



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

RAFAEL DIAS PEREIRA

**APLICAÇÃO DA TÉCNICA DA
QUASE-DUPLA RECIPROCIDADE
AOS MEIOS CONTÍNUOS
NÃO-HOMOGÊNEOS**

VITÓRIA
2003/2

RAFAEL DIAS PEREIRA

**APLICAÇÃO DA TÉCNICA
DA QUASE-DUPLA RECIPROCIDADE
AOS MEIOS CONTÍNUOS
NÃO-HOMOGÊNEOS**

Trabalho apresentado à disciplina
Projeto de Graduação do curso de
Engenharia Mecânica da Universidade
Federal do Espírito Santo, como
requisito parcial para obtenção do grau
de Bacharel em Engenharia Mecânica.
Orientador: Prof. Dr. Carlos Friedrich
Loeffler Neto.

VITÓRIA

2003/2

RAFAEL DIAS PEREIRA

**APLICAÇÃO DA TÉCNICA
DA QUASE-DUPLA RECIPROCIDADE
AOS MEIOS CONTÍNUOS
NÃO-HOMOGÊNEOS**

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto

Prof. Dr. Angelo Gil Pezzino Rangel

Prof. Dr. Fernando César Meira Menandro

Vitória _____ de _____ de _____.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha mãe Vera Lúcia Dias Pereira, meu pai Manoel Simões Pereira e meu irmão Rodrigo Dias Pereira, por me apoiarem e incentivarem durante estes anos.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus.

À minha mãe Vera Lúcia Dias Pereira, meu pai Manoel Simões Pereira e ao meu irmão Rodrigo Dias Pereira, que me deram condições, incentivo e apoio durante minha vida acadêmica.

Ao meu professor orientador, Carlos Friedrich Loeffler Neto, pela atenção e dedicação com que me orientou e por acreditar no meu potencial.

Aos meus amigos que durante estes anos contribuíram para que eu chegasse até esta etapa.

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.4.1 - Representação dos fluxos num domínio não homogêneo.	23
Figura 3.3.1 - Domínio não-homogêneo.....	30
Figura 5.1.1 - Características físicas e geométricas da barra.	38
Figura 5.1.2 - (a) Malha com 08 e.c., (b) Malha com 16 e.c., (c) Malha com 32 e.c., (d) Malha com 64 e.c., (e) Malha com 128 e.c.	39
Figura 5.1.3 - (a) Malha com 128 e.c. e 1 p.i., (b) Malha com 128 e.c. e 3 p.i.	39
Figura 5.1.4 - Erro médio percentual dos valores de deslocamento ao longo do comprimento.....	40
Figura 5.1.5 - Comportamento do erro com a variação da constante m.	41
Figura 5.2.1 - Representação geométrica do problema.	42
Figura 5.2.2 - (a) Malha com 16 e.c., (b) Malha com 32 e.c., (c) Malha com 64 e.c. (d) Malha com 128 e.c.	44
Figura 5.2.3 - Erro percentual nos valores de fluxo de calor bidimensional.	44
Figura 5.2.4 - Erro médio percentual com a variação das constantes.....	45
Figura 5.3.1 - Erro médio percentual com o refinamento da malha.....	47
Figura 5.3.2 - Erro médio percentual com a variação das constantes.....	47
Figura 5.4.1 - Erro médio percentual com o refinamento da malha.....	49

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 5.1.1 - Influência dos Pontos Internos no erro médio das diversas malhas.....	41
--	----

SUMÁRIO

RESUMO.....	10
1 INTRODUÇÃO	11
1.1 COMENTÁRIOS INICIAIS	11
1.2 O PROBLEMA FÍSICO	12
1.3 O PROBLEMA MATEMÁTICO	15
1.4 OBJETIVO DO TRABALHO	16
1.5 MEIOS E RECURSOS.....	17
2 MODELAGEM MATEMÁTICA.....	18
2.1 EQUAÇÃO DE CAMPO ESCALAR GENERALIZADA.....	18
2.2 ALGUNS CASOS PARTICULARES IMPORTANTES	19
2.3 MODELO PARA MEIOS CONTÍNUOS HETEROGÊNEOS	21
2.4 MODELO FÍSICO	23
2.5 LEIS DE FLUXO	24
3 MÉTODOS NUMÉRICOS	27
3.1 APLICAÇÃO DE MÉTODOS NUMÉRICOS	27
3.2. PRINCIPAIS MÉTODOS NUMÉRICOS.....	28
3.3 ADEQUAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	29
4 O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	31
4.1 FORMULAÇÃO BÁSICA	31
4.2 APLICAÇÃO DA TÉCNICA DA QUASE-DUPLA RECIPROCIDADE	33
4.3 DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL	34

5 SOLUÇÃO E ANÁLISE DE PROBLEMAS.....	37
5.1 BARRA UNIAXIALMENTE TRACIONADA	37
5.2 DIFUSÃO BIDIMENSIONAL COM CONDUTIVIDADE TÉRMICA VARIÁVEL-1	42
5.3 DIFUSÃO BIDIMENSIONAL COM CONDUTIVIDADE TÉRMICA VARIÁVEL-2	45
5.4 DIFUSÃO BIDIMENSIONAL COM CONDUTIVIDADE TÉRMICA VARIÁVEL-3.....	48
6 CONCLUSÕES	50
7 REFÊRENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	52

RESUMO

Uma das maiores limitações do Método dos Elementos de Contorno (MEC) encontra-se na modelagem de problemas cujo meio contínuo é não-homogêneo, casos estes muito comuns nas áreas de Geotecnia e Mecânica dos Solos. Nas situações em que a heterogeneidade é setorialmente localizada, o uso de sub-regiões consiste no recurso mais eficiente e utilizado. Em certas situações, entretanto, esta estratégia é insatisfatória, podendo tornar-se onerosa e inadequada. Infelizmente, não há outras abordagens diferentes desta no acervo de recursos com Elementos de Contorno, o que resulta quase sempre na escolha de métodos de domínio, como o Método dos Elementos Finitos ou o Método das Diferenças Finitas, para tratar esta categoria de problemas. Este trabalho mostra os resultados obtidos com o Método dos Elementos de Contorno, usando uma formulação alternativa denominada de Quase-Dupla Reciprocidade. As características básicas da abordagem tradicional do método são mantidas. A variação das propriedades ao longo das direções coordenadas, descritas por funções conhecidas, é introduzida junto a cada elemento de contorno. Nenhuma restrição é imposta pela formulação quanto ao seu tipo ou ordem, garantindo assim a generalidade do processo.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1 COMENTÁRIOS INICIAIS

Este trabalho de fim de curso consiste do prolongamento de uma pesquisa de iniciação científica, na qual foi utilizado um programa de simulação numérica computacional de problemas de Engenharia, empregando o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Especificamente, os problemas examinados na atividade de iniciação científica pertencem a uma classe, na qual o campo físico é escalar, ou seja, aqueles nos quais a variável básica ou primal é um tensor de ordem zero, podendo ser representado exclusivamente por um número indicativo de sua intensidade, como a temperatura, por exemplo. Na realidade, existem várias classes de problemas de campo escalar, governados por equações matemáticas bem conhecidas como as Equações de Laplace, de Poisson, de Helmholtz, etc. Aqui, foram estudados e simulados problemas fisicamente associados à torção uniforme em barras prismáticas, à condução e convecção forçada de calor em dutos, à tração uniforme em barras axialmente solicitadas; e, ainda, a deflexão em membranas elásticas planas [1-5]. Todas as análises realizadas são bidimensionais ou unidimensionais.

Nesse projeto, a experiência anterior foi aproveitada, visando a uma extensão daquele trabalho de iniciação científica para um outro tipo de aplicação que tem muita importância na Engenharia de Petróleo, pois diz respeito ao comportamento de meios contínuos não homogêneos, caso típico das camadas geológicas que formam os reservatórios petrolíferos e os solos em geral, no caso de solicitações mecânicas, ou térmicas.

O texto inicial foi baseado num conjunto de cinco artigos técnicos escritos para congressos nacionais e revistas locais, cujos títulos e detalhamento se encontram na bibliografia [1-5]. Para esse trabalho uma extensão daqueles artigos foi realizada, de modo que novos exemplos foram considerados.

1.2 O PROBLEMA FÍSICO

A Engenharia usa hipóteses simplificadoras em seus modelos físicos e matemáticos para poder viabilizá-los em seus propósitos práticos. No que tange ao comportamento mecânico dos materiais constitutivos, é bastante comum encontrarem-se considerações simplificadoras que admitem as propriedades termomecânicas da maior parte dos materiais como homogêneas ao longo de toda a sua extensão. Essa consideração é adequada e aproximadamente verdadeira para muitos materiais, onde a não-homogeneidade se situa num nível microscópico. É o caso dos aços e outros materiais metálicos. Numa escala mais ampla; é perfeitamente plausível considerar sua constituição e suas propriedades físicas como homogêneas. Naturalmente, existem exceções nesse elenco de materiais com ampla aplicação na engenharia.

