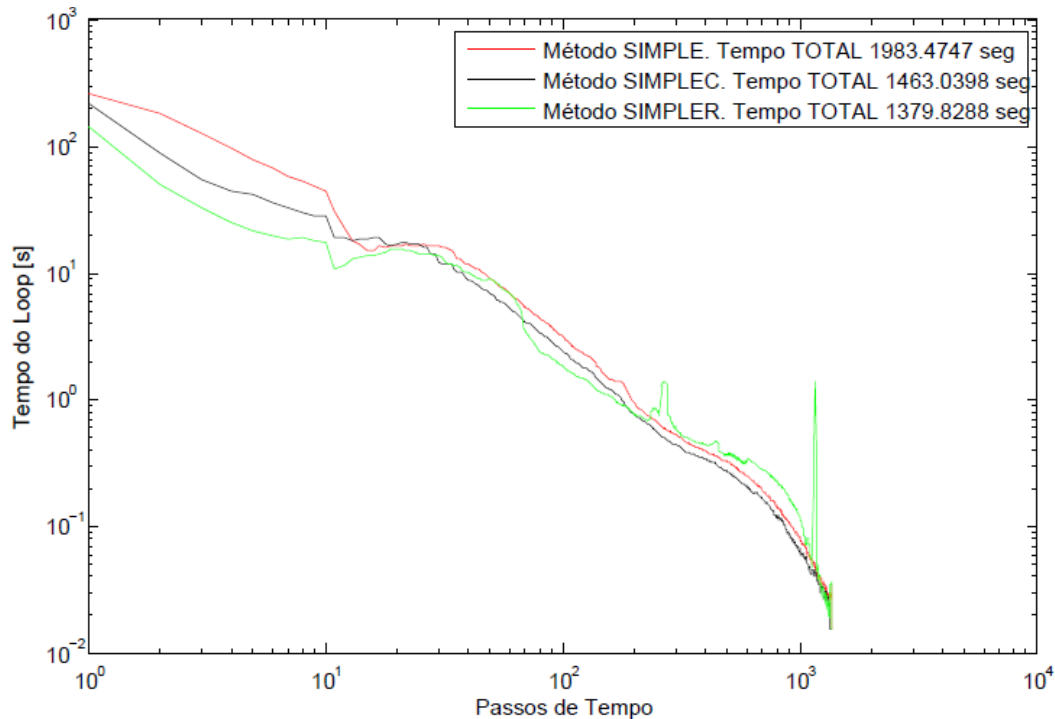


Figura 6-17 – Evolução do erro para malha  $80 \times 80$ ,  $Re=100$  e  $dt=0,00001$ .

Nessa simulação os três métodos convergiram como pode ser visto na figura anterior. O erro também foi o mesmo para os três métodos, por isso apenas uma linha é aparente.



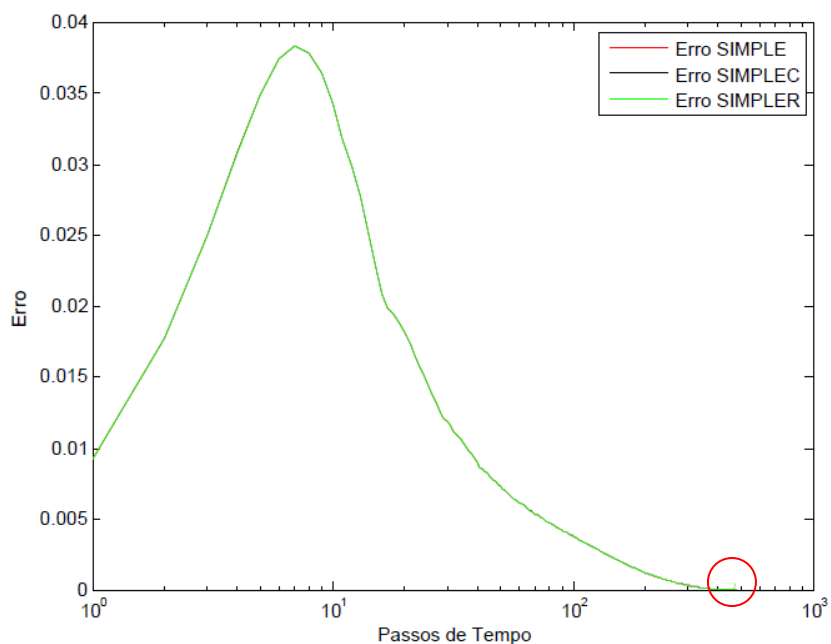
**Figura 6-18 – Redução do tempo de loop para malha 80x80, Re=100 e  $dt=0,00001$ .**

Nesta simulação o algoritmo SIMPLE também foi o mais lento. Foram necessários quase 2000 segundos para que o método chegue ao resultado final em quanto os métodos SIMPLEC e SIMPLER atingiram a convergência em menos de 1500 segundos.

Observa-se que nessa simulação com número de Courant menor o método SIMPLER convergiu e foi o método mais rápido entre os três. Porém a linha que representa a redução do tempo de loop do método SIMPLER se mostrou instável antes de convergir, isso indica que o método ainda sofre grande influência dos erros de truncamento mesmo com passo de tempo pequeno.

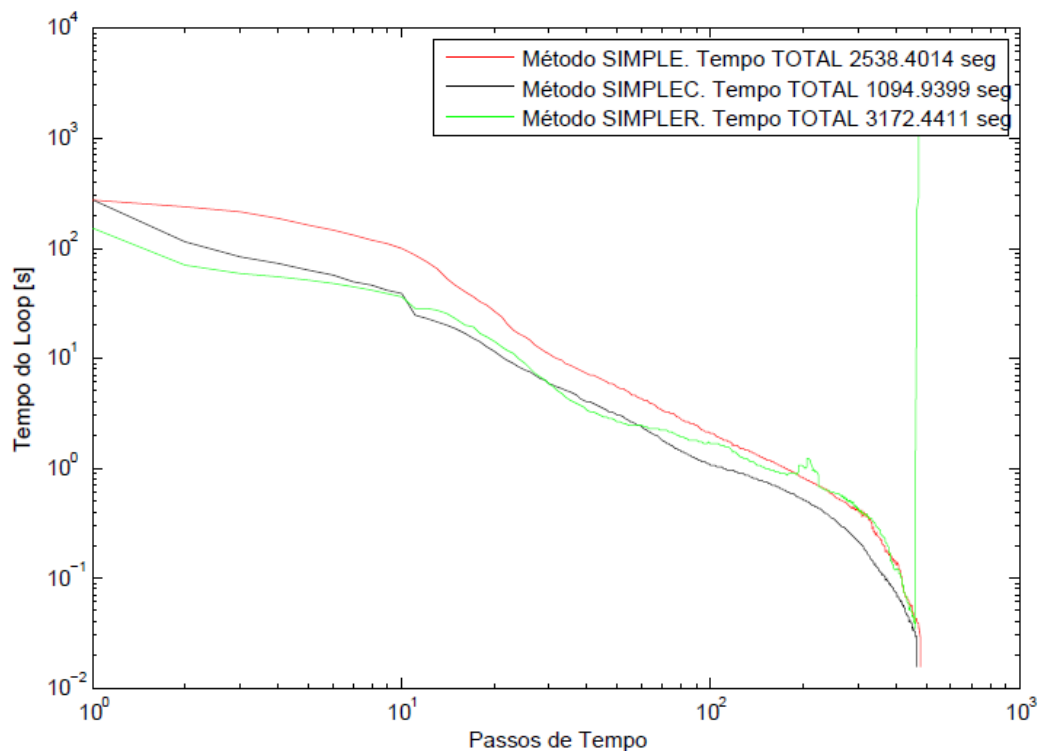
#### 6.1.3.2 $C=0,008$

Abaixo são mostrados os resultados da simulação dos três métodos para uma malha de 80x80 volumes, número de Reynolds 100 e passo de tempo de  $10^{-4}$ . Essa simulação é idêntica a do item 6.1.1.3, mas agora o interesse é analisar o efeito da variação do número de Courant na convergência dos métodos.



**Figura 6-19 – Evolução do erro para malha 80x80, Re=100 e dt=0,0001.**

Nessa simulação o método SIMPLER divergiu, os métodos SIMPLE e SIMPLEC convergiram e atingiram o mesmo resultado final. No ponto sinalizado na figura anterior é possível ver o ponto onde o método SIMPLER divergiu, ou seja, o método chegou bem perto de convergir.



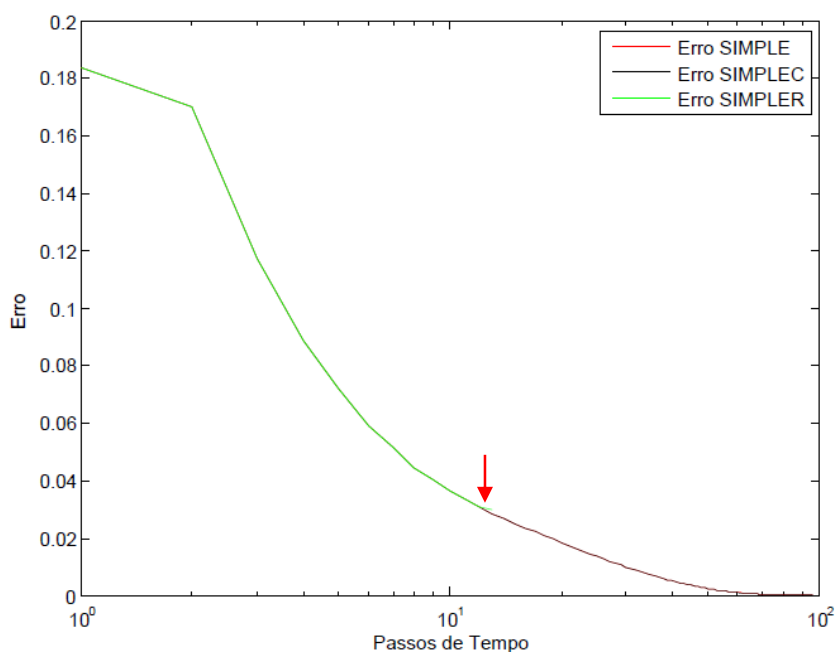
**Figura 6-20 – Redução do tempo de loop para malha 80x80, Re=100 e dt=0,0001.**

Foram necessários mais de 2500 segundos para que o método SIMPLE chegasse ao resultado final em quanto o método SIMPLEC atingiu a convergência em menos da metade do tempo.

A linha que representa a redução do tempo de loop do método SIMPLER se mostrou instável antes de divergir. Esse resultado explica o porquê do método divergir quando se aumenta o número de pontos nodais do domínio: Ao dividir mais o domínio analisado, os volumes discretizados se tornam menores o que faz aumentar o número de Courant. Esse resultado mostra a restrição da aplicação do método SIMPLER para condições mais adversas, em que se exige mais do método.

#### 6.1.3.3 $C=0,256$

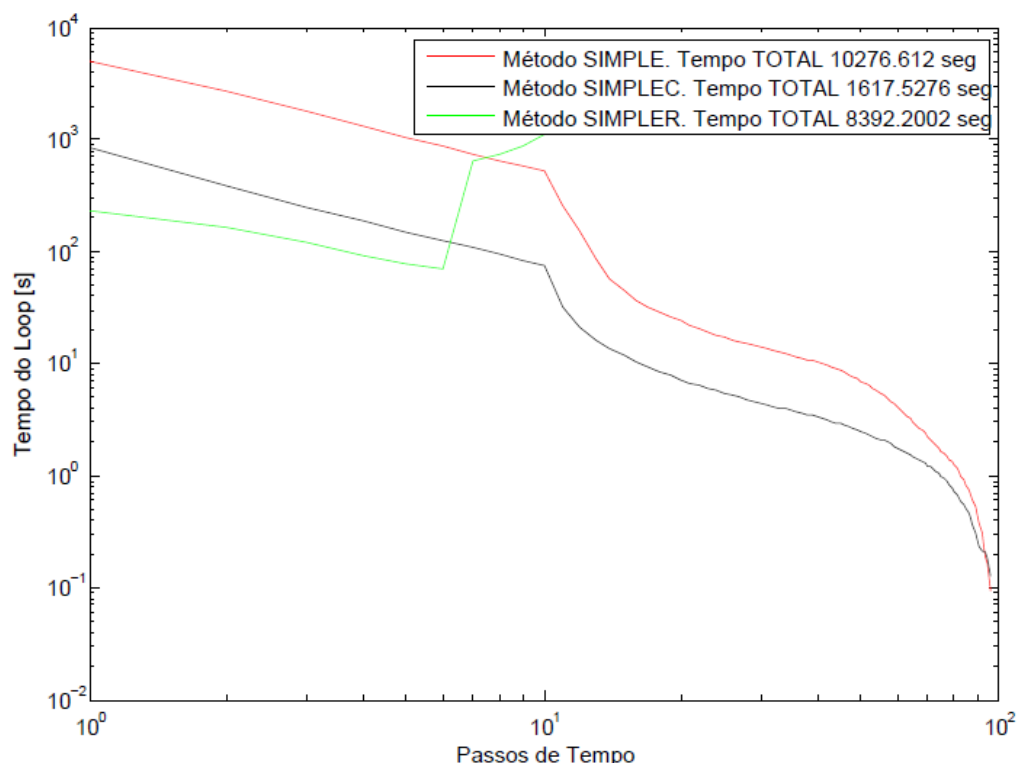
Abaixo são mostrados os resultados da simulação dos três métodos para uma malha de 80x80 volumes, número de Reynolds 100 e passo de tempo de  $3,2 \cdot 10^{-3}$ . O número de Courant foi aumentando bruscamente para reduzir o número de figuras e resumir mais a abordagem deste tópico



**Figura 6-21 – Evolução do erro para malha 80x80,  $Re=100$  e  $dt=0,0032$ .**

Como esperado, nessa simulação o método também SIMPLER divergiu, os métodos SIMPLE e SIMPLEC convergiram e atingiram o mesmo resultado final. No ponto sinalizado na figura anterior é possível ver onde o método

SIMPLER divergiu, ou seja, o algoritmo divergiu mais distante do ponto de convergência do que na abordagem anterior.