O primeiro grupo consiste daqueles, nos quais a interferência por processo de soldagem se faz presente. São casos muito comuns e que precisam ser adequadamente examinados. O processo de soldagem altera significativamente a microestrutura do material, fazendo que a hipótese de homogeneidade seja imprecisa. É muito comum se examinar componentes de máquinas, estruturas e equipamentos nos quais existem peças com partes soldadas, de modo que o domínio seja setorialmente não-homogêneo. Os métodos mais modernos de análise termomecânica em Engenharia – os métodos numéricos que serão apresentados a seguir – tratam facilmente estes casos através da inserção das diferentes propriedades em cada setor.

Um segundo grupo consiste dos materiais compósitos. Atualmente, uma boa parte dos materiais de Engenharia modernos, de arrojada aplicação industrial, são materiais compósitos que consistem de um conjunto de fases, diferenciáveis numa escala dimensional qualquer. Estes são compostos por um conjunto de materiais constituintes, com diferentes propriedades térmicas, mecânicas e com orientações geométricas diversas. Este fato leva à existência de uma heterogeneidade material numa escala dimensional qualquer. A leveza destes materiais, com a possibilidade de mesclar materiais não metálicos com

propriedades térmicas mais adequadas, faz com que o número de exemplos práticos tenha crescido e se tornado bastante comum, como na indústria aeronáutica. Naturalmente, é preciso ter um bom controle do projeto, de modo a associar adequadamente a orientação das direções principais de resistência mecânica com as direções de solicitação. No entanto, a classe dos materiais compósitos, em função das dimensões reduzidas das faixas de cada diferente material, se enquadra como materiais homogêneos não isotrópicos.

Um terceiro grupo compõe-se de materiais tipicamente não homogêneos, seja em nível microestrutural, seja no plano da análise macroscópica. É o caso dos solos. O estudo das fundações de edifícios e estruturas em geral não dispensa o emprego de modelos que considerem a não-homogeneidade do meio contínuo. Critérios especiais para avaliar a resistência do solo sob os diferentes tipos de solicitação mecânica são utilizados há muitas décadas, compondo uma disciplina específica obrigatória nos cursos de Engenharia Civil, que é a Mecânica dos Solos. Não é demais ressaltar a importância dos problemas de fundações em edificações, pois estas podem englobar a análise de uma simples habitação popular até uma usina termonuclear.

Essa área possui uma importante vertente, de maior complexidade, que diz respeito à análise sísmica. Muitas regiões sofrem constantemente a ação de terremotos. As análises dos sismos e dos seus efeitos sobre as estruturas, solos ou vias de comunicação, representam grandes desafios devido à complexidade dos fenômenos associados aos mecanismos de geração sísmica e de propagação de ondas em meios heterogêneos. No entanto, os avanços de conhecimento na última década, bem como a experiência recolhida durante grandes sismos que ocorreram recentemente, permitiram reduzir a vulnerabilidade sísmica e, simultaneamente, definir soluções técnicas mais arrojadas e mais econômicas.

Sabe-se, desde há muito tempo, que a resposta sísmica de determinado local é condicionada pelas condições geológicas e geotécnicas das formações superficiais existentes no local. Apesar de algumas cidades estarem praticamente todas cobertas por uma mesma formação geológica, as diferenças de espessura, assim como o nível freático e outros parâmetros

físicos, podem modificar a sua resposta sísmica. Por outro lado, é possível prever, do ponto de vista teórico, a resposta sísmica de uma cidade, utilizando uma modelação matemática adequada. Para tal torna-se necessário conhecer os vários parâmetros físicos associados às camadas geológicas e, em particular, a velocidade de propagação das ondas S, tanto no interior das camadas mais profundas, como nas camadas superficiais. Em muitos casos, as formações geológicas superficiais encontram-se cobertas por depósitos superficiais espessos (aterros e depósitos de vertente), pelo que também é muito importante determinar as características geotécnicas destes depósitos.

A caracterização sísmica do meio físico pode fazer-se através da propagação das ondas sísmicas. Essa propagação traduz-se na solicitação dos materiais em níveis de tensões dinâmicas que resultam sua deformação. Nesse sentido, as constantes elásticas dos materiais estão ligadas às velocidades de propagação das ondas compressionais (P) e de corte (S). Costuma-se admitir que razão das velocidades das ondas S e P depende exclusivamente do coeficiente de Poisson e que a velocidade das ondas S é uma função do módulo dinâmico de corte e da densidade.

Aproveitando o conhecimento técnico e científico nesta área, uma outra aplicação similar tem ganhado enorme importância dentro da Engenharia moderna: a modelagem geotécnica com vistas à prospecção de petróleo. Os princípios mecânicos empregados na análise sísmica podem ser completamente aproveitados na identificação de lençóis de petróleo, usando métodos matemáticos que ofereçam uma expectativa de resposta dinâmica sensível à sua presença. Em linhas gerais, são feitas experiências de campo nas quais se colhem respostas às excitações provenientes de explosões controladas. Fazendo simulações numéricas correlatas, pode-se inferir a existência de lençóis petrolíferos pela diferença de resultados entre as experiências numéricas e de campo. Esta é uma das mais modernas áreas na engenharia atual. Naturalmente, em se tratando do emprego de métodos numéricos, é preciso haver uma boa representação matemática tanto da dinâmica do problema quanto da parte de modelamento da heterogeneidade do meio físico.

Outros materiais representativos desta classe são, por exemplo, ossos, madeira e os materiais com gradação de propriedades funcionais (FGM's). Esta última categoria tem sido objeto de grandes incentivos e investimento em pesquisa, particularmente da NASA e de outras grandes empresas que lidam com empreendimentos arrojados. Os materiais funcionais podem combinar adequadamente as propriedades térmicas e mecânicas ao longo de sua extensão, permitindo, ainda, a obtenção de uma melhor ponderação entre peso e outras propriedades. No projeto de ônibus espaciais que trafegam a grandes velocidades, particularmente no seu regresso na atmosfera terrestre, a utilização de materiais funcionais esta sendo estuda e o próximo grande desafio consiste em fabricá-los de modo comercialmente viável, embora existam outros problemas a serem melhores compreendidos, como o seu comportamento não-linear. A metodologia apresentada neste trabalho também se ajusta adequadamente ao modelo requerido pelos materiais funcionais.

1.3 O PROBLEMA MATEMÁTICO

No contexto atual da Engenharia moderna, cujos problemas são cada vez mais complexos, se faz necessário empregar técnicas de solução cada vez mais adequadas ao ritmo acelerado de trabalho das empresas que disputam competitivamente o mercado, sem dispensar os requisitos de qualidade e segurança necessários a todos os projetos. Assim, é preciso dispor de técnicas e recursos cada vez mais eficientes e sofisticados. A modelagem matemática é hoje a mais importante opção da Engenharia para dar celeridade aos projetos e evitar testes e experiências de campo, ou de laboratório, que são extremamente custosas e lentas.

Os problemas nos quais o meio constitutivo é heterogêneo são destes casos nos quais é preciso dispor de ferramentas computacionais. Nesta condição, usualmente o modelo matemático resulta em equações diferenciais parciais extremamente complexas, sem solução disponível por qualquer método analítico.

Nos casos dinâmicos, as investigações na área de prospecção de petróleo e sismologia, resultam impraticáveis sem os recursos de métodos matemáticos aproximados que empregam o computador para processamento de dados e a obtenção da solução do problema.

O Método dos Elementos de Contorno é uma dessas técnicas modernas de solução de problemas físicos que podem ser representados por modelos matemáticos. A escolha do Método dos Elementos de Contorno se prende ao fato deste trabalho estar vinculado a uma linha de pesquisa já estruturada no programa de Pós Graduação do Departamento de Engenharia Mecânica da UFES. Algumas justificativas sobre a escolha deste método e maiores comentários sobre as características das demais técnicas numéricas em geral são feitos posteriormente.

1.4 OBJETIVO DO TRABALHO

Este trabalho de fim de curso tem por objetivo avaliar a utilização do Método dos Elementos de Contorno na modelagem de problemas no qual o meio físico contínuo não é homogêneo.

Essa avaliação é feita através de testes de simulação computacional, usando um programa desenvolvido para esta finalidade.

Apesar do maior leque de aplicações se concentrar atualmente na área de dinâmica, um estudo preliminar da modelagem da parte estática se faz necessário, e é nesse sentido que foi concebido este trabalho.

Verifica-se o desempenho do método comparando seus resultados numéricos com os valores obtidos na simulação de problemas de referência, que são aqueles que possuem solução analítica disponível. Faz-se a análise de sua capacidade de convergência para a solução analítica aumentando-se a quantidade de pontos de discretização empregados. Os resultados são mostrados na forma de curvas considerando o erro médio percentual em todos os pontos nodais.