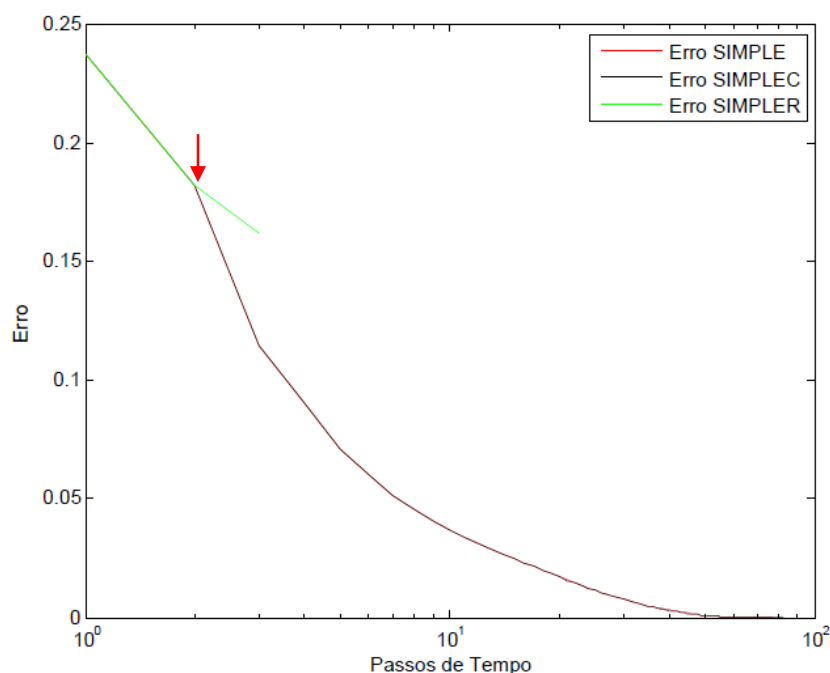


**Figura 6-22 – Redução do tempo de loop para malha 80x80, Re=100 e dt=0,0032.**

Apesar da convergência, o método SIMPLE se mostrou muito lento. Foram necessários mais de 10200 segundos (quase 3 horas de simulação) para que o método chegue ao resultado final em quanto os métodos SIMPLEC atingiu a convergência em torno de 1600 segundos.

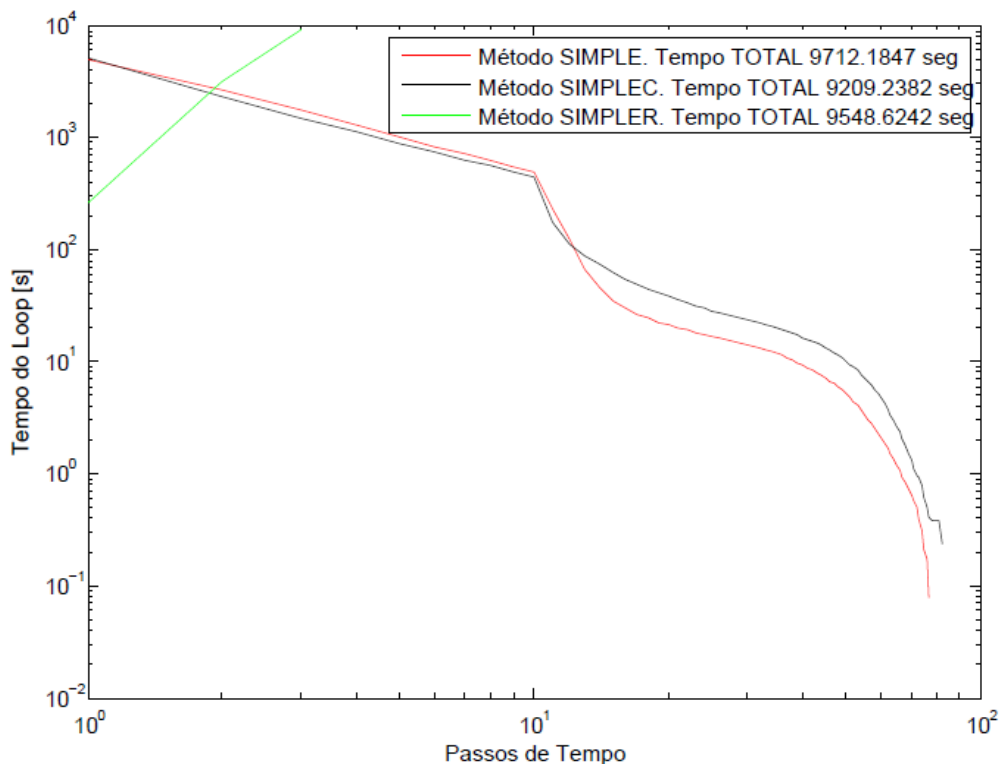
#### 6.1.3.4 C=0,4

Abaixo são mostrados os resultados da simulação dos três métodos para uma malha de 80x80 volumes, número de Reynolds 100 e passo de tempo de  $5 \cdot 10^{-3}$ .



**Figura 6-23 – Evolução do erro para malha 80x80, Re=100 e dt=0,004.**

Como esperado, nessa simulação o método SIMPLER também divergiu, os métodos SIMPLE e SIMPLEC convergiram e atingiram o mesmo resultado final. No ponto sinalizado na figura anterior é possível ver onde o método SIMPLER divergiu. Observa-se que ao aumentar o número de Courant o método tende a divergir mais longe do ponto de convergência.



**Figura 6-24 – Redução do tempo de loop para malha 80x80, Re=100 e dt=0,004.**

Essa simulação apresentou um resultado bem interessante, o método SIMPLE apesar de mais lento na maioria dos resultados já apresentados, se mostra capaz de convergir mesmo variando bruscamente o número de Courant. A figura anterior mostra que os algoritmos SIMPLE e SIMPLEC apresentaram basicamente o mesmo tempo para atingirem a convergência.

$C=0,4$  foi o maior número de Courant que os métodos conseguiram convergir, valores maiores apresentaram divergência além de um tempo de simulação absurdamente elevado.

Observa-se também que, apesar do aumento do passo de tempo, o tempo total de simulação não reduziu em todas as simulações, o menor tempo computacional foi atingido quando  $C=0,008$ . Esse efeito acontece por se exigir mais dos métodos quando se aumenta o número de Courant, os métodos necessitam fazer mais loops internos antes de evoluir no tempo.

## 6.2 MELHORIAS PARA O MÉTODO ESCOLHIDO

Nas simulações anteriores, o método SIMPLEC apresentou resultados mais significativos que os métodos SIMPLE e SIMPLER.

O algoritmo SIMPLER não convergiu quando era usado para calcular o escoamento em situações mais extremas. Então, para aplicações mais complexas, essa abordagem não se faz muito eficiente.

Apesar de convergir em todas as simulações apresentadas o método SIMPLE foi muito lento na maioria delas, isso inviabiliza a sua aplicação nas situações em que se precisa de resultados rápidos.

Devido aos resultados apresentados, o método que melhor se adapta às aplicações apresentadas no objetivo desse projeto é o algoritmo SIMPLEC.

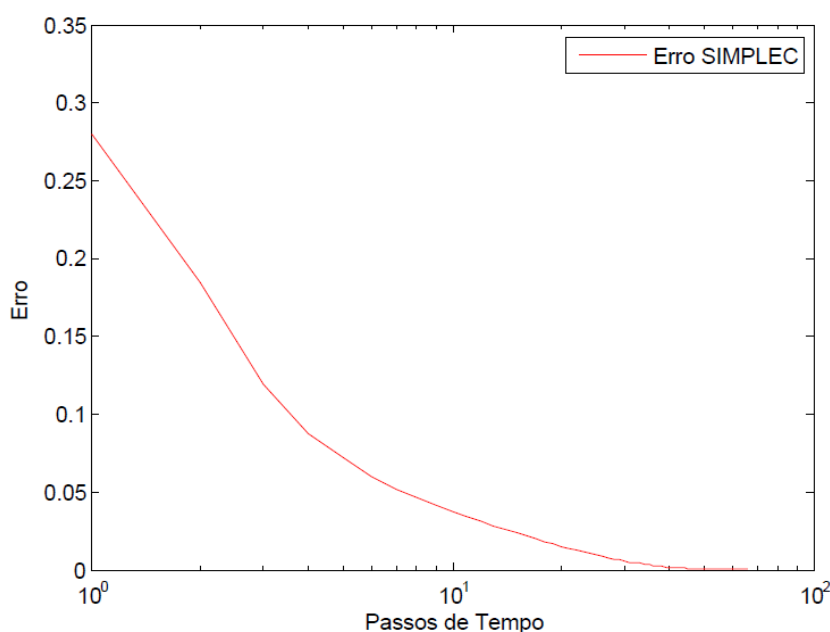
Abaixo é proposta uma melhoria para que o método SIMPLEC seja capaz de convergir para maiores números de Courant, e atingir a convergência mais rapidamente.

### 6.3 ATUALIZAÇÃO DOS COEFICIENTES

De acordo com a Figura 5-2 o algoritmo SIMPLEC calcula o valor dos coeficientes apenas no início de cada iteração. Neste tópico é proposta a atualização os coeficientes logo depois que se calcula o campo de velocidades pela equação da quantidade de movimento.

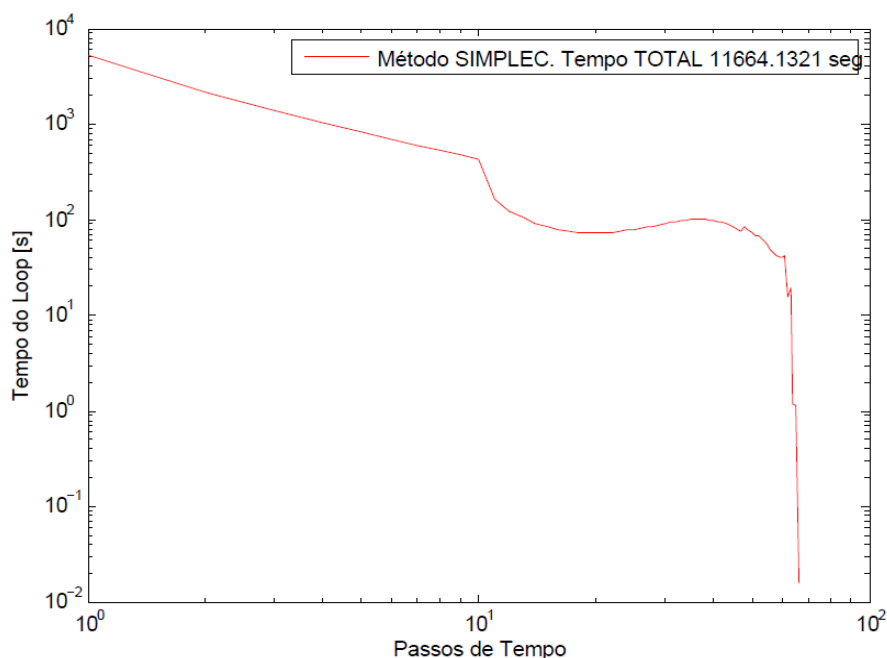
Atualizando os coeficientes mais de uma vez, espera-se que o efeito do aumento do passo de tempo, ou seja, do número de Courant, não provoque uma divergência tão rápida do método. Assim, é esperado que o método seja mais rápido e também seja capaz de resolver problemas de escoamento com maiores passos de tempo.

Abaixo são mostrados os resultados da simulação do método SIMPLEC com atualização dos coeficientes para uma malha de 80x80 volumes, número de Reynolds 100 e passo de tempo de  $7 \cdot 10^{-3}$ , ou seja,  $C=0,56$ .



**Figura 6-25 – Evolução do erro para malha 80x80, Re=100 e  $dt=0,007$ .**





**Figura 6-26 – Redução do tempo de loop para malha 80x80, Re=100 e dt=0,007.**

Os resultados apresentados na figura anterior mostram que a iniciativa de atualizar os coeficientes antes de calcular o campo de pressões é bem eficiente em relação a melhorar a convergência do método SIMPLEC para o aumento do Número de Courant. A atualização dos coeficientes possibilitou o método convergir com número de Courant de 0,56, ou seja, 40% maior que o maior número de Courant obtido com o método sem atualização de coeficientes ( $C=0,4$ ).

Para melhor análise dessa iniciativa, todos os resultados apresentados anteriormente de efeito da malha, do efeito do número de Reynolds e do efeito do número de Courant, foram refeitos com o método SIMPLEC atualizando os coeficientes. Essa abordagem, não necessariamente tornou o método mais rápido, porém possibilitou a convergência do método para maiores número de Courant.

Esses resultados não serão apresentados vista a elevada quantidade de figuras, o que tornaria esse trabalho muito extenso.

## 6.4 ESTUDO DO PROBLEMA DA CAVIDADE

Neste tópico o problema da cavidade é investigado fisicamente com o objetivo de descrever os fenômenos do escoamento que ocorrem quando se varia o número de Reynolds do problema.

Inicialmente foi feito o teste da malha para ver qual era a que dava melhores resultados. Notou-se, entretanto, que os fenômenos do escoamento eram iguais para todas as malhas testadas. Então, foi escolhida malha de 60x60 devido a sua melhor visualização e passo de tempo de  $10^{-4}$  pela maior velocidade de convergência.

### 6.4.1.1 Re=100

Abaixo são mostrados os resultados da simulação do método SIMPLEC com atualização dos coeficientes para uma malha de 60x60 volumes, número de Reynolds 100 e passo de tempo de  $10^{-4}$ .