1.5 MEIOS E RECURSOS

O trabalho foi desenvolvido computacionalmente empregando um código computacional acadêmico gerado em linguagem FORTRAN, concebido inicialmente para modelagem de problemas difusivos-advectivos, através de uma formulação denominada de Quase-Dual do Método dos Elementos de Contorno. Este programa foi adaptado pelo autor para poder representar e processar problemas de campo escalar não-homogêneos. Os problemas difusivos-advectivos são similares aos problemas de meios não homogêneos, de modo que apenas uma subrotina precisou ser adaptada. O ambiente computacional empregado foi um microcomputador de processador ATHLON 1.3GHz com 256 MB de memória RAM.

CAPÍTULO II

MODELAGEM MATEMÁTICA

2.1 EQUAÇÃO DE CAMPO ESCALAR GENERALIZADA

Em termos matemáticos, o modelo abordado envolve uma grandeza escalar como variável básica do problema e pode ser considerado como um caso particular de um equacionamento mais geral, pertinente à chamada Teoria de Campo Escalar.

É interessante apresentar o contexto desta teoria, no qual se inserem alguns problemas interessantes para a Engenharia. Assim sendo, dentro deste enfoque, a Equação de Campo Escalar Generalizada expressa-se em termos diferenciais através da forma:

$$\nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla u) = \lambda^n D^n(u) + p \quad (2.1.1)$$

Onde ∇ é o operador nabla, \mathbf{K} é um diádico, u é o potencial, λ^n são escalares e D^n é o operador de ordem n derivada com relação ao tempo. No lado direito da equação (2.1.1), p é uma função conhecida, enquanto o operador D^n soma-se em n com λ , definindo o tipo de problema dependente do tempo que se deseja considerar, ou seja:

$$\lambda^n D^n(u) = \lambda^0 u + \lambda^1 \partial(u)/\partial t + \lambda^2 \partial^2(u)/\partial t^2 \quad (2.1.2)$$

Assim, as derivadas temporais do potencial para os casos dados pela Equação de Difusão, Equação da Onda e Equação de Klein-Gordon, entre outras, podem ser facilmente contabilizadas no modelo.

Quanto às derivadas espaciais, o caso bidimensional mais completo, consiste da dependência do diádico \mathbf{K} com o potencial. Nesse caso, chega-se a estrutura diferencial típica do problema difusivo não-linear. Para o caso de

materiais não homogêneos, as propriedades constitutivas dependem das variáveis espaciais.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla u) = & \partial [K_{11} \partial(u) / \partial x_1] / \partial x_1 + \partial [K_{12} \partial(u) / \partial x_2] / \partial x_1 + \partial [K_{21} \partial(u) / \partial x_1] / \partial x_2 + \\ & + \partial [K_{22} \partial(u) / \partial x_2] / \partial x_2 \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

2.2 ALGUNS CASOS PARTICULARES IMPORTANTES

Particularizando-se a equação (2.1.3), considere-se que K_{12} e K_{21} sejam nulos, ou seja, o material não é homogêneo, mas é ortotrópico. Assim:

$$\nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla u) = \partial [K_{11} \partial(u) / \partial x_1] / \partial x_1 + \partial [K_{22} \partial(u) / \partial x_2] / \partial x_2 \quad (2.2.1)$$

No caso de isotropia local, tem-se $K_{11}=K_{22}=K(x_1, x_2)$. Nesta situação pode-se definir:

$$L1(u) = \partial [K(x_1, x_2) \partial(u) / \partial x_1] / \partial x_1 + \partial [K(x_1, x_2) \partial(u) / \partial x_2] / \partial x_2 \quad (2.2.2)$$

Um outro operador que pode ser obtido a partir da expressão geral retrata um problema de transmissão de calor por condução e convecção em meio isotrópico. Neste caso, consideram-se as seguintes hipóteses:

$$K_{12} = -K_{21} \quad (2.2.3a)$$

$$K_{11} = K_{22} = K \quad (2.2.3b)$$

$$K = \text{constante (meio homogêneo)} \quad (2.2.3c)$$

Desse modo, tem-se:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla u) = & K \left[\partial^2(u) / \partial x_1^2 + \partial^2(u) / \partial x_2^2 \right] + \left[\partial K_{12} / \partial x_2 \right] \partial(u) / \partial x_1 + \\ & + \left[\partial K_{21} / \partial x_1 \right] \partial(u) / \partial x_2 \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Admitindo-se que:

$$\partial K_{12} / \partial x_2 = -V_{x_1} \quad (2.2.5a)$$

$$\partial K_{21} / \partial x_1 = -V_{x_2} \quad (2.2.5b)$$

onde V_{x_1} e V_{x_2} são componentes da velocidade \mathbf{v} de escoamento nas direções x_1 e x_2 , respectivamente. Assim, chega-se ao operador desejado:

$$L2(u) = K \left[\partial^2(u) / \partial x_1^2 + \partial^2(u) / \partial x_2^2 \right] - V_{x_1} \left[\partial(u) / \partial x_1 \right] - V_{x_2} \left[\partial(u) / \partial x_2 \right] \quad (2.2.6)$$

Constata-se que o modelo proposto guarda obediência à condição de incompressibilidade:

$$\partial V_{x_1} / \partial x_1 = -\partial V_{x_2} / \partial x_2 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.2.7)$$

Não é difícil perceber que existe uma relação entre $L1(u)$ e $L2(u)$. Desde que se faça uma associação dos coeficientes da equação (2.2.2) com o campo de velocidades dado pelas equações (2.2.5a) e (2.2.5b), na seguinte forma:

$$\partial K / \partial x_1 = -V_{x_1} \quad (2.2.8a)$$

$$\partial K / \partial x_2 = -V_{x_2} \quad (2.2.8b)$$

Outros modelos interessantes e que fazem parte do objetivo do presente projeto são dedutíveis a partir da equação geral, segundo a mesma metodologia, apenas obedecendo a outras simplificações. Considere o caso em que ocorre difusão em regime estacionário num meio contínuo ortotrópico.

As propriedades físicas constitutivas são constantes ao longo das direções coordenadas, mas são distintas entre si, ou seja:

$$K_{12} = K_{21} = 0 \quad (2.2.9a)$$

$$K_{11} \neq K_{22} \quad (2.2.9b)$$

Neste caso, o operador diferencial fica:

$$L3(u) = K_{11} \partial^2(u)/\partial x_1^2 + K_{22} \partial^2(u)/\partial x_2^2 \quad (2.2.10)$$

Nos casos homogêneos em que há isotropia, o operador precedente simplifica-se ainda mais, resultando em:

$$L4(u) = K \left[\partial^2(u)/\partial x_1^2 + \partial^2(u)/\partial x_2^2 \right] \quad (2.2.11)$$

A consideração do termo independente p significa fisicamente a presença das denominadas ações de domínio, tais como fontes, sorvedouros, campos gravitacionais etc. A equação de governo posta na forma:

$$L4(u) = p \quad (2.2.12)$$

É conhecida como Equação de Poisson, de ampla aplicação na área de eletromagnetismo e mecânica em geral. No caso mais simples abordado pela Teoria de Campo Escalar, conhecido como Equação de Laplace, a função p é nula.

2.3 MODELO PARA MEIOS CONTÍNUOS HETEROGÊNEOS

Neste trabalho interessa particularmente o caso exposto anteriormente no qual um meio contínuo isotrópico possui propriedades heterogêneas com relação as

variáveis espaciais, ou seja, o modelo matemático é representado pelo operador $L1(u)=0$. Tal modelo, repetido aqui por conveniência, é dado por:

$$\partial[K(x_1, x_2)\partial(u)/\partial x_1]/\partial x_1 + \partial[K(x_1, x_2)\partial(u)/\partial x_2]/\partial x_2 = 0 \quad (2.2.2)$$

Considere Ω um domínio espacial bidimensional no qual um ponto X qualquer tem sua posição dada por $X=X(x_1, x_2)$ com relação a um sistema de coordenadas cartesianas. Adotando a notação indicial einsteniana, pode-se escrever a equação (2.2.2) de modo conciso, na forma:

$$[K(X)u(X)_{,i}]_{,i} = 0 \quad (2.3.1)$$

Ressalta-se que a função escalar u genericamente pode representar deslocamento, temperatura ou qualquer propriedade física similar. Normalmente princípios físicos de equilíbrio, balanço de energia ou compatibilidade estão envolvidos da dedução de equação anterior.

Para que a modelagem matemática seja bem posta, é necessário prescrever condições de fronteira compatíveis com a ordem da equação. Assim, os problemas examinados são constituídos de um domínio $\Omega(X)$, onde X representa as variáveis espaciais do campo, delimitado este por um contorno $\Gamma(X)$, sujeito a condições específicas para cada problema em particular.