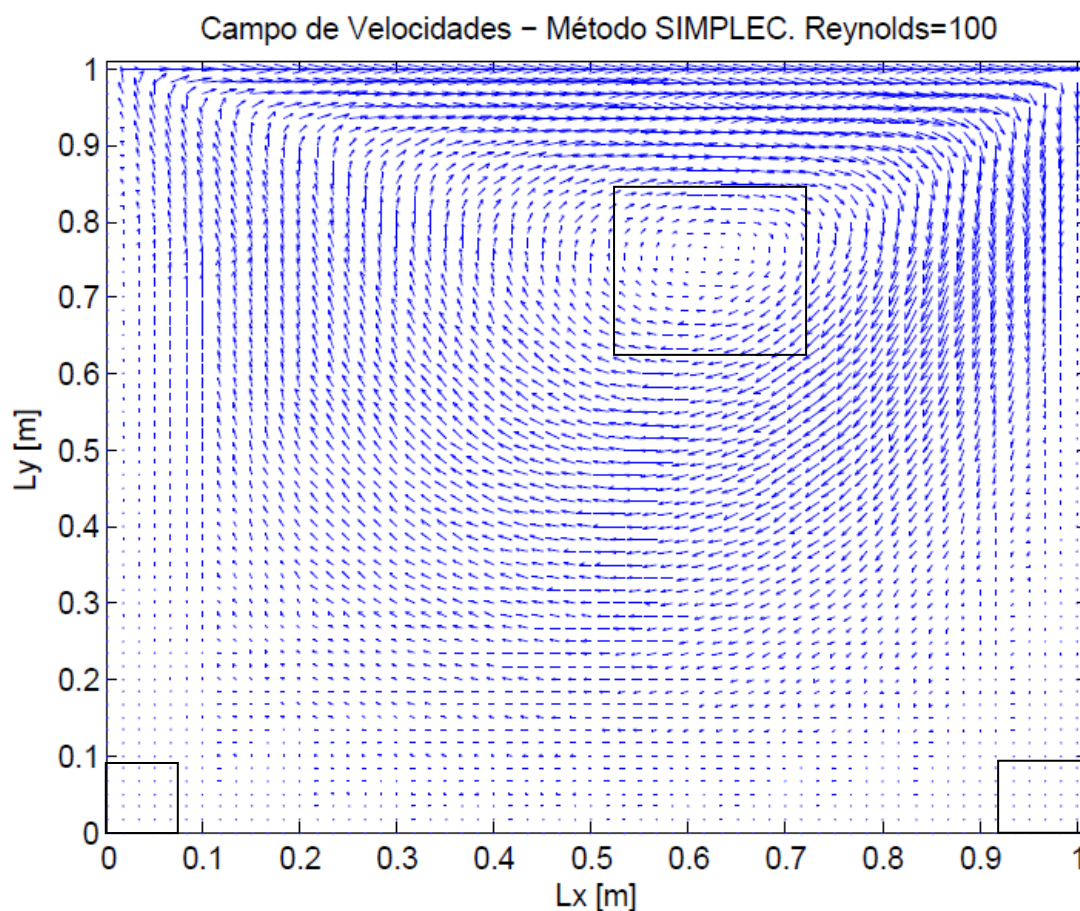
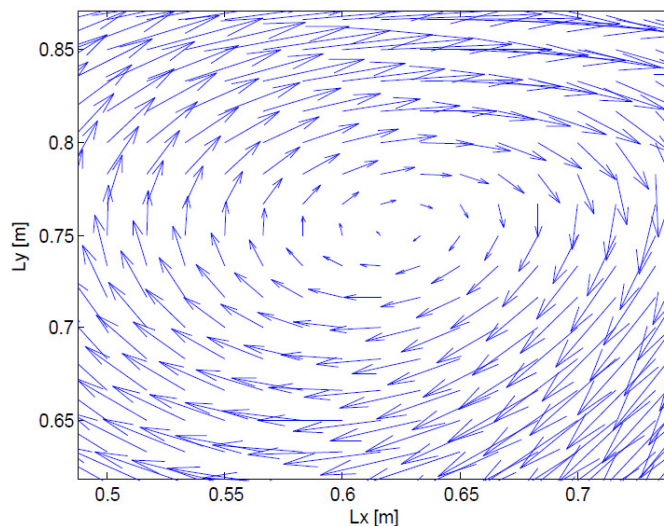


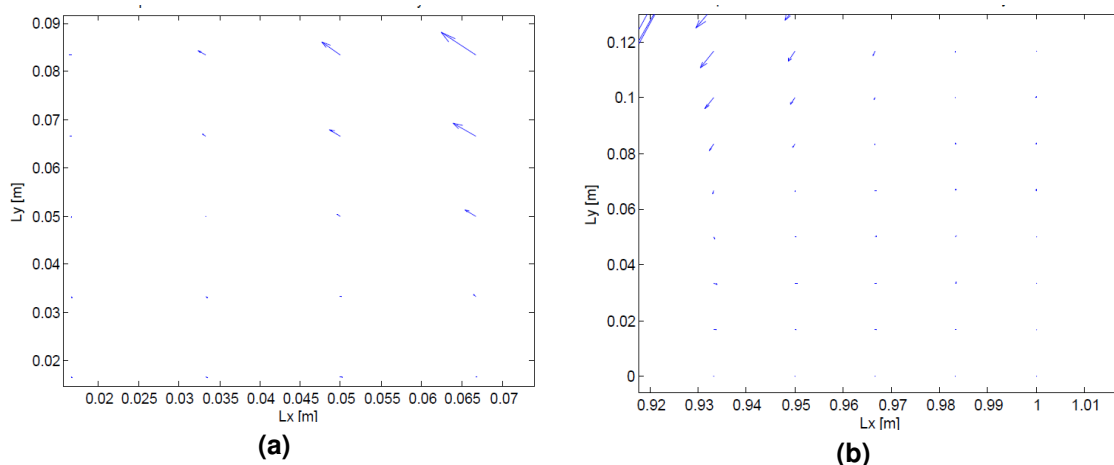
Figura 6-27 – Campo de Velocidades para malha 60x60,  $Re=100$  e  $dt=0,0001$ .

A figura anterior mostra o campo de velocidades dentro da cavidade quando a velocidade na face superior é de 1m/s. Ao centro é visto o vórtice contra-rotativo e nos cantos inferiores aparecem as recirculações.



**Figura 6-28 – Detalhe – Vórtice contra-rotativo.**

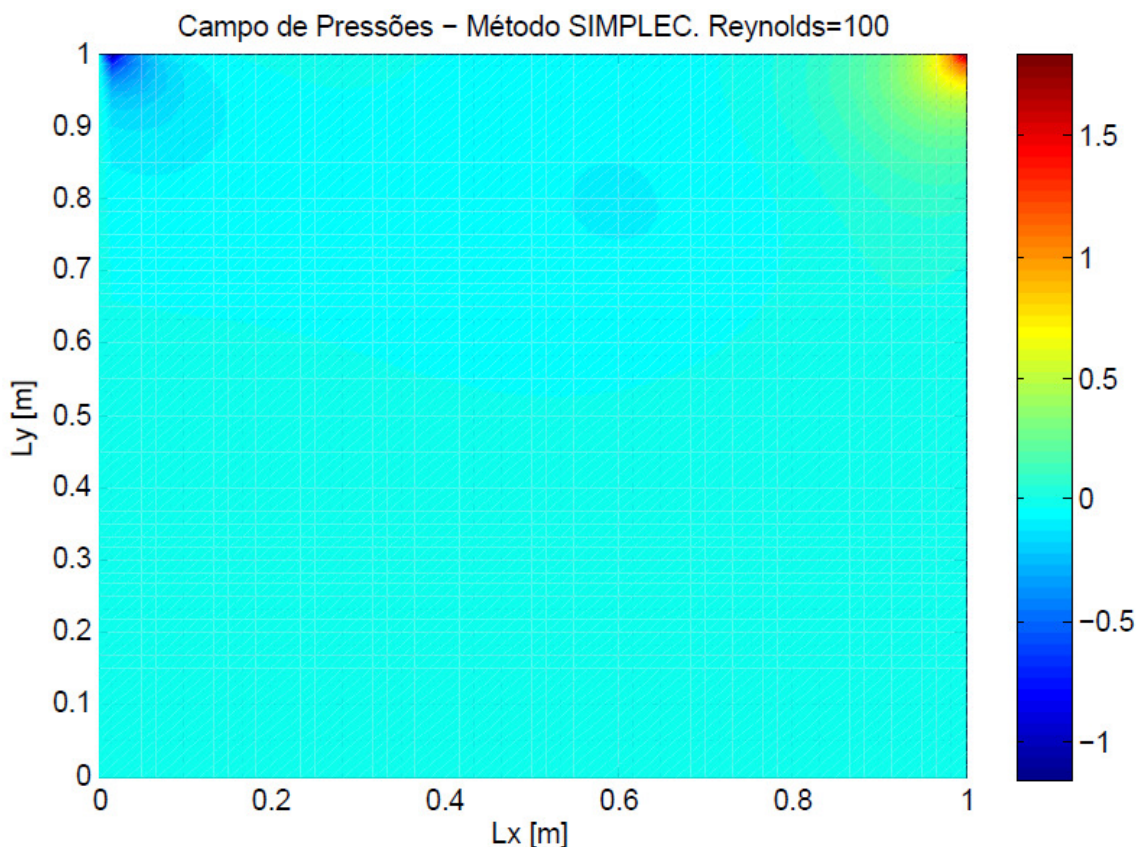
A figura anterior mostra o detalhe do vórtice formado para um escoamento com  $Re=100$ . Observa-se que o vórtice tem forma achatada e aparece na parte superior da cavidade.



**Figura 6-29 – Detalhe – (a) Recirculação canto esquerdo. (b) Recirculação canto direito.**

De acordo com a figura anterior, quando  $Re=100$  o escoamento na cavidade não apresenta recirculações bem definidas. Foi preciso ampliar várias vezes os vetores velocidade dos cantos inferiores da cavidade para que fosse possível mostrar as recirculações.

É interessante ressaltar que os vetores do canto inferior esquerdo precisaram de maior ampliação que do canto inferior direito. Mostrando que a recirculação esquerda é menos intensa para esse caso.

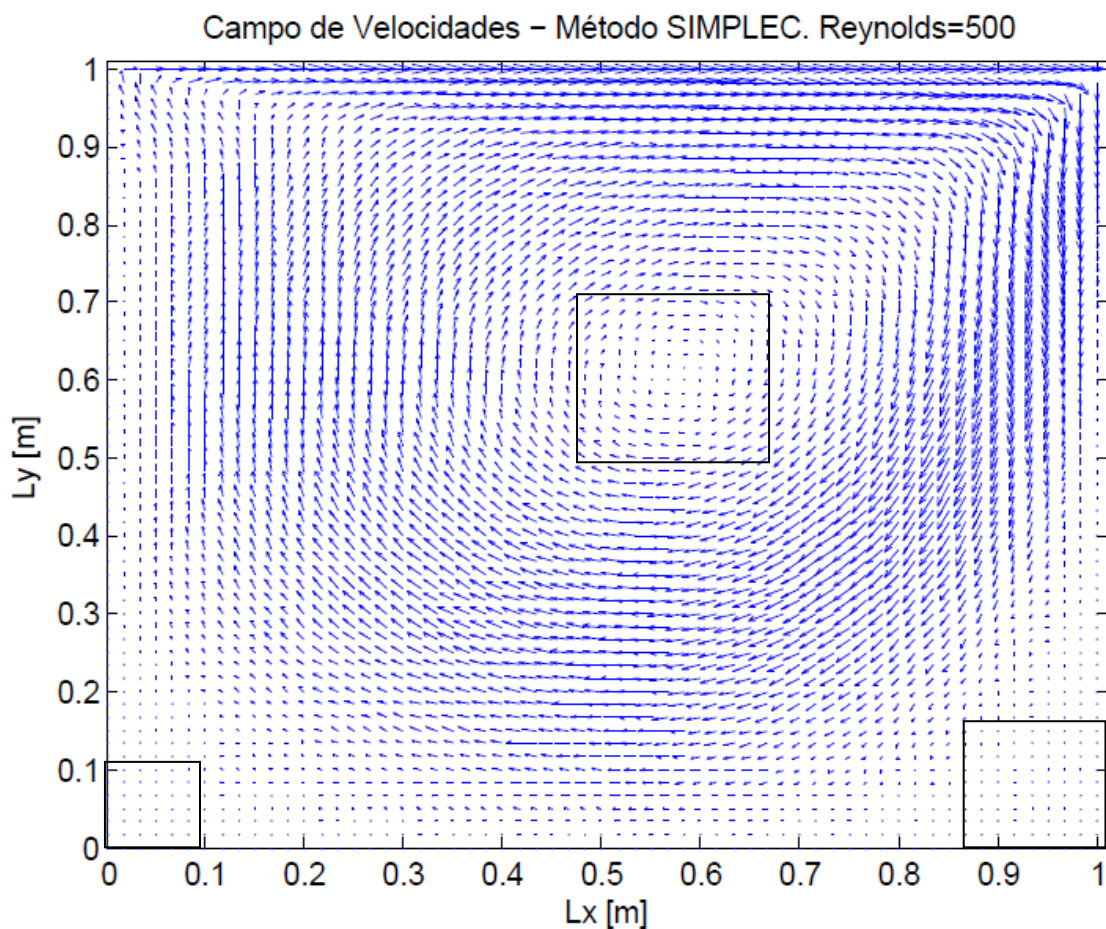


**Figura 6-30 – Campo de Pressões para malha 60x60,  $Re=100$  e  $dt=0,0001$ .**

A figura anterior mostra o campo de pressões do escoamento na cavidade quando  $Re=100$ . Nota-se que os maiores gradientes de pressões são localizados nas quinas superiores da cavidade, enquanto que o gradiente de pressão é quase nulo para os outros pontos.