Para problemas estacionários, essas condições de contorno são dadas por:

$$u(X) = \bar{u} \text{ para } X \in \Gamma_u \text{ (condição essencial)} \quad (2.3.2a)$$

$$K(X)u(X)_{,i}n(X)_i = \bar{q} \text{ para } X \in \Gamma_q \text{ (condição natural)} \quad (2.3.2b)$$

Nas equações ,de modo geral, $\Gamma_u(X)$ é a parte do contorno pertencente a $\Gamma(X)$ onde são prescritas condições de contorno essenciais (também chamadas de condições de Dirichlet ou do primeiro tipo) que envolvem diretamente o

potencial u ; de forma complementar, $\Gamma q(X)$ representa as regiões da fronteira onde são conhecidas as condições de contorno naturais (também conhecidas como condições de Neuman ou do segundo tipo) arrolando derivadas do potencial com relação à normal ao contorno. Nestas equações $\Gamma u(X)$ e $\Gamma q(X)$ representam as fronteiras do meio contínuo e $n(X)_i$ representa o vetor normal unitário em um ponto qualquer destas. Nos problemas de Mecânica dos Sólidos q adquire o significado de tensão aplicada no contorno, enquanto nos casos de transferência de calor pode ser interpretado como um fluxo imposto de energia difusiva.

2.4 MODELO FÍSICO

Neste item é apresentada a dedução da expressão (2.2.2) a partir de considerações físicas, ou seja, agora o equacionamento desejado não é obtido com base em simplificações de um modelo matemático geral. Agora se considera o comportamento de uma grandeza física escalar num meio contínuo bidimensional, segundo princípios de balanço e conservação de massa e energia.

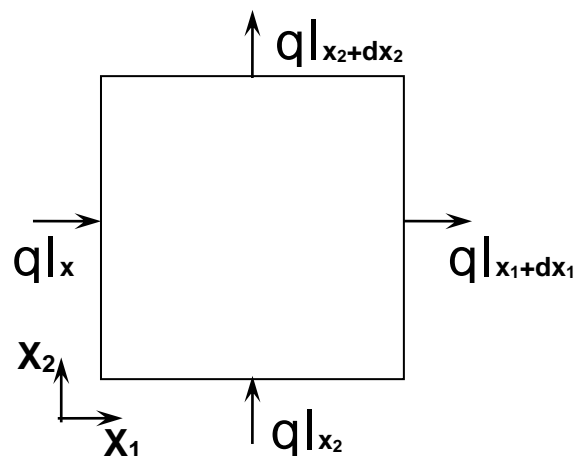


Figura 2.4.1 - Representação dos fluxos num domínio não homogêneo.

De acordo com a figura 2.4.1, faz-se o balanço de energia:

$$q|_{x_1} dx_2 + q|_{x_2} dx_1 + q|_f dx_1 dx_2 = q|_{x_1+dx_1} dx_2 + q|_{x_2+dx_2} dx_1 \quad (2.4.1)$$

Considerando que a variação de energia seja nula e agrupando melhor a equação (2.4.1), obtém-se:

$$\left[q|_{x_1+dx_1} - q|_{x_1} \right] dx_2 + \left[q|_{x_2+dx_2} - q|_{x_2} \right] dx_1 = q|_f dx_1 dx_2 \quad (2.4.2)$$

2.5 LEIS DE FLUXO

Cabe ressaltar que a grandeza q , presente em todo o equacionamento exposto no item anterior, representa uma grandeza que pode ser energia térmica, massa, deformação ou qualquer outra que obedeça a uma lei de formação fisicamente conhecida. Por exemplo, no caso de um problema de condução de calor, q representaria o fluxo de calor difusivo, dado pela Lei de Fourier, ou seja:

$$q_n = -K \frac{\partial u}{\partial n} \quad (2.5.1)$$

Nesta última equação K seria a condutividade térmica, u seria a temperatura e n a direção na qual se examina o fluxo de calor por unidade de área, que nestes casos se direciona do valor de maior temperatura para o de menor, justificando o sinal negativo. No caso da percolação ou escoamento em meios porosos, o fluxo é governado pela Lei de Darcy, que descreve o fluxo em termos de um gradiente do potencial de altura de fluido sobreposto à superfície porosa ϕ . Assim, tem-se:

$$q_n = -K \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (2.5.2)$$

A difusão de uma substância num meio fluido é dada por uma lei semelhante, denominada Lei de Fick, onde a sua concentração C do constituinte representa o potencial. O fluxo de massa do constituinte por unidade de área é proporcional ao gradiente da concentração:

$$q_n = -D \frac{\partial c}{\partial n} \quad (2.5.3)$$

D é a constante de proporcionalidade. Também nos problemas de barras axialmente solicitadas existe relação similar:

$$q_n = -E \frac{\partial u}{\partial n} \quad (2.5.4)$$

Nesta última equação E é o módulo de elasticidade longitudinal enquanto u representa o deslocamento axial. O significado de q é o de tensão normal associada. Nos problemas de geotécnica, a maior parte dos modelos de propagação de onda admite um estado de tensão unidimensional, sob a hipótese de que a uma certa distância do ponto de excitação as ondas são planas.

Relações similares às leis de Fourier, Darcy, Fick etc. também existem nos problemas de cisalhamento em fluidos e nos problemas de torção em barras prismáticas de quaisquer tipos de seções transversais, submetidas à torção uniforme.

Aplicando série de Taylor linearizada para qualificar os diferenciais dos fluxos que aparecem na equação (2.4.2) tem-se, na direção x_1 , por exemplo:

$$\left[q|_{x_1+dx_1} - q|_{x_1} \right] = dq|_{x_1} = \frac{\partial q}{\partial x_1} dx_1 \quad (2.5.5a)$$

Na direção x_2 o mesmo pode ser feito:

$$\left[q|_{x_2+dx_2} - q|_{x_2} \right] = dq|_{x_2} = \frac{\partial q}{\partial x_2} dx_2 \quad (2.5.5b)$$

Substituindo as equações anteriores na expressão (2.4.2) tem-se:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(K \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) dx_1 \right] dx_2 + \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(K \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) dx_2 \right] dx_1 = q|_f dx_1 dx_2 \quad (2.5.6)$$

Cancelando os diferenciais comuns, chega-se finalmente a:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(K \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \right] + \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(K \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right] = q \quad (2.5.7)$$

CAPÍTULO III

MÉTODOS NUMÉRICOS

3.1 APLICAÇÃO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

Mesmo nos seus períodos mais remotos, a engenharia nunca dispensou o auxílio da Matemática, principalmente da sua primeira disciplina, a Geometria, seja no detalhamento de esboços e desenhos das construções e também no sentido de se efetuar pequenos cálculos para detalhamento. No entanto, a grande ferramenta do engenheiro era a experiência obtida com a realização de testes com protótipos ou a realização anterior de empreendimentos similares. No entanto, em função do alto custo de confecção de alguns protótipos e do desenvolvimento de outros ramos da matemática, esse panorama mudou radicalmente nos últimas décadas. Cada vez mais se procura projetar equipamentos, edificações e máquinas a partir de modelos analíticos construídos com rigor matemático.

No entanto, em função da sofisticação das demandas da sociedade moderna, as fórmulas e equações simples que representavam os problemas do passado e serviam de apoio aos projetos de engenharia cederam lugar a equações diferenciais parciais, algumas mesmo não lineares, ou então, a sistemas de equações diferenciais ordinárias de grande complexidade. O tratamento matemático que se empregava com vistas a resolver estas equações, para obtenção de uma solução analítica ou fechada, teve de ser revisto, porque poucas eram aquelas que conseguiam ser devidamente solucionadas.

Por volta de 1940 surgiu uma ferramenta que revolucionou todos os segmentos da engenharia, assim como também muitas disciplinas científicas: o computador. Através desta sofisticada máquina de processamento de operações, algumas técnicas matemáticas que estavam estagnadas por ausência de recursos que as viabilizassem puderam ser implementadas. Uma destas técnicas é a idéia de discretização, talvez mesmo a mais importante

delas. Muitos métodos numéricos modernos são fundamentados nesta idéia. Consiste basicamente de uma aproximação do domínio contínuo por um conjunto discreto ou finito de pontos que o representem consistentemente. Em termos matemáticos, a discretização acarreta a substituição de uma equação diferencial por um conjunto de equações algébricas, de fácil implementação e resolução pelos computadores modernos. Ou seja, graças aos modernos computadores, os métodos numéricos ou computacionais, como passaram a ser conhecidos, atualmente tornaram-se viáveis, confiáveis e amplamente difundidos.