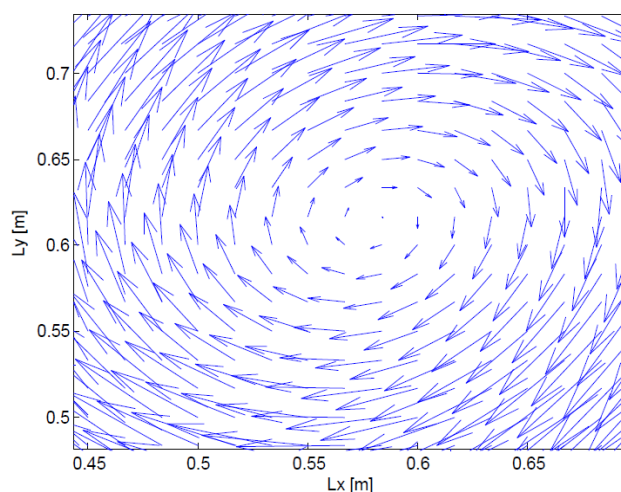
#### 6.4.1.2 $Re=500$

Abaixo são mostrados os resultados da simulação do método SIMPLEC com os mesmos parâmetros descritos anteriormente, mas com  $Re=500$ .



**Figura 6-31 – Campo de Velocidades para malha 60x60, Re=500 e dt=0,0001.**

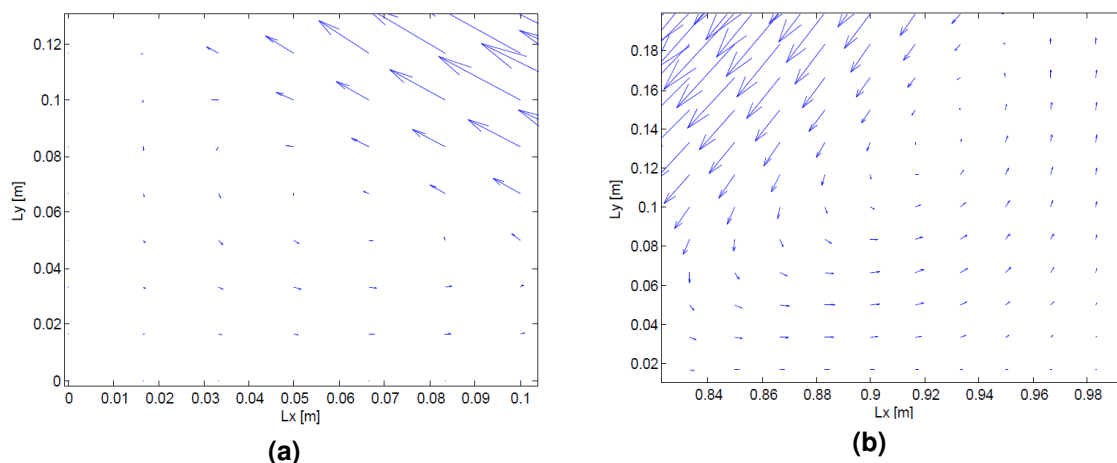
Na Figura 6-31 é visto o campo de velocidades dentro da cavidade quando a velocidade da face superior é de 1m/s. Os detalhes mostram ao centro o vórtice e nos cantos inferiores as recirculações.



**Figura 6-32 – Detalhe – Vórtice contra-rotativo.**

Observa-se agora que o vórtice se formou menos achatado e apareceu mais ao centro da cavidade.

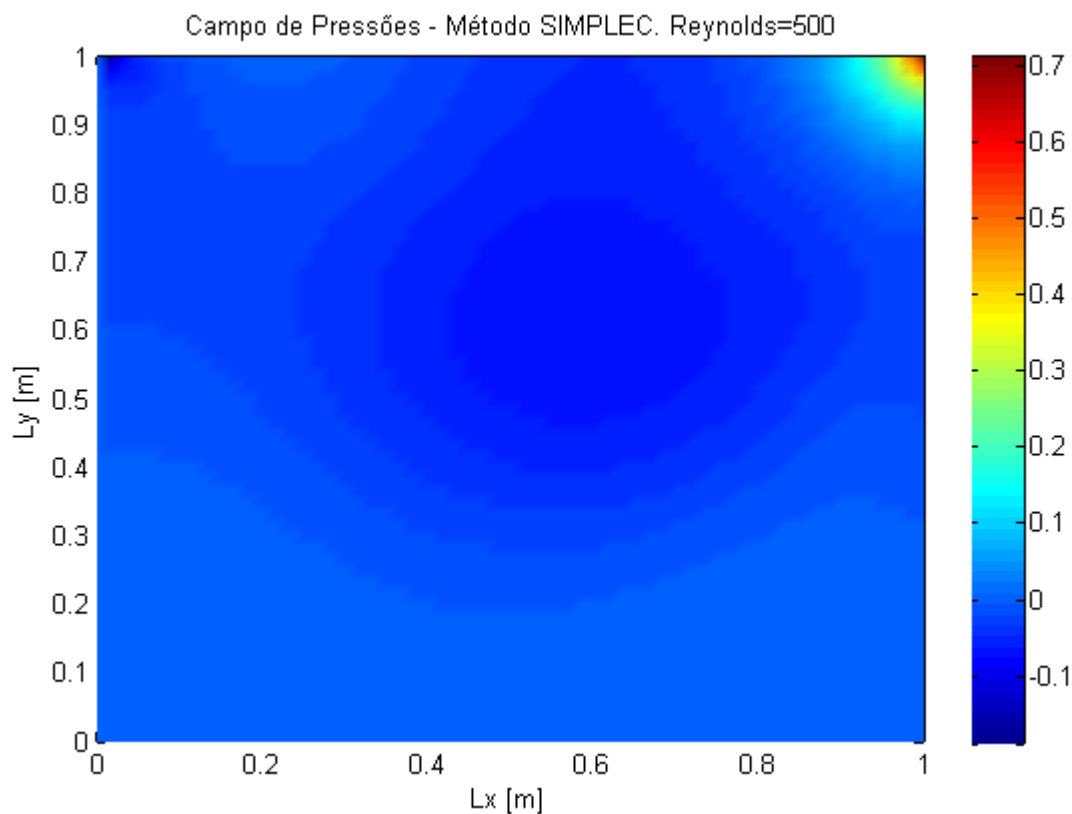




**Figura 6-33 – Detalhe – (a) Recirculação canto esquerdo. (b) Recirculação canto direito.**

Mesmo quando  $Re = 500$  o escoamento na cavidade ainda não apresenta recirculações bem definidas, mas as recirculações são mais aparentes que no escoamento com  $Re = 100$ . Também foi preciso ampliar várias vezes os vetores velocidade dos cantos inferiores da cavidade para que fosse possível mostrar as recirculações.

Os vetores do canto inferior esquerdo novamente precisaram de maior ampliação que do canto inferior direito. Nesse caso fica bem claro que a recirculação direita é maior e mais bem definida.

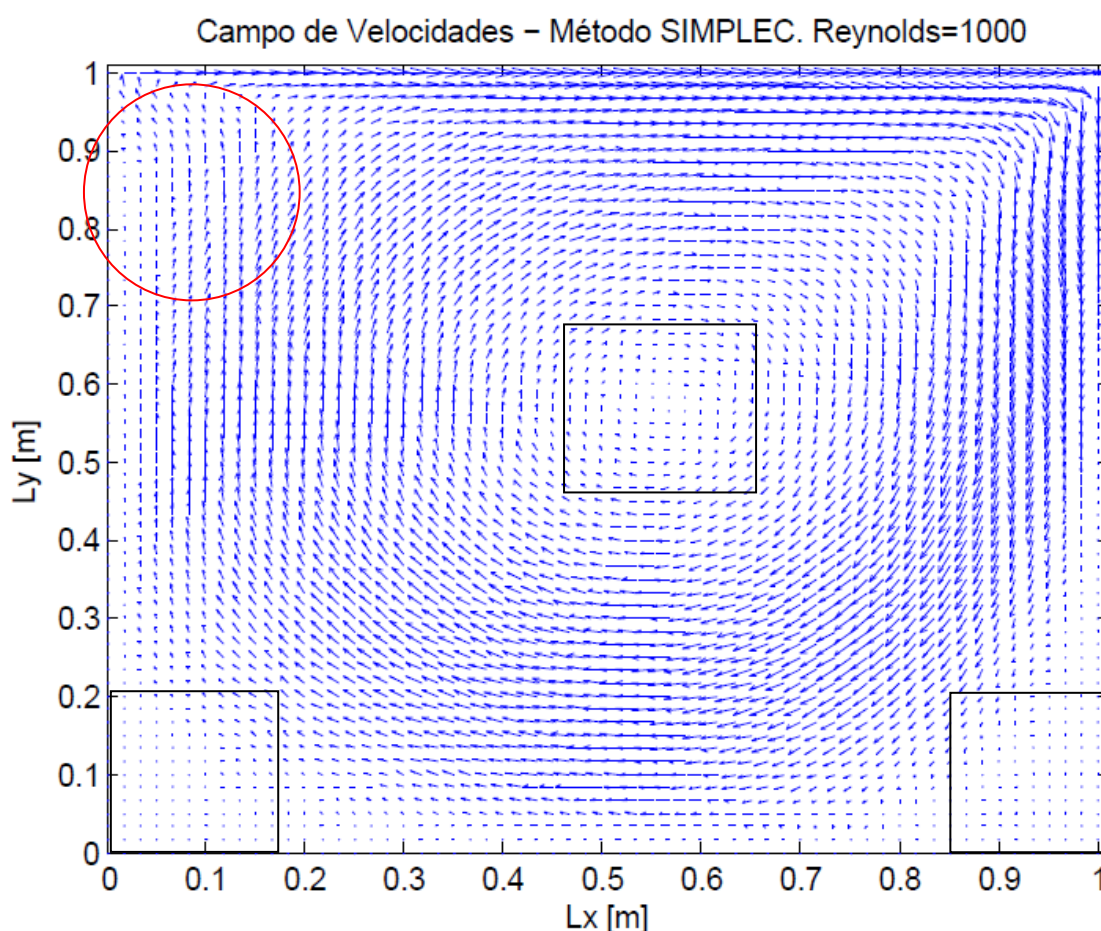


**Figura 6-34 – Campo de Pressões para malha 60x60,  $Re=500$  e  $dt=0,0001$ .**

Na figura anterior nota-se que o campo pressões é mais homogêneo e o gradiente de pressões localizado no canto superior direito é menos intenso para  $Re=500$ . Ao centro é formada uma figura circular bem no ponto de formação do vórtice do campo de velocidades.

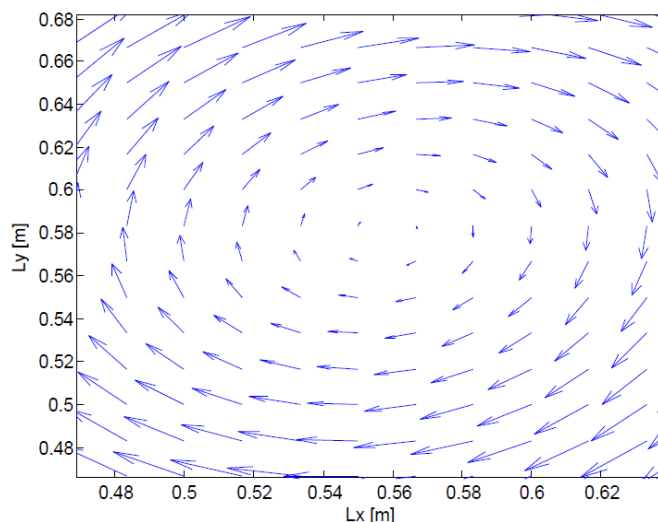
#### 6.4.1.3 $Re=1000$

A simulação mostrada abaixo apresenta resultados do método SIMPLEC com os mesmo parâmetros descritos anteriormente, mas com  $Re=1000$ .



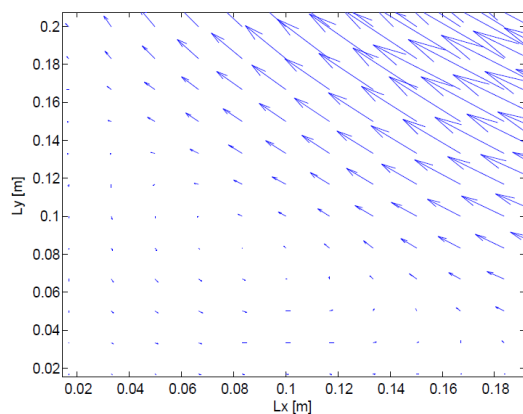
**Figura 6-35 – Campo de Velocidades para malha 60x60,  $Re=1000$  e  $dt=0,0001$ .**

No ponto sinalizado em vermelho, observa-se uma distorção do escoamento, primeiro as partículas tendem a seguir o movimento do vórtice, porém, devido à baixa pressão do canto superior esquerdo, são forçadas a se deslocar para este ponto e depois continuar sua trajetória. Observa-se também que o campo de velocidades tende a ser mais homogêneo quando se aumenta o número de Reynolds do escoamento.