3.2. PRINCIPAIS MÉTODOS NUMÉRICOS

Os principais métodos numéricos disponíveis atualmente são baseados na idéia de discretização, isto é, na substituição de um domínio contínuo das variáveis por um conjunto finito de pontos representativos do mesmo. Esta representatividade é fundamentada em conceitos matemáticos e sua consistência pode ser constatada pela concordância entre os resultados numéricos e os resultados analíticos (em problemas nos quais esta última solução é disponível) ou, então, para certos métodos, por uma formal demonstração matemática envolvendo a idéia de convergência. Pode-se constatar que o resultado da aplicação das técnicas de discretização consiste na transformação dos operadores diferenciais por operadores algébricos, fáceis de se resolver computacionalmente.

Dentre as técnicas mais importantes na atualidade pode-se citar o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método dos Volumes Finitos (MVF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Os três primeiros são conhecidos como técnicas de domínio, pois a discretização se processa em todo o domínio; mas a última é uma técnica de contorno, pois somente a discretização das fronteiras é necessária.

O MDF é o pioneiro dessas técnicas discretas e cuja idéia é a mais simples, constituindo-se de uma substituição direta dos operadores diferenciais por aproximações na forma de série de Taylor.

O MEF é fundamentado em princípios variacionais e têm atualmente especial importância, devido a sua enorme difusão e receptividade no meio acadêmico e industrial. É, sem dúvida, a ferramenta numérica mais empregada e desenvolvida que se dispõe atualmente.

O MVF é um método relativamente recente, que aproveita e aprimora a idéia original das diferenças finitas, tornando-o mais preciso. Por isso ganha espaço gradativamente, em particular na área de termociências.

Já o MEC destaca-se graças a uma série de características vantajosas, como a redução de uma dimensão na representação do problema, simplificação na entrada de dados, adequação com regiões infinitas, melhor captação de concentração de esforços etc.

A escolha de um método numérico é sempre um ponto discutível, pois são muitas as questões aí envolvidas e a pesquisa em torno deles está longe de cessar. Embora não seja o mais popular, o MEC vem se firmando como uma das técnicas mais precisas e vantajosas. Baseando-se em diferentes princípios matemáticos, seja pela formulação de resíduos ponderados ou pela teoria das equações integrais, numerosas simulações já ratificaram o alcance do método e sua supremacia em importantes classes de problemas, como os casos onde o campo físico é de natureza escalar.

O fato é que graças a esses métodos, atualmente é comum a simulação computacional de problemas dinâmicos, tridimensionais, não-lineares, envolvendo condições de contorno gerais. Algo completamente inacessível à engenharia de cinquenta anos atrás.

Neste trabalho será empregado o MEC para simulação computacional dos problemas, mas qualquer outra das técnicas citadas poderia ser utilizada com o mesmo propósito, pois o objetivo primordial não depende do método numérico escolhido.

3.3 ADEQUAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Uma das maiores limitações do Método dos Elementos de Contorno (MEC) encontra-se na modelagem de problemas cujo meio contínuo é não-

homogêneo, casos estes muito comuns nas áreas de Geotecnia e Mecânica dos Solos. Nas situações em que a heterogeneidade é setorialmente localizada, o uso de sub-regiões consiste no recurso mais eficiente e utilizado.

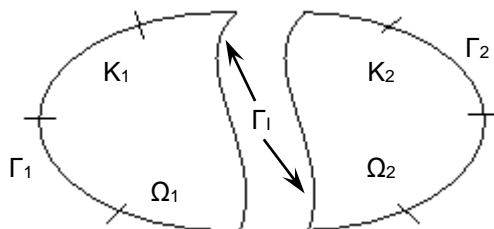


Figura 3.3.1 - Domínio não-homogêneo.

Em certas situações, entretanto, esta estratégia é insatisfatória, podendo tornar-se onerosa e inadequada. Infelizmente, não há outras abordagens diferentes desta no acervo de recursos com Elementos de Contorno, o que resulta quase sempre na escolha de métodos de domínio, como o Método dos Elementos Finitos ou o Método das Diferenças Finitas, para tratar esta categoria de problemas. Como será visto a seguir, utilizando-se a formulação com Quase-Dupla Reciprocidade as características básicas da abordagem via MEC são mantidas. A variação das propriedades ao longo das direções coordenadas, descritas por funções conhecidas, é introduzida junto a cada elemento de contorno. Nenhuma restrição é imposta pela formulação quanto ao seu tipo ou ordem, garantindo assim a generalidade do processo.

CAPÍTULO IV

O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

4.1 FORMULAÇÃO BÁSICA

O ponto de partida para a abordagem pelo MEC [6,7] consiste do estabelecimento da equação de governo (2.3.1) numa forma integral, usando a solução fundamental $u^*(\xi; X)$ como função auxiliar, resultando na seguinte expressão, onde foram omitidos os argumentos por simplicidade:

$$\int_{\Omega} (Ku_{,i})_{,i} u^* d\Omega = 0 \quad (4.1.1)$$

A aplicação do esquema de integração por partes na equação anterior permite reescrevê-la como:

$$\int_{\Omega} (Ku_{,i} u^*)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} Ku_{,i} u^*_{,i} d\Omega = 0 \quad (4.1.2)$$

A aplicação do Teorema da Divergência transforma a primeira integral de domínio numa integral de contorno, na forma:

$$\int_{\Gamma} Ku_{,i} n_i u^* d\Gamma - \int_{\Omega} Ku_{,i} u^*_{,i} d\Omega = 0 \quad (4.1.3)$$

Usando a definição expressa na equação (2.3.2a) e (2.3.2b), pode-se escrever:

$$\int_{\Gamma} qu^* d\Gamma - \int_{\Omega} Ku_{,i} u^*_{,i} d\Omega = 0 \quad (4.1.4)$$

Aplicando mais uma vez o esquema de integração por partes, junto à integral de domínio existente, tem-se:

$$\int_{\Gamma} q u^* d\Gamma - \int_{\Omega} (K u u^*_{,i})_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} u (K u^*_{,i})_{,i} d\Omega = 0 \quad (4.1.5)$$

Empregando o Teorema da Divergência uma vez mais, agora na primeira integral de domínio da equação anterior, chega-se a:

$$\int_{\Gamma} q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} K u u^*_{,i} n_i d\Gamma + \int_{\Omega} u (K u^*_{,i})_{,i} d\Omega = 0 \quad (4.1.6)$$

Desenvolvendo a derivada do núcleo da última integral de domínio, a equação (4.1.6), torna-se:

$$\int_{\Gamma} q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} K u u^*_{,i} n_i d\Gamma + \int_{\Omega} u K_{,i} u^*_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} u K u^*_{,ii} d\Omega = 0 \quad (4.1.7)$$

Considera-se uma solução fundamental tradicional, associada a um problema governado pela Equação de Poisson, onde uma carga concentrada unitária é aplicada em um ponto fonte ξ de um domínio espacial infinito, ou seja:

$$u^*_{,ii}(\xi; X) = -\Delta(\xi; X) \quad (4.1.8)$$

Cuja solução é dada por:

$$u^*(\xi; X) = \frac{1}{2\pi} \ln[r(\xi; X)] \quad (4.1.9)$$

Também é estratégico definir:

$$q^*(\xi; X) = K u^*_{,i}(\xi; X) n_i \quad (4.1.10)$$

Nas equações precedentes r é a distância entre o ponto fonte ξ e um ponto genérico X do domínio, chamado ponto campo.

Substituindo a equação (4.1.8) na última parcela do lado esquerdo da equação (4.1.7) e utilizando a definição (4.1.10), tem-se:

$$\int_{\Gamma} qu^* d\Gamma - \int_{\Gamma} uq^* d\Gamma + \int_{\Omega} uK_{,i} u^*_{,i} d\Omega - c(\xi)u(\xi) = 0 \quad (4.1.11)$$

A constante $c(\xi)$ refere-se às possibilidades do ponto fonte situar-se no interior ou fora do domínio Ω , assim como no contorno Γ , o que resulta em valores distintos, conforme pode ser obtido na literatura especializada.

A única integral de domínio restante será transformada numa integral de contorno através do procedimento da Quase-Dupla Reciprocidade.

4.2 APLICAÇÃO DA TÉCNICA DA QUASE-DUPLA RECIPROCIDADE

O procedimento da Quase-Dupla Reciprocidade [8,9] é uma estratégia similar àquela criada por Nardini e Brebbia (1982). A Quase-Dupla Reciprocidade aproxima o núcleo da integral de domínio da equação (4.1.11) através da seguinte sentença:

$$b = uK_{,i} \cong \alpha_p^j \psi_{p,i}^j = \alpha_p^j \eta_{pi}^j \quad (4.2.1)$$

A forma diádica das funções auxiliares ψ e η utilizadas deve-se a aspectos operacionais [8,9]. Substituindo a equação (4.2.1) na integral de domínio da equação (4.1.11), tem-se:

$$\int_{\Omega} uK_{,i} u^*_{,i} d\Omega \cong \alpha_p^j \int_{\Omega} \psi_{p,i}^j u^*_{,i} d\Omega \quad (4.2.2)$$

Uma vez mais, usando integração por partes:

$$\alpha_p^j \int_{\Omega} \psi_{p,i}^j u_{,i}^* d\Omega = \alpha_p^j \int_{\Omega} (\psi_p^j u_{,i}^*)_{,i} d\Omega - \alpha_p^j \int_{\Omega} \psi_p^j u_{,ii}^* d\Omega \quad (4.2.3)$$

Aplicando o Teorema da Divergência e usando a mesma solução fundamental é possível reescrever a equação anterior na forma:

$$\alpha_p^j \int_{\Omega} \psi_{p,i}^j u_{,i}^* d\Omega = \alpha_p^j \int_{\Gamma} \psi_p^j u_{,i}^* n_i d\Gamma + \alpha_p^j c(\xi) \psi_p^j(\xi) \quad (4.2.4)$$

A expressão completa fica:

$$\int_{\Gamma} q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma - c(\xi) u(\xi) + \alpha_p^j \int_{\Gamma} \psi_p^j u_{,i}^* n_i d\Gamma + \alpha_p^j c(\xi) \psi_p^j(\xi) = 0 \quad (4.2.5)$$

4.3 DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL

Com a obtenção da equação integral, há necessidade de se trabalhar com a formulação do MEC como técnica numérica, o que consiste em discretizar a equação integral e formular um sistema matricial que será resolvido computacionalmente.

Para que se possa fazer a discretização, o primeiro passo consiste em considerar-se o contorno $\Gamma(x)$ composto por elementos distintos:

$$\Gamma(\mathbf{X}) \approx \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_n = \sum_{i=1}^{NE} \Gamma_i(\mathbf{X}) \quad (4.3.1)$$

Sobre tais elementos são definidas as variações da grandeza básica ou sua derivada normal em função de valores em determinados pontos. Esses pontos são denominados pontos nodais ou nós, pontos estes que se posicionam de diferentes maneiras, em função da ordem da interpolação e outros aspectos.

A forma mais simples de aproximação consiste em considerar o ponto nodal centralizado e admitir a hipótese de que não há variação do valor calculado no nó ao longo de todo o elemento de discretização. Este procedimento é

denominado interpolação constante. De modo similar podem-se adotar discretizações onde os nós estão situados em outras partes dos elementos e também considerar variações da grandeza básica entre os pontos nodais.

As interpolações dos valores nodais sobre cada um dos elementos se caracterizam matematicamente através do arranjo matricial:

$$u(X_i) = NU_i^n \quad (4.3.2a)$$

$$q(X_i) = NQ_i^n \quad (4.3.2b)$$

onde U_i^n representa os valores nodais da condição essencial, e Q_i^n representa a condição natural. A matriz N contém as funções de interpolação e n indica um dado ponto nodal ao longo do elemento i de coordenadas X.

No caso de elementos retilíneos constantes, usados neste trabalho, a matriz N degenera-se num escalar unitário, o que significa que os valores de $u(X_i)$ ou $q(X_i)$ em cada ponto nodal são extrapolados para todo o elemento ao qual pertence.

A conformação geométrica dos elementos de contorno também pode ser adaptada segundo as necessidades de melhor representação do domínio físico do problema. Os elementos retilíneos são os mais simples e empregados; porém, existem elementos quadráticos, cúbicos e de ordem ainda superior.

Depois que a equação integral é discretizada, usando as equações (4.3.1), (4.3.2a) e (4.3.2b), é de praxe utilizar técnicas numéricas aproximadas para cálculos das integrais resultantes, como a quadratura de Gauss. A implementação das etapas anteriores resulta na transformação do modelo diferencial dado na equação (4.2.5) num sistema matricial do tipo:

$$HU - GQ - H\Psi\alpha = 0 \quad (4.3.3)$$

É possível eliminar o vetor α na equação anterior através da seguinte substituição:

$$\alpha = [\eta]^{-1}b \quad (4.3.4)$$

Desta forma, pode-se escrever, finalmente:

$$[H - M]U = GQ \quad (4.3.5)$$

Devido ao volume de dados e operações algébricas, todos esses procedimentos descritos são codificados e efetuados através de comandos computacionais, implementados num programa específico, escrito em linguagem FORTRAN.

CAPÍTULO V

SOLUÇÃO E ANÁLISE DE PROBLEMAS

5.1 BARRA UNIAXIALMENTE TRACIONADA

Considere uma barra de seção constante, engastada numa extremidade e tracionada na outra, constituída de um material cujo módulo de elasticidade longitudinal varia ao longo do comprimento da mesma, de acordo com a seguinte equação:

$$E(x_1) = E_0 + E_0 \frac{mx_1}{L} = E_0 \left(\frac{L + mx_1}{L} \right) \quad (5.1.1)$$

Na equação (5.1.1) m é um parâmetro de controle de rigidez. As dimensões da barra são de 1,0 x 1,0 unidades de comprimento (u.c.) e é prescrito deslocamento nulo na face engastada. As faces superior e inferior não sofrem com a ação de forças, por isso não se deformam, assim, prescreve-se que nestas regiões a deformação seja zero ($\varepsilon = 0$). Além disso, conhecendo-se o módulo de elasticidade $E_0 = 1,0\text{Pa}$ e a tensão de solitação barra $\sigma = 1,0\text{Pa}$ (defini-se valores unitários de forma a se simplificarem as simulações), prescreve-se também a deformação na face lateral solitada, de valor unitário ($\varepsilon_0 = 1$). A figura 5.1.1, mostrada a seguir, ilustra as características físicas e geométricas do problema em questão.

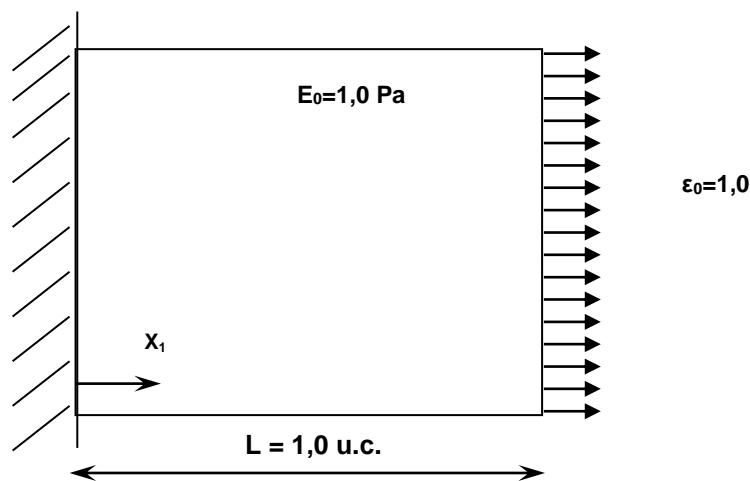


Figura 5.1.1 - Características físicas e geométricas da barra.

A função que descreve os deslocamentos da barra ao longo do seu comprimento é expressa por:

$$u(x_1) = \frac{\epsilon_0 L(1+m)}{m} \left[\text{LN} \left(\frac{L + mx_1}{L} \right) \right] \quad (5.1.2)$$

A simulação numérica do problema é feita através de modelos discretos, nos quais o contorno da barra é substituído por elementos de contorno retilíneos constantes. Inicialmente foi escolhido o valor da constante m igual à unidade e daí então realizada uma bateria de testes usando malhas com diversas quantidades de elementos de contorno. Para o contorno foram utilizadas malhas com 08, 16, 32, 64 e 128 elementos de contorno (e.c.), de forma que se possa verificar a convergência do método com o refinamento. As figuras 5.1.2(a), (b), (c), (d) e (e) representam as malhas utilizadas.

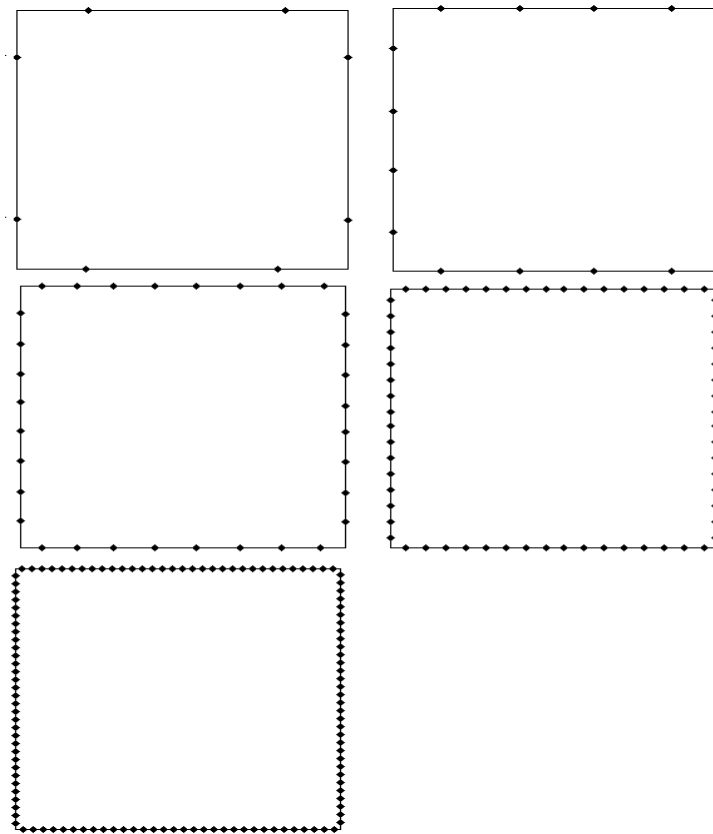


Figura 5.1.2 - (a) Malha com 08 e.c., (b) Malha com 16 e.c.,
(c) Malha com 32 e.c., (d) Malha com 64 e.c., (e) Malha com 128 e.c.