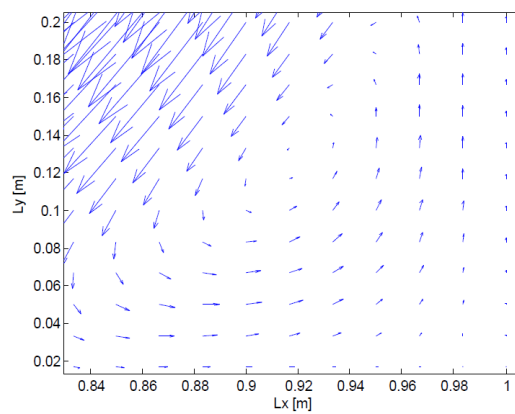


**Figura 6-36 – Detalhe – Vórtice contra-rotativo.**

A figura anterior mostra o detalhe do vórtice formado para um escoamento com  $Re=1000$ . O vórtice se formou mais circular e apareceu mais ao centro da cavidade.



**(a)**

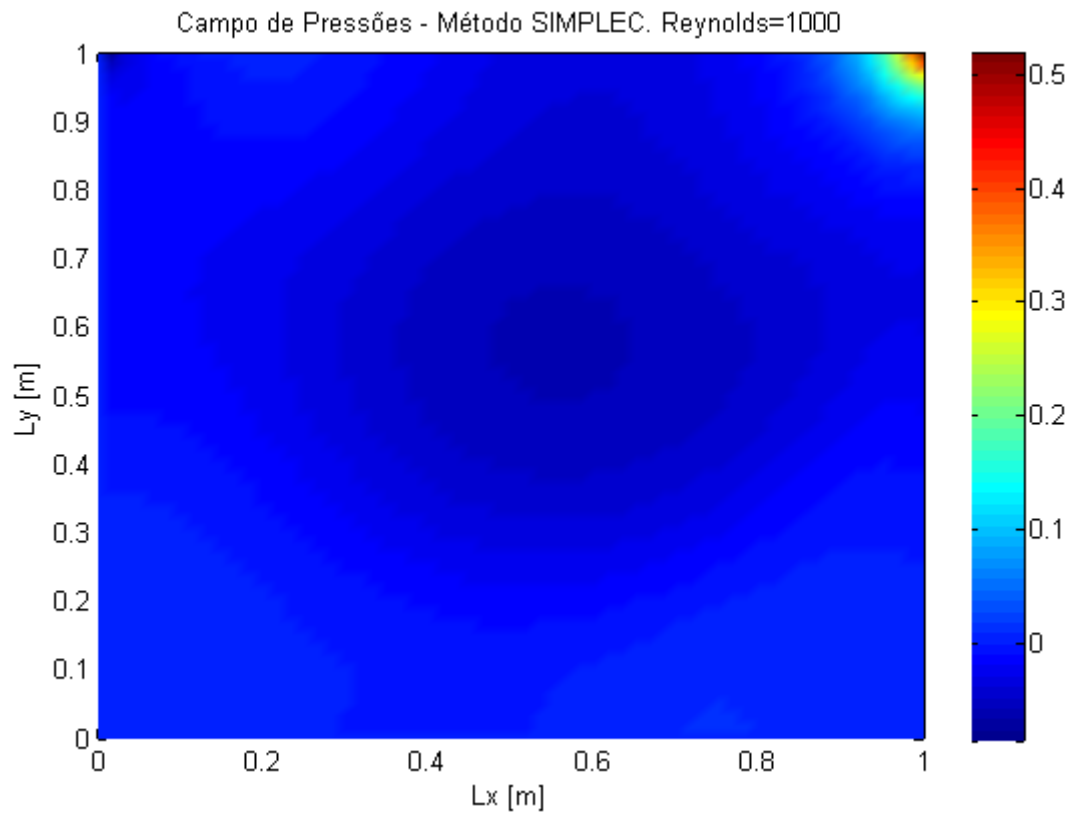


**(b)**

**Figura 6-37 – Detalhe – (a) Recirculação canto esquerdo. (b) Recirculação canto direito.**

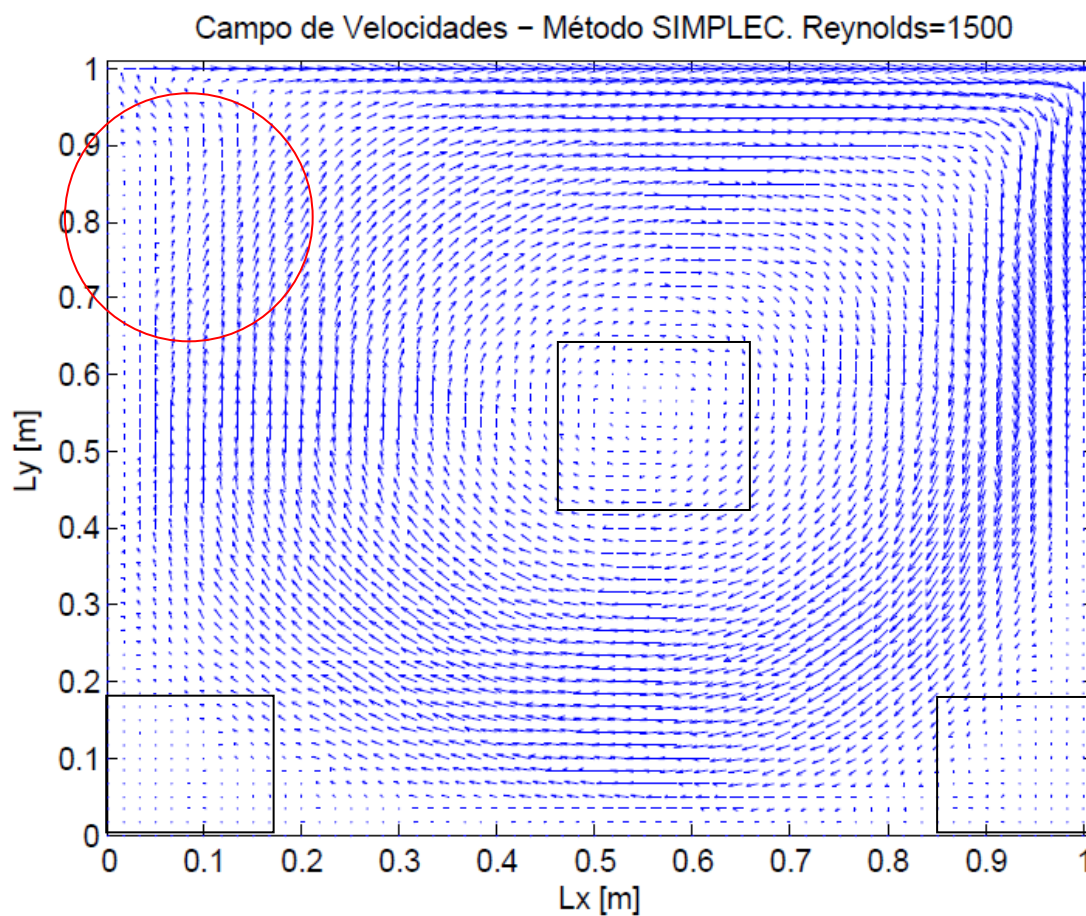
Mesmo tendo de ampliar várias vezes os vetores dos cantos inferiores, é fácil ver que as recirculações ficam mais aparentes para  $Re=1000$ , e também que a recirculação do canto direito é maior.





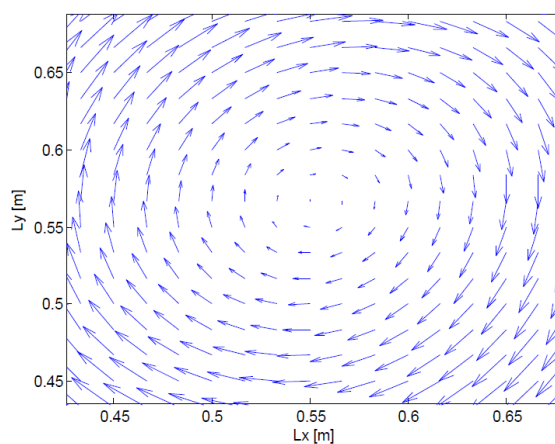
**Figura 6-38 – Campo de Pressões para malha 60x60, Re=1000 e  $dt=0,0001$ .**

Observa-se agora que o campo pressões é mais homogêneo e o gradiente de pressões localizado no canto superior direito é menos intenso. Ao centro a figura circular fica mais aparente e apresenta pressão bem baixa.

6.4.1.4  $Re=1500$ 

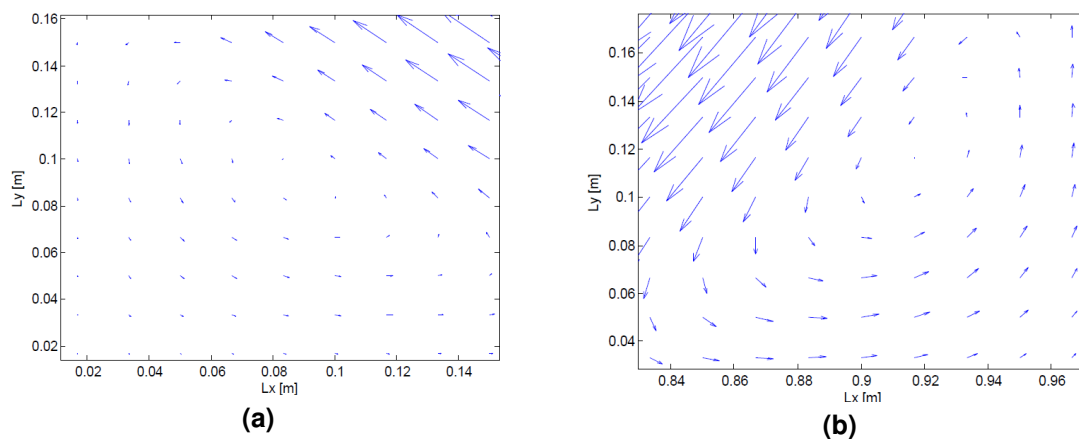
**Figura 6-39 – Campo de Velocidades para malha 60x60,  $Re=1500$  e  $dt=0,0001$ .**

No ponto sinalizado, fica ainda mais clara a distorção do escoamento comentada anteriormente. Observa-se também que o campo de velocidades tende a ser mais homogêneo quando se aumenta o número de Reynolds do escoamento, toda a cavidade apresenta vetores velocidades bem definidos.



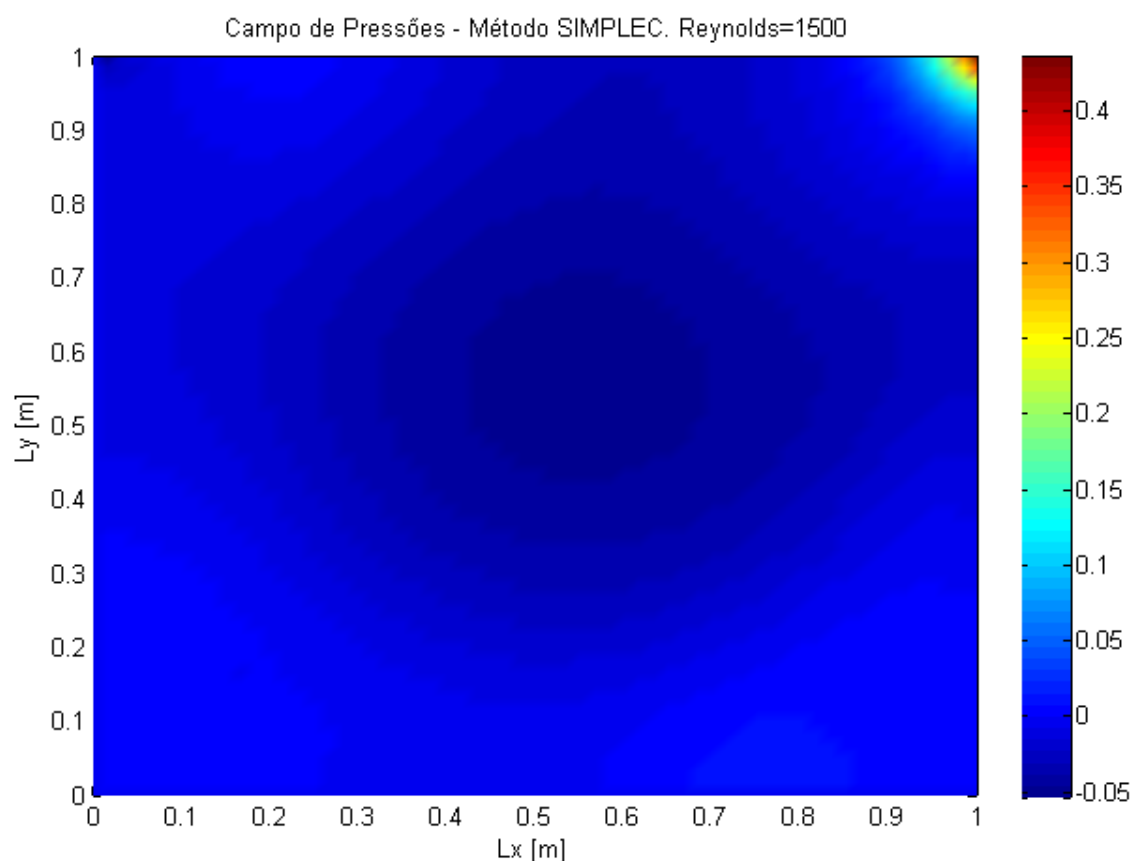
**Figura 6-40 – Detalhe – Vórtice contra-rotativo.**

Na figura anterior fica clara a formação circular do vórtice e sua localização no centro da cavidade, permitindo uma distribuição mais homogênea da velocidade



**Figura 6-41 – Detalhe – (a) Recirculação canto esquerdo. (b) Recirculação canto direito.**

Com número de Reynolds mais elevado o escoamento na cavidade apresenta recirculações mais bem definidas. Não foi preciso ampliar tanto os vetores velocidade dos cantos inferiores da cavidade para que fosse possível mostrar as recirculações. Nesse caso a recirculação do canto inferior direito fica bem mais intensa.