Para cada malha de elementos de contorno resolve-se o problema utilizando 00, 01 e 03 pontos internos interpolantes (p.i.). As figuras 5.1.3(a) e (b), a seguir, exemplificam as malhas com 128 e.c. com 01 e 03 p.i.

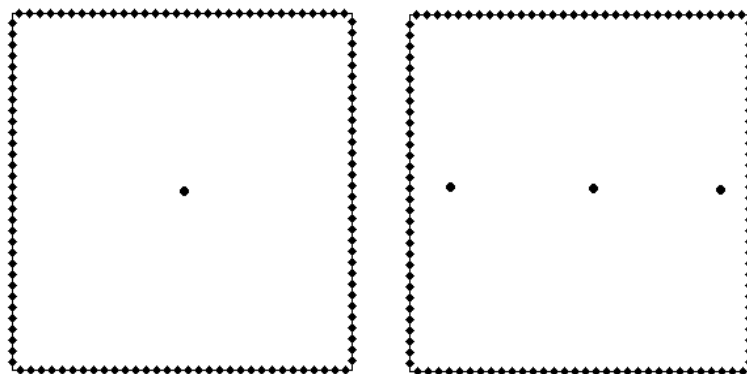


Figura 5.1.3 - (a) Malha com 128 e.c. e 1 p.i., (b) Malha com 128 e.c. e 3 p.i.

O gráfico mostrado na figura 5.1.4 mostra a curva de erro médio percentual para o cálculo dos deslocamentos nos pontos nodais situados ao longo da coordenadas x_1 em função da quantidade de pontos nodais ou elementos de contorno empregados.

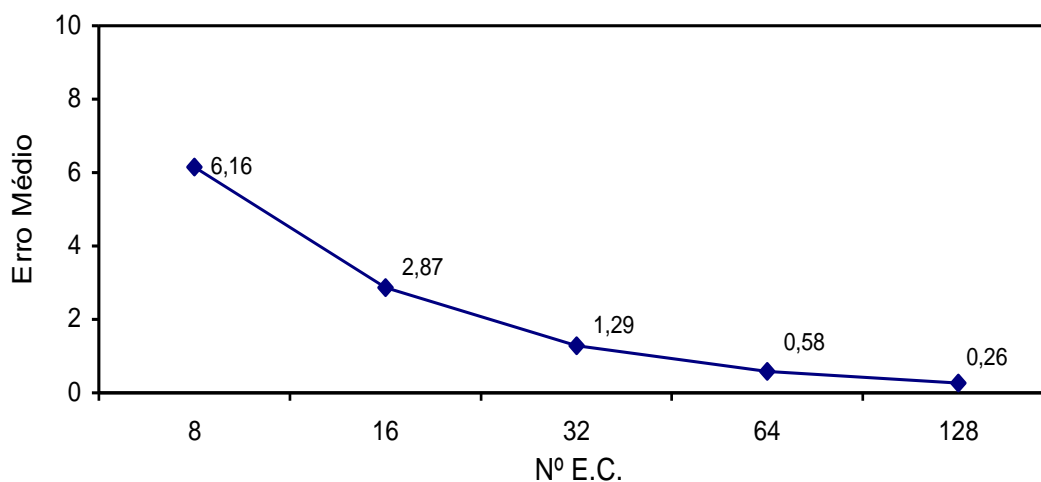


Figura 5.1.4 - Erro médio percentual dos valores de deslocamento ao longo do comprimento.

Com a apresentação da figura 5.1.4 é possível identificar a bons resultados alcançados com o refinamento da malha, o erro médio obtido a partir da malha de 64 e.c. é de menos de 1%.

Na formulação da Dupla Reciprocidade [10,11] tradicional é muito comum introduzirem-se pontos internos interpolantes (pólos) para melhorar a representação das propriedades físicas no interior do domínio e conseqüentemente melhorar a precisão das simulações. No caso da Quase-Dupla Reciprocidade, este recurso não é necessário, como se pode observar pela precisão obtida, nem mesmo é eficaz para aprimorá-la. Na tabela 5.1.1 apresentam-se os resultados do erro médio percentual no caso da introdução de diferentes quantidades de pontos interpolantes nas diversas malhas utilizadas para as simulações computacionais.

Tabela 5.1.1 - Influência dos Pontos Internos no erro médio das diversas malhas.

	Erro médio com 0 Pontos Internos (%)	Erro médio com 1 Ponto Interno (%)	Erro médio com 3 Pontos Internos (%)
08	6,16	5,89	5,84
16	2,87	2,87	2,86
32	1,29	1,29	1,29
64	0,58	0,58	0,58
128	0,26	0,26	0,26

Realizados os testes com relação ao refinamento das malhas e com a inclusão de pontos internos interpolantes, ainda se fez necessário mais uma simulação. Desta vez torna-se importante conhecer a precisão do método com a variação da constante m . Neste teste seguinte, toma-se a malha mais refinada, com 128 pontos nodais, e varia-se o valor de m , tornando mais acentuada a variação do módulo de rigidez. O erro médio percentual no cálculo dos deslocamentos ao longo da barra pode ser observado a seguir através da figura 5.1.5.

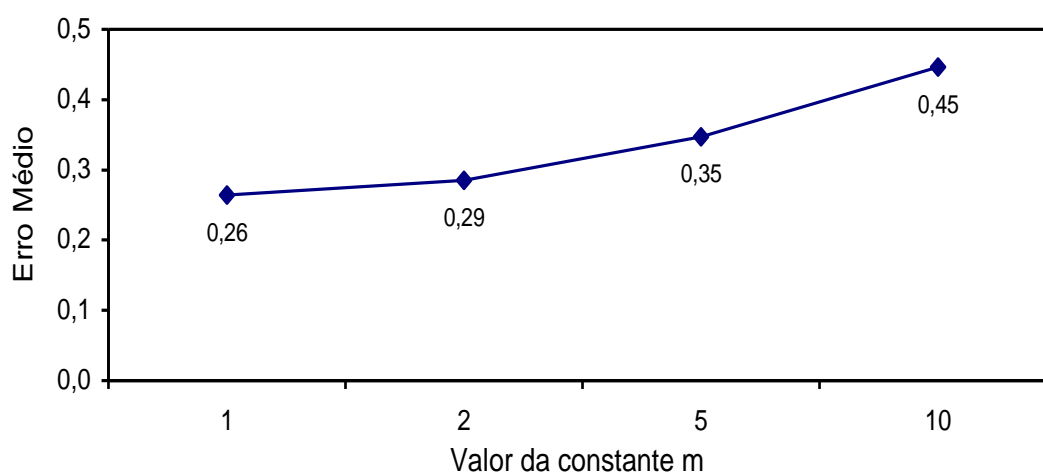


Figura 5.1.5 - Comportamento do erro com a variação da constante m .

A figura 5.1.5 mostra um certo aumento do erro médio percentual, de acordo com a variação da constante m , conforme esperado. Este erro, porém, mesmo

com um valor de 10 para a constante m ainda é muito baixo, mostrando assim uma boa eficácia do método para variações mais críticas da elasticidade da barra.

5.2 DIFUSÃO BIDIMENSIONAL COM CONDUTIVIDADE TÉRMICA VARIÁVEL-1

Considere um problema de difusão bidimensional no qual a condutividade térmica é variável. As condições de contorno deste problema são unicamente do tipo Dirichlet, ou seja, apenas temperaturas são prescritas na fronteira. A configuração geométrica apresentada é a mesma utilizada anteriormente, ou seja, domínio de dimensões $1,0 \times 1,0$ (u.c.), conforme mostra a figura 5.2.1:

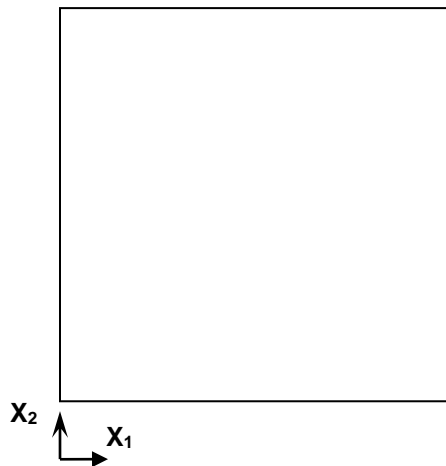


Figura 5.2.1 - Representação geométrica do problema.

A equação de governo deste problema é:

$$K \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + K \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial K}{\partial x_1} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \frac{\partial K}{\partial x_2} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = 0 \quad (5.2.1)$$

As temperaturas são prescritas em todo o contorno, e dadas pela seguinte expressão:

$$\theta = e^{Ax_1+Bx_2} \quad (5.2.2)$$

Por sua vez, a condutividade térmica é:

$$K = e^{-Ax_1-Bx_2} \quad (5.2.3)$$

Pode-se constatar que os valores de K e θ são tais que obedecem à equação diferencial parcial dada por (5.2.1). Da solução analítica deste problema resultam valores de fluxo de calor variando da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = Ae^{Ax_1+Bx_2} \quad (5.2.4a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_2} = Be^{Ax_1+Bx_2} \quad (5.2.4b)$$

A simulação numérica feita utilizando-se malha de 16, 32, 64 e 128 elementos de contorno (e.c.) Dessa maneira avaliou-se o comportamento do método com refinamento do contorno. Para esses testes iniciais admitiram-se os valores de A e B unitários e assim foram realizados os testes com as diversas malhas. As malhas utilizadas são mostradas nas figuras 5.2.2(a), (b), (c) e (d).

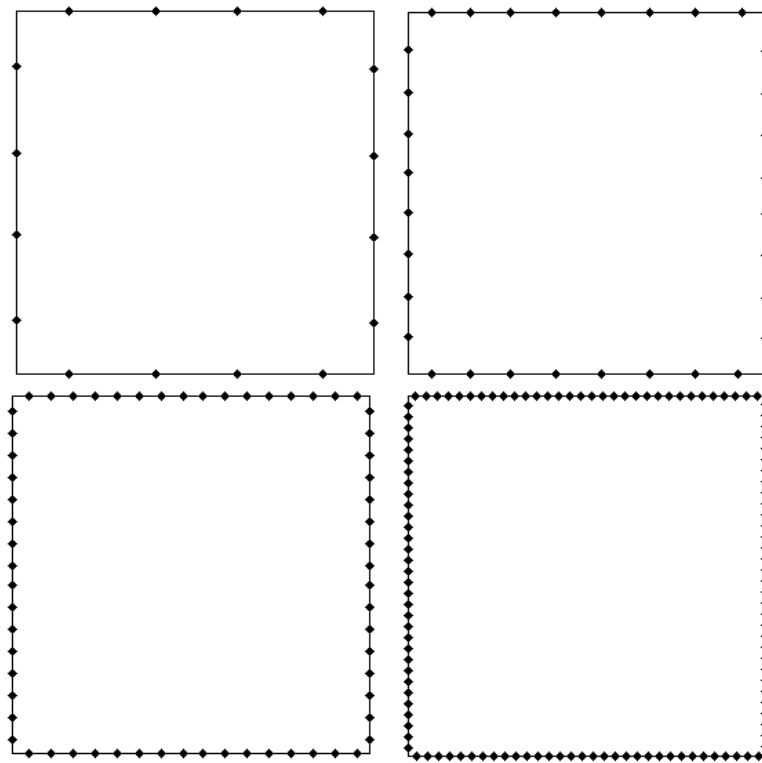


Figura 5.2.2 - (a) Malha com 16 e.c., (b) Malha com 32 e.c.,
(c) Malha com 64 e.c. (d) Malha com 128 e.c.

Para avaliar a eficácia do método de acordo com o refinamento da malha foi obtido o gráfico da figura 5.2.3, que mostra o erro médio percentual de cada malha para o cálculo dos fluxos de calor nos pontos nodais, em função da quantidade elementos de contorno empregados.

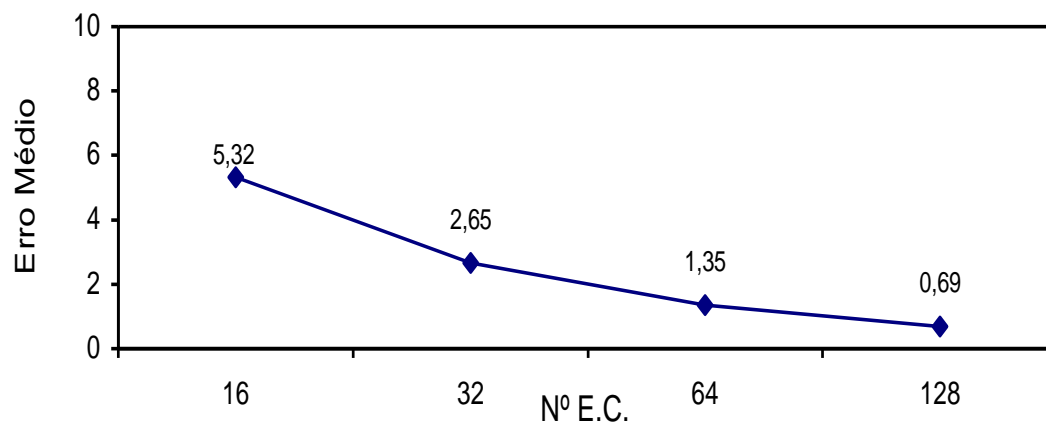


Figura 5.2.3 - Erro percentual nos valores de fluxo de calor bidimensional.

Diante desses resultados observa-se um bom desempenho do método a partir da malha de 64 e.c. e, obtendo-se um erro médio de menos de 1% com malha de 128 e.c.

No próximo teste tomou-se a malha com 64 elementos e variaram-se os valores das constantes A e B, de forma que estas tenham o mesmo valor, fazendo com que o gradiente de temperatura fosse mais acentuado. A figura 5.2.4 apresenta o erro médio percentual para o cálculo dos fluxos, onde se nota que tal erro é uma constante de acordo com a variação das constantes A e B.

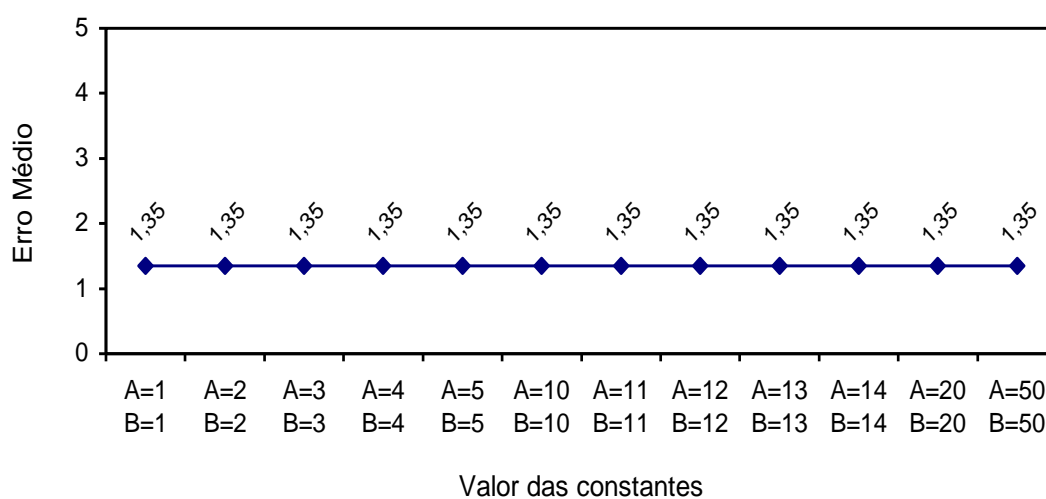


Figura 5.2.4 - Erro médio percentual com a variação das constantes.

O valor um pouco acima de 1% deve-se a computação de maiores valores de erro nos cantos, devido às funções de interpolação globais empregadas na Quase-Dupla Reciprocidade, pois há descontinuidade no valor dos fluxos nestes cantos. Não fosse esse problema, verifica-se o bom desempenho da formulação para valores das constantes A e B até cinqüenta.

5.3 DIFUSÃO BIDIMENSIONAL COM CONDUTIVIDADE TÉRMICA VARIÁVEL-2

Considere um problema de difusão bidimensional com um campo de temperaturas variáveis e com a mesma configuração física e geométrica

apresentada no exemplo resolvido anteriormente, ou seja, com as condições de contorno deste problema unicamente do tipo Dirichlet, ou seja, apenas temperaturas são prescritas na fronteira. A configuração geométrica apresenta um domínio de dimensões 1,0 x 1,0 (u.c.). Agora, porém, o campo de temperatura varia de forma diferente, de acordo com a seguinte equação:

$$\theta = e^{Ax_1x_2} \quad (5.3.1)$$

Por sua vez, a condutividade térmica é:

$$K = e^{-Ax