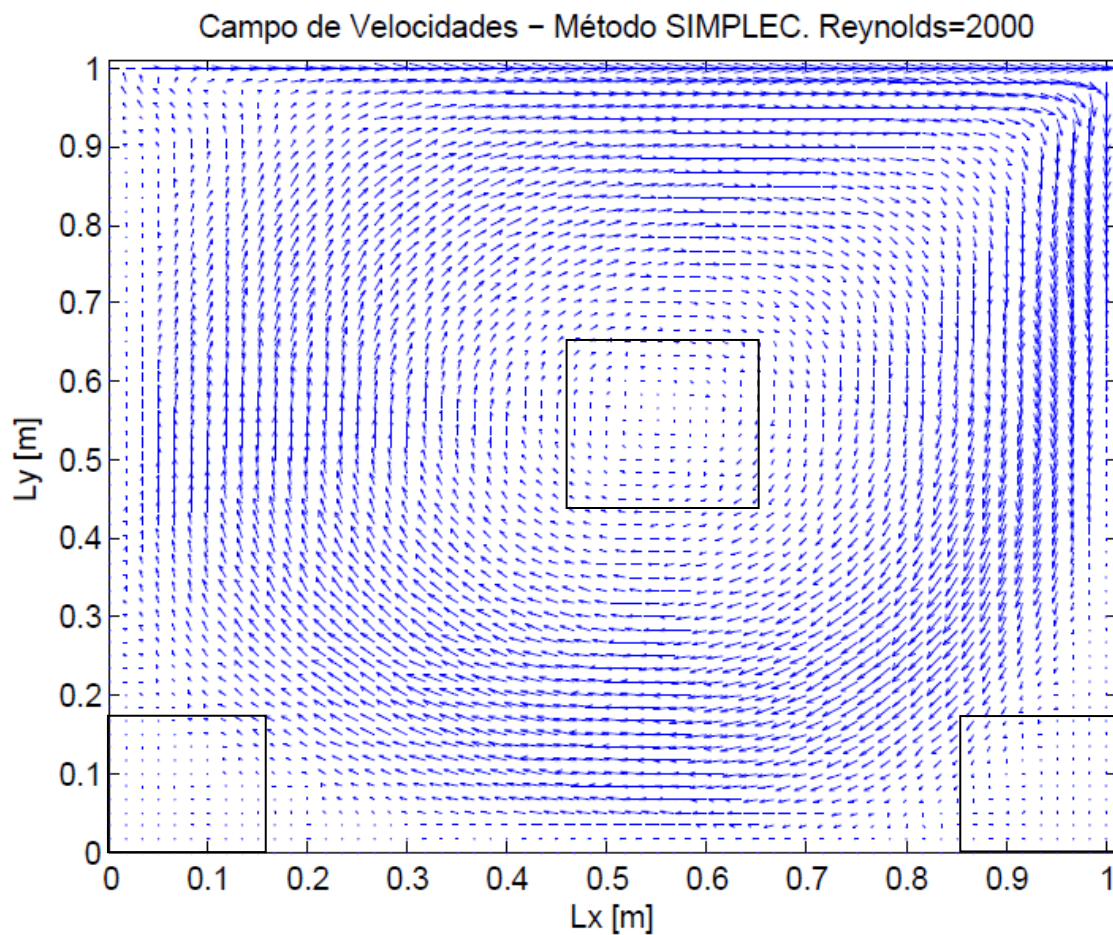


**Figura 6-42 – Campo de Pressões para malha 60x60,  $Re=1500$  e  $dt=0,0001$ .**

Nota-se ao centro da figura anterior que a formação circular fica mais aparente e apresenta pressão negativa. Já o gradiente de pressão no ponto superior direito é bem mais suave para número de Reynolds mais elevado.

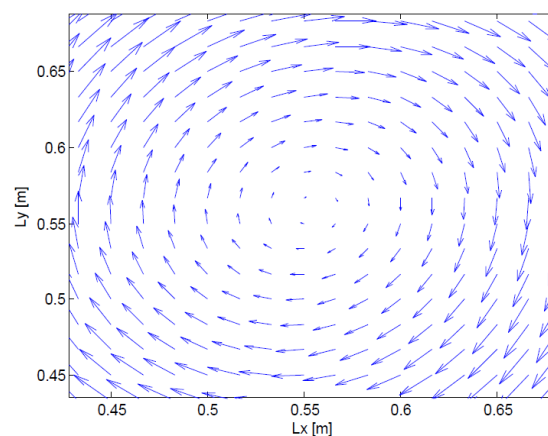
#### 6.4.1.5 $Re=2000$

Neste tópico será apresentada uma simulação não abordada anteriormente. Como o método SIMPLEC apresentou boa convergência para diferentes números de Reynolds, será analisado o escoamento na cavidade com número de Reynolds próximo da transição laminar- turbulento ( $Re=2000$ ).

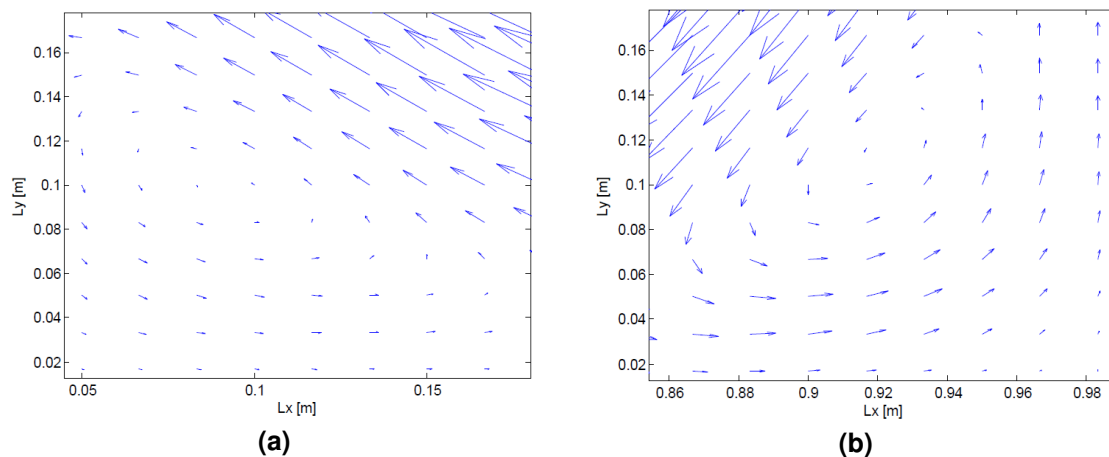


**Figura 6-43 – Campo de Velocidades para malha 60x60, Re=2000 e  $dt=0,0001$ .**

Mesmo o escoamento estando próximo de se tornar turbulento, Não foi observado muita diferença entre o campo de velocidades entre Re=1500 e Re=2000.

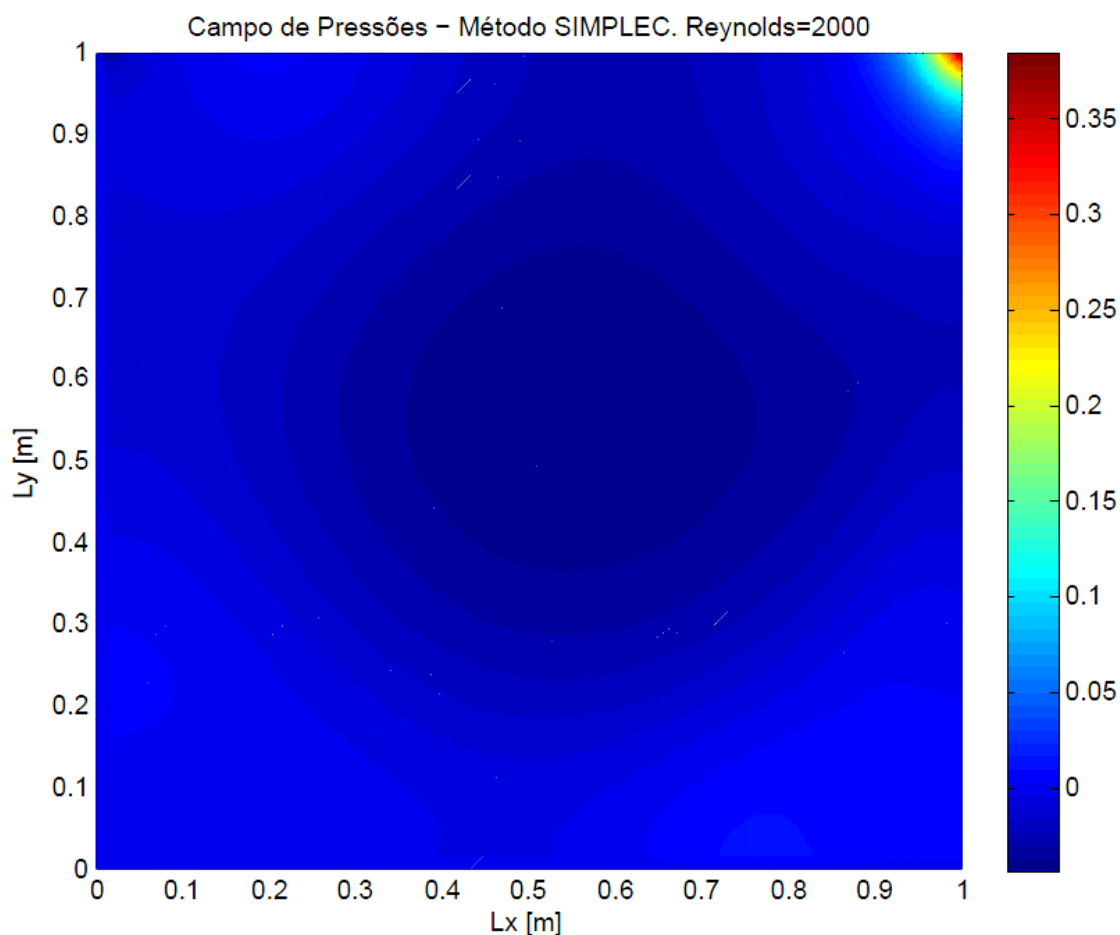


**Figura 6-44 – Detalhe – Vórtice contra-rotativo.**



**Figura 6-45 – Detalhe – (a) Recirculação canto esquerdo. (b) Recirculação canto direito.**

A diferença mais aparente entre o escoamento na cavidade quando  $Re=1500$  e  $Re=2000$  é que no ultimo caso as recirculações são mais aparentes, especialmente a recirculação no canto inferior esquerdo.



**Figura 6-46 – Campo de Pressões para malha 60x60,  $Re=2000$  e  $dt=0,0001$ .**

Devida a maior homogeneidade do campo de pressões se conseguiu apresentar mais detalhadamente a distribuição das pressões ao longo da

cavidade. Fica bem claro, observando a figura anterior, as linhas isobáricas ao longo da cavidade, a baixa pressão no ponto central e a distorção no campo de pressões provocado pelas recirculações.

Resultados com  $Re$  maiores não foram testados, pois o algoritmo não tem implementado o devido modelo de turbulência para calcular o campo de velocidades para escoamento com  $Re > 2300$ .

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O método SIMPLE atingiu a convergência em todas as simulações apresentando curvas estáveis até o resultado final. Esses resultados mostram que o algoritmo apresentado por Patankar e Spalding em 1972 ainda pode ser empregado em muitas situações estudadas atualmente.

No método SIMPLE a equação de correção de pressão  $P'$  foi satisfatória para corrigir o campo de velocidades, porém não robusta o bastante para corrigir o campo de pressões expressivamente. Logo, a lenta convergência do método SIMPLE o torna obsoleto para aplicações na indústria ou em outras situações em que se exigem rápidos resultados.

O uso de uma equação discretizada para a pressão no método SIMPLER pode calcular o campo de pressões mais corretamente. Notou-se também que apesar de fazer mais cálculos que o método SIMPLE, a convergência foi atingida bem mais rápido usando o método SIMPLER na maioria dos casos.

Em contra partida, o método apresentou bons resultados apenas para condições onde o número de Courant é baixo, ou seja, há restrições na escolha do número de volumes da malha e da escolha do passo de tempo.

Essas restrições tornam a aplicação do método SIMPLER dificultosa, porém, para o casos onde a escolha da malha e do passo de tempo não são restrições para a solução do problema, esse método pode ser aplicado sem maiores restrições.

O método SIMPLEC apresentou resultados mais consistentes que os obtidos com o método SIMPLER, nos casos onde o número de Courant ou número de Reynolds são elevados. Em relação ao método SIMPLE, o método SIMPLEC se mostrou mais rápido em quase todos os resultados. Esses resultados estão de acordo com os resultados encontrados por Versteeg, H.K., Malalasekera, W. em [12] .

Em relação à variação do número de elementos da malha, o método SIMPLEC convergiu de forma rápida e sem muitas oscilações. O método tendeu a



convergir mais rapidamente quando se aumentou o número de Reynolds do problema. Porém, apesar do aumento do passo de tempo, o método não apresentou convergência mais rápida, isso se deve ao fato do aumento do passo de tempo aumentar proporcionalmente o número de Courant e dessa forma o método teve de fazer mais loops internos para chegar à convergência no instante setado antes de evoluir no tempo.

Alguma consideração ainda deve ser feita em relação à escolha do método Upwind como função de interpolação. Na solução de problemas bidimensionais, a escolha de uma função de interpolação unidimensional, ou seja, uma função de interpolação não exata dá origem aos erros de truncamento de natureza dissipativa associados aos termos advectivos, esses erros são classificados como difusão numérica. A difusão numérica foi minimizada com o aumento do refino da malha, porém pode ter contribuído para desestabilizar algum método em determinadas simulações.

O escoamento na cavidade quadrada, calculado com o algoritmo SIMPLEC, apresentou todos os fenômenos citados na literatura. Os fenômenos como vórtice e recirculações ficaram mais definidos quando a malha foi mais refinada, ou seja, se mostrou com maiores detalhes a distribuição da velocidade e pressão no domínio estudado. O campo de velocidades calculado se mostrou muito suscetível a variação do número de Reynolds.

Para baixos números de Reynolds, ou seja, escoamento laminar, a dispersão da velocidade pela cavidade foi dificultosa devido ao domínio das forças viscosas, tornando a característica do problema mais difusiva. O vórtice contra-rotativo do campo de velocidades tendeu a se formar mais achatado e na parte superior da cavidade. O campo de velocidades tendeu a ser menos homogêneo dificultando a visualização das recirculações nos cantos inferiores

Esse comportamento foi mudado expressivamente quando o número de Reynolds do escoamento foi aumentado. O problema se tornou mais advectivo, reduzindo a influência das forças viscosas o que facilitou a dispersão da velocidade por toda a cavidade. Assim, o vórtice tendeu a se formar mais ao centro, e as recirculações ficaram maiores e mais visíveis.

## 8 SUGESTÃO DE TRABALHOS FUTUROS

Depois da escolha do método de solução do acoplamento-pressão velocidade, o trabalho inicial de desenvolver um programa para a solução de problemas complexos de engenharia e da física, pode continuar ser desenvolvido. Muito ainda pode ser melhorado e acrescentado ao programa inicial antes de aplicá-lo a problemas reais:

1. Estender o algoritmo SIMPLEC, apresentado neste trabalho, para 3 dimensões.
2. Implementar uma função de interpolação mais adequada para cada problema analisado, métodos de aproximação quadrática ou cúbica (QUICK apresentado no APÊNDICE B, SWUDS, WUDS-E ou FIC), podem reduzir bastante o problema de difusão numérica.
3. Acrescentar um método mais robusto de solução dos sistemas de equações algébrica no algoritmo apresentado, por exemplo, métodos Multgrid encontrados em [6].
4. Unir o algoritmo apresentado ao trabalho realizado anteriormente, de solução da equação da conservação da energia. E Acrescentar as equações necessárias para tornar o algoritmo aplicável a problemas de escoamento compressível.
5. Implementar um modelo de turbulência no algoritmo para que seja capaz de solucionar problemas com elevado número de Reynolds.
6. Implementar um algoritmo gerador de malhas e acoplá-lo ao programa principal para facilitar a aplicação em problemas mais complexos.
7. Seria muito interessante, depois de fazer as alterações sugeridas anteriormente, aplicar o algoritmo em problemas reais e comparar os resultados com os obtidos na literatura ou obtidos com outros softwares.

## 9 REFERÊNCIAS

1. Andrade, Rafael M. **“Simulação computacional do Perfil de Temperaturas de uma Pá de Turbina a gás Resfriada a Ar Pelo Método dos Volumes finitos”**. 2009.
2. Cristo, H.Pereira, **“Guia básico de programação em linguagem Fortran 77 e 90”**. 2003
3. Incropera, Frank P.,Witt, David P., **“Fundamentos de transferência de calor e massa”**,Editora LTC, Quinta Edição,2002.
4. Ferziger, Joel H., Perić, Milovan, **“Computacional Methods for Fluid Dynamics”** Springer, 2002.
5. Fox, Robert W., Mcdonald Alan T., Pritchard Philip J **“Introdução à Mecânica dos Fluidos”** 6ª Ed.
6. Lage, Paulo L. C., Pinto, José Carlos, **“Métodos numéricos em Problemas de Engenharia Química”**, Editora e-papers, 2001.
7. Maliska, Clovis R, **“Transferência de calor e mecânica dos fluidos Computacional”**. 2ª edição,2004
8. Matsumoto, Elia Yathie, **“Matlab 6.5 - Fundamentos de Programação”**.1999
9. Patankar,S.V., **“Numerical Heat Transfer and Fluid Flow”** 1980.
- 10.R. Courant, K. Friedrichs and H. Lewy, **"On the partial difference equations of mathematical physics"**, *IBM Journal*, March 1967, pp. 215-234, English translation of the 1928)
- 11.Rodrigues, Tadeu T., Gasche, Luiz José, **“Estudo Numérico do Escoamento Laminar Transiente em Cavidades Quadradas”**
- 12.Shapiro, Howard N., Moran, Michael J., **“Princípios de termodinâmica para engenharia”** Editora LTC, Quarta Edição,2002.

13. Versteeg, H.K., Malalasekera, W., **“Introduction to computational fluid dynamics”**, 1995.

## 10 APÊNDICES

### APÊNDICE A – Equação de Conservação da Energia

A Figura 10-1 mostra um elemento de massa fixa  $M$  viajando no espaço com velocidade  $u_i \hat{e}_i$  do escoamento. Como já descrito, o método Lagrangiano consiste em analisar as propriedades (energia, massa específica, temperatura, velocidade, etc.) do volume enquanto este viaja ao longo do escoamento. Como a matéria continua fixa no volume, não há fluxo de massa pela sua superfície.

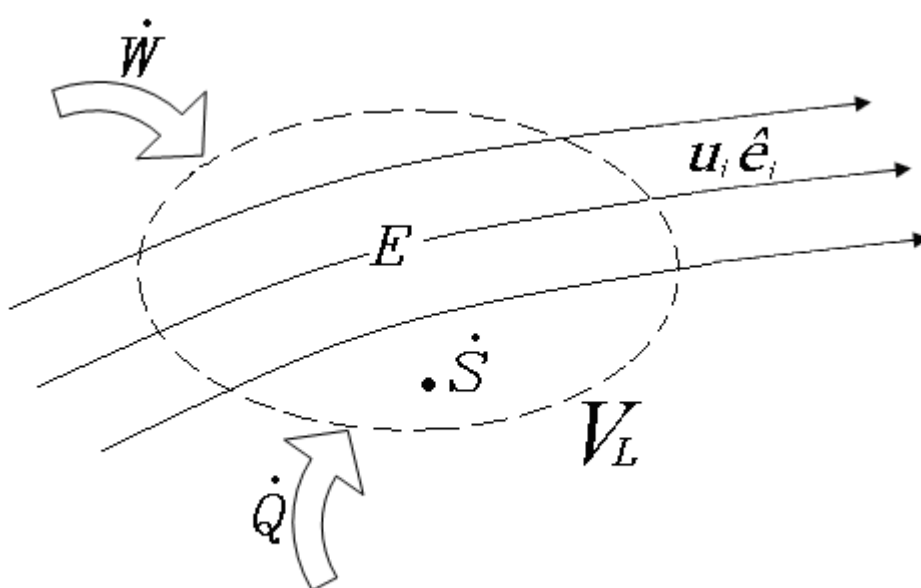


Figura 10-1 – Fluxo de Energia pelo Volume de Controle.

Nesse caso a energia total do sistema é composta pela energia específica por unidade de massa e a energia cinética específica devida à velocidade da matéria dentro do volume.

De acordo com a Primeira Lei da Termodinâmica, se observa que a variação total da energia com o tempo depende apenas da taxa de calor que flui pela sua superfície, das taxas de trabalho exercidas pelas forças externas e de corpo e do calor injetado (retirado) através de fontes (sumidouros):

$$\frac{DE}{Dt} = \dot{Q} + \dot{W} + \dot{S} \quad (10.1)$$

Onde:

$$E = \int \rho \left( e + \frac{1}{2} u_i u_i \right) dV \quad (10.2)$$

Aqui o método de análise de matéria fixa (método Lagrangiano) também será transformado para o método de análise de volume fixo (método Euleriano). Para tanto será aplicado o Teorema dos Transportes de Reynolds Eq. (3.4), logo o termo do lado esquerdo da equação da 1ª Lei da Termodinâmica se torna:

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V \rho \left( e + \frac{1}{2} u_i u_i \right) dV \quad (10.3)$$

$$\frac{DE}{Dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{1}{2} u_i u_i \right) \right] dV + \int_S \rho \left( e + \frac{1}{2} u_i u_i \right) (u_j n_j) dS \quad (10.4)$$

A taxa de calor, representada pelo primeiro termo do lado direito da Eq. (10.1), indica que há energia em trânsito devido a uma diferença de temperatura, ou seja, sempre que o gradiente de temperatura em um meio ou entre meios for diferente de zero ocorrerá transferência de calor.

$$\dot{Q} = - \int_S q_i n_i dS \quad (10.5)$$

Essa equação representa a integral em toda a superfície da taxa de calor que atravessa a superfície do volume indicado.

O segundo termo do lado esquerdo da Eq. (10.1) representa o fluxo de trabalho através do volume de controle. No escoamento de um fluido real, há sempre atritos internos que se opõem ao movimento. São as chamadas forças de viscosidade, que produzem tensões nas superfícies de qualquer partícula do fluido.

O fluxo de trabalho ocorre devido às forças provocadas pelas tensões de superfície (forças de superfície) e pelas forças de corpo devido à gravidade, a campo elétrico, a campo magnético, entre outras.

$$\dot{W} = \dot{W}_S + \dot{W}_B \quad (10.6)$$

Provocado pelas forças de superfície:

$$\dot{W}_S = \int_S (f_i u_i) dS \quad (10.7)$$

Onde:

$$f_i \hat{e}_i = \sigma_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j \cdot s_j \hat{e}_j \quad (10.8)$$

A força em um ponto qualquer da superfície é obtida do produto do tensor das tensões pelo vetor área perpendicular a superfície do volume que atua a essa força.

As tensões de superfície surgem devida às diferenças de pressão dinâmica que aparecem ao longo do escoamento e as tensões de cisalhamento devido à viscosidade do fluido escoante:

$$\sigma_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j = -\bar{p} \delta_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j + \tau_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j \quad (10.9)$$

Então a integral das forças de superfície na superfície do volume de controle pode ser escrita como:

$$\dot{W}_S = \int_S (\sigma_{ij} n_j u_i) dS \quad (10.10)$$

Provocado pelas forças de Corpo:

Serão consideradas apenas as forças de corpo provocadas pela gravidade:

$$\dot{W}_B = \int_m (\vec{g} dm) \cdot \vec{u} \quad (10.11)$$

Que representa a integral do produto da gravidade local e a velocidade do escoamento em toda a massa do volume.

O termo de fontes de calor é adicionado ao balanço de energia no caso de haver algum ponto de geração ou retirada de energia no volume de controle.

$$\dot{S} = \int_{\mathcal{V}} \dot{s} dV \quad (10.12)$$

Agrupando todos os termos na equação do balanço de energia do volume de controle, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{1}{2} u_i u_i \right) \right] dV + \int_{\mathcal{S}} \rho \left( e + \frac{1}{2} u_i u_i \right) (u_j n_j) d\mathcal{S} = \\ - \int_{\mathcal{S}} q_i n_i d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{S}} (\sigma_{ij} n_j u_i) d\mathcal{S} + \int_m (\bar{g} dm) \bar{u} + \int_{\mathcal{V}} \dot{s} dV \end{aligned} \quad (10.13)$$

Ao observar a equação acima nota-se a presença de diferentes parâmetros de integração (volume, superfície e massa). O próximo passo é transformar todas em integrais de volume:

Aplicando o Teorema da Divergência ou de Gauss Eq. (3.6), o termo referente à energia pode ser escrito como:

$$\frac{DE}{Dt} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{1}{2} u_i u_i \right) \right] dV + \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \rho \left( e + \frac{1}{2} u_i u_i \right) u_j \right] dV \quad (10.14)$$

Similarmente ao termo de energia o termo de taxa de calor se torna:

$$\dot{Q} = - \int_{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial (q_i)}{\partial x_i} \right) dV \quad (10.15)$$

Dada as forças de superfície:

$$\dot{W}_s = \int_{\mathcal{S}} (\sigma_{ij} n_j u_i) d\mathcal{S} \quad (10.16)$$

Onde  $n_j$  é, então, deslocado para se utilizar o teorema de Gauss:



$$\dot{W}_S = \int_S (\sigma_{ij} u_i n_j) dS \quad (10.17)$$

Analogamente à taxa de calor, tem-se:

$$\dot{W}_S = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} u_i) dV \quad (10.18)$$

Manipular a integral de forças de corpo é relativamente mais fácil, pois essa é uma integral de massa, ou seja:

$$dm = \rho dV \quad (10.19)$$

$$\dot{W}_B = \int_m (g_i u_i) dm \quad (10.20)$$

$$\dot{W}_B = \int_V \rho (g_i u_i) dV \quad (10.21)$$

A equação para o balanço de energia de um volume Euleriano pode, portanto, ser escrita como:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{1}{2} u_i u_i \right) \right] dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \rho \left( e + \frac{1}{2} u_i u_i \right) u_j \right] dV = \\ - \int_V \left( \frac{\partial (q_i)}{\partial x_i} \right) dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} u_i) dV + \int_V \rho (g_i u_i) dV + \int_V \dot{s} dV \end{aligned} \quad (10.22)$$

Se for considerado que o volume de controle tem dimensões infinitesimais tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{1}{2} u_i u_i \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \rho \left( e + \frac{1}{2} u_i u_i \right) u_j \right] = \\ - \left( \frac{\partial (q_i)}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} u_i) + \rho (g_i u_i) + \dot{s} \end{aligned} \quad (10.23)$$

É, ainda, necessário simplificar a equação acima para se obter uma equação geral simplificada para um volume de controle diferencial:

Utilizando a regra da derivada de um produto, pode-se expandir o termo do lado esquerdo da equação anterior da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j e) + u_i \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + u_i \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j u_i) = \\ - \left( \frac{\partial(q_i)}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij} u_i) + \rho(g_i u_i) + \dot{s} \end{aligned} \quad (10.24)$$

De forma análoga, pode-se expandir o segundo e terceiro termo do lado esquerdo da acima como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j e) + u_i \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + u_i \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j u_i) = \\ - \left( \frac{\partial(q_i)}{\partial x_i} \right) + u_i \frac{\partial(\sigma_{ij})}{\partial x_j} + \sigma_{ij} \frac{\partial(u_i)}{\partial x_j} + \rho(g_i u_i) + \dot{s} \end{aligned} \quad (10.25)$$

Que pode ser simplificada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j e) + u_i \left( \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j u_i) \right) = \\ - \left( \frac{\partial(q_i)}{\partial x_i} \right) + u_i \left( \frac{\partial(\sigma_{ij})}{\partial x_j} + \rho g_i \right) + \sigma_{ij} \frac{\partial(u_i)}{\partial x_j} + \dot{s} \end{aligned} \quad (10.26)$$

Mais uma simplificação pode ser feita para a equação acima ao observar que:

$$\left( \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \left( \frac{\partial(\sigma_{ij})}{\partial x_j} + \rho g_i \right) \quad (10.27)$$

Ou seja:

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) = \nabla \cdot \hat{\sigma} + \rho \vec{g} \quad (10.28)$$

A equação acima representa a equação de Cauchy ou equação da conservação da quantidade de movimento apresentada no item 3.2.

Sabe-se pela equação de Fourier que:

$$q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (10.29)$$

Onde o fator de proporcionalidade  $k$  (condutividade térmica) que surge da equação de Fourier é uma propriedade de cada material e vem exprimir a maior ou menor facilidade que o material apresenta à condução de calor.

Chega-se então a equação geral de conservação de energia em um volume Euleriano diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j e) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \sigma_{ij} \frac{\partial (u_i)}{\partial x_j} + \dot{s} \quad (10.30)$$

## APÊNDICE B –Outros Métodos para Solução de Problemas Advectivos-Difusivos

### Esquema Híbrido

O esquema híbrido de Spalding (1972) é baseado na combinação do esquema de diferenças centrais e o esquema upwind. O esquema de diferenças centrais é bem preciso para os casos de  $-2 < Pe < 2$ , e o método upwind é bastante preciso para os casos de  $-2 > Pe > 2$  (Malalasekera,1995).

O esquema híbrido usa uma formulação baseada no número de Peclet local para quantificar o fluxo de propriedade através de cada face do volume de controle (Malalasekera,1995).

A formulação do esquema híbrido para o fluxo de propriedade por unidade de área através da face  $w$  para um problema de convecção-difusão unidimensional, sem geração e em regime permanente se segue como:

Para  $-2 < Pe < 2$ :

$$q_w = F_w \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2}{Pe} \right) \phi_w + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2}{Pe} \right) \phi_p \right] \quad (10.31)$$

Para  $Pe_w \geq 2$

$$q_w = F_w \phi_w \quad (10.32)$$

Para  $Pe_w \leq -2$

$$q_w = F_w \phi_p \quad (10.33)$$

Analogamente para a face  $e$  tem-se:

Para  $-2 < Pe < 2$ :

$$q_e = F_e \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2}{Pe} \right) \phi_e + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2}{Pe} \right) \phi_p \right] \quad (10.34)$$

Para  $Pe_w \geq 2$

$$q_e = F_e \phi_P \quad (10.35)$$

Para  $Pe_w \leq 2$

$$q_e = F_e \phi_E \quad (10.36)$$

É fácil observar que para um número de Peclet baixo a formulação acima descreve o esquema de diferenças centrais, porém para  $|Pe| < 2$  é equivalente ao valor do termo de convecção do esquema upwind e sendo o termo de difusão zerado (Malalasekera,1995).

A forma canônica para a formulação acima é dada por:

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + b \quad (10.37)$$

Onde:

$$a_W = \left( \max \left( F_w, D_w + \frac{F_w}{2}, 0 \right) \right) \Delta y \quad (10.38)$$

$$a_E = \left( \max \left( -F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0 \right) \right) \Delta y \quad (10.39)$$

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) \Delta y \quad (10.40)$$

$$b = 0 \quad (10.41)$$

### Esquema Power-Law

O esquema Power-law de Patankar (1980) é uma aproximação mais acurada para a solução exata de problemas de convecção-difusão unidimensional produzindo melhores resultados que o esquema híbrido. Nesse esquema a parcela de difusão do problema é considerada nula onde o valor de  $Pe$  é maior que 10. Se  $0 < Pe < 10$  o fluxo de propriedade é quantificado usando uma expressão polinomial (Malalasekera,1995).

A formulação do esquema Power-law para o fluxo de propriedade por unidade de área através da face  $w$  se segue como:

Para  $0 < Pe < 10$ :

$$q_w = F_w [\phi_w - \beta_w (\phi_p - \phi_w)] \quad (10.42)$$

Onde

$$\beta_w = \frac{(1 - 0,1Pe_w)^5}{Pe_w} \quad (10.43)$$

Para  $Pe \geq 10$

$$q_w = F_w \phi_w \quad (10.44)$$

Analogamente para a face  $e$  tem-se:

Para  $0 < Pe < 10$ :

$$q_e = F_e [\phi_e - \beta_e (\phi_e - \phi_p)] \quad (10.45)$$

Onde

$$\beta_e = \frac{(1 - 0,1Pe_e)^5}{Pe_e} \quad (10.46)$$

Para  $Pe \geq 10$

$$q_e = F_e \phi_e \quad (10.47)$$

A forma canônica para a formulação acima é dada por:

$$a_p \phi_p = a_w \phi_w + a_e \phi_e + b \quad (10.48)$$

Onde:

$$a_w = \left[ D_w \max(0, (1 - 0,1|Pe_w|)^5) + \max(F_w, 0) \right] \Delta y \quad (10.49)$$

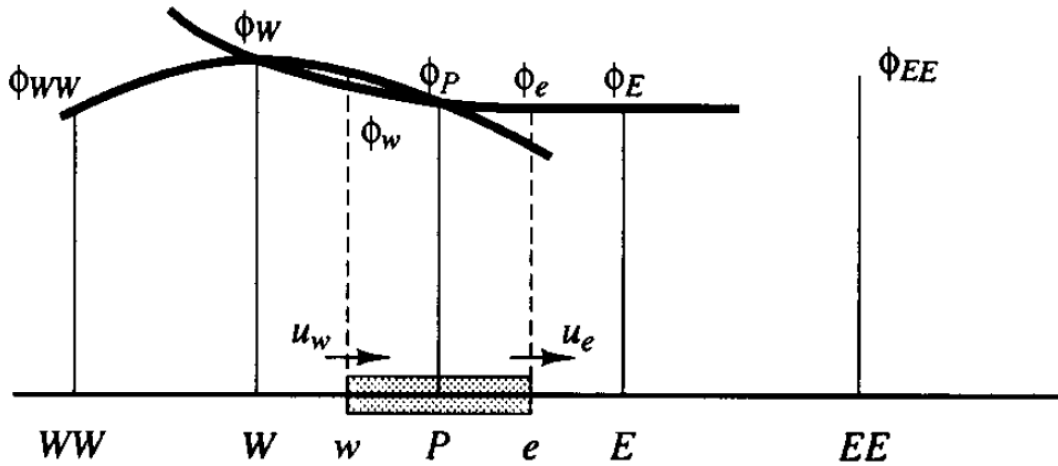
$$a_E = \left[ D_e \max(0, (1 - 0.1 |Pe_e|)^5) + \max(-F_e, 0) \right] \Delta y \quad (10.50)$$

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) \Delta y \quad (10.51)$$

$$b = 0 \quad (10.52)$$

### Esquema QUICK

O esquema QUICK (*quadratic upstream interpolation for convective kinetics*) de Leonard (1979) usa uma seqüência de 3 nós próximos ao volume de maior influência para fazer a aproximação, através de uma função quadrática, do valor da propriedade na face (Malalasekera, 1995).



**Figura 10-2 - Perfis quadráticos usado no esquema QUICK. (Malalasekera, 1995)**

Por exemplo, quando  $u_w > 0$  e  $u_e > 0$ , uma adaptação quadrática através de WW, W e P é usada para quatificar  $\phi_w$ , e uma adaptação quadrática de W, E e P para calcular  $\phi_e$ . Para  $u_w < 0$  e  $u_e < 0$  são usados os valores de  $\phi$  nos nós W, P e E para calcular  $\phi_w$ , e valores de  $\phi$  nos nós P, E e EE para calcular  $\phi_e$ . Isso pode ser demonstrado para uma malha uniforme com valores de  $\phi$  na face entre dois nós adjacentes,  $i$  e  $i-1$ , e um nó a montante,  $i-2$ , pela seguinte formula (Malalasekera, 1995):

$$\phi_{face} = \frac{6}{8} \phi_{i-1} + \frac{3}{8} \phi_i - \frac{1}{8} \phi_{i-2} \quad (10.53)$$

Quando  $u_w > 0$ , os nós adjacentes a face  $w$  são  $W$  e  $P$ , e o nó a montante é  $WW$ . Então:

$$\phi_w = \frac{6}{8}\phi_W + \frac{3}{8}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_{WW} \quad (10.54)$$

Quando  $u_e > 0$ , os nós adjacentes a face  $e$  são  $P$  e  $E$ , o nó a montante é  $W$ , logo:

$$\phi_e = \frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{1}{8}\phi_W \quad (10.55)$$

Os termos difusivos continuam sendo quantificados analogamente as abordagens anteriores. Então, quando  $F_w > 0$  e  $F_e > 0$  no esquema QUICK, a equação discretizada para o problema unidimensional sem geração de convecção-difusão pode ser escrita como:

$$\left[ -F_w \left( \frac{6}{8}\phi_W + \frac{3}{8}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_{WW} \right) \Delta y + F_e \left( \frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{1}{8}\phi_W \right) \Delta y \right] = \quad (10.56)$$

$$-D_w(\phi_P - \phi_W)\Delta y + D_e(\phi_E - \phi_P)\Delta y$$

Que pode ser reescrita como:

$$\left( D_w - \frac{3}{8}F_w + D_e + \frac{6}{8}F_e \right) \Delta y \phi_P = \quad (10.57)$$

$$\left( D_w + \frac{6}{8}F_w + \frac{1}{8}F_e \right) \Delta y \phi_W + \left( D_e - \frac{3}{8}F_e \right) \Delta y \phi_E - \frac{1}{8}F_w \Delta y \phi_{WW}$$

A equação acima pode ser escrita na seguinte forma canônica:

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_{WW} \phi_{WW} + b \quad (10.58)$$

Onde

$$a_W = \left( D_w + \frac{6}{8}F_w + \frac{1}{8}F_e \right) \Delta y \quad (10.59)$$

$$a_E = \left( D_e - \frac{3}{8}F_e \right) \Delta y \quad (10.60)$$



$$a_{ww} = -\frac{1}{8}F_w\Delta y \quad (10.61)$$

$$a_p = a_w + a_e + a_{ww} + (F_e - F_w)\Delta y \quad (10.62)$$

$$b = 0 \quad (10.63)$$

Se  $F_w < 0$  e  $F_e < 0$  o fluxo de propriedade através das faces  $w$  e  $e$  é dado pelas seguintes expressões:

$$\phi_w = \frac{6}{8}\phi_p + \frac{3}{8}\phi_w - \frac{1}{8}\phi_e \quad (10.64)$$

$$\phi_e = \frac{6}{8}\phi_e + \frac{3}{8}\phi_p - \frac{1}{8}\phi_{ee} \quad (10.65)$$

Substituindo os valores de  $\phi$  nas faces chega-se á seguinte expressão:

$$\begin{aligned} -F_w \left( \frac{6}{8}\phi_p + \frac{3}{8}\phi_w - \frac{1}{8}\phi_e \right) \Delta y + F_e \left( \frac{6}{8}\phi_e + \frac{3}{8}\phi_p - \frac{1}{8}\phi_{ee} \right) \Delta y = \\ -D_w(\phi_p - \phi_w)\Delta y + D_e(\phi_e - \phi_p)\Delta y \end{aligned} \quad (10.66)$$

Procedendo analogamente à abordagem anterior tem-se:

$$a_p\phi_p = a_w\phi_w + a_e\phi_e + a_{ee}\phi_{ee} + b \quad (10.67)$$

Onde

$$a_w = \left( D_w + \frac{3}{8}F_w \right) \Delta y \quad (10.68)$$

$$a_e = \left( D_e - \frac{6}{8}F_e - \frac{1}{8}F_w \right) \Delta y \quad (10.69)$$

$$a_{ee} = \frac{1}{8}F_e\Delta y \quad (10.70)$$

$$a_p = a_w + a_e + a_{ee} + (F_e - F_w)\Delta y \quad (10.71)$$

$$b = 0 \quad (10.72)$$

A expressão geral para o problema de convecção-difusão unidimensional sem geração pelo esquema QUICK pode ser, então, escrita como:

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_{WW} \phi_{WW} + a_{EE} \phi_{EE} + b \quad (10.73)$$

Onde

$$a_W = \left( D_w + \frac{6}{8} \alpha_w F_w + \frac{1}{8} \alpha_e F_e \right) \Delta y \quad (10.74)$$

$$a_E = \left( D_e - \frac{3}{8} \alpha_e F_e - \frac{6}{8} (1 - \alpha_e) F_e - \frac{1}{8} (1 - \alpha_w) F_w \right) \Delta y \quad (10.75)$$

$$a_{WW} = -\frac{1}{8} \alpha_w F_w \Delta y \quad (10.76)$$

$$a_{EE} = \frac{1}{8} (1 - \alpha_e) F_e \Delta y \quad (10.77)$$

$$a_P = a_W + a_E + a_{WW} + a_{EE} + (F_e - F_w) \Delta y \quad (10.78)$$

Sendo

$\alpha_w = 1$  para  $F_w > 0$  e  $\alpha_e = 1$  para  $F_e > 0$

$\alpha_w = 0$  para  $F_w < 0$  e  $\alpha_e = 0$  para  $F_e < 0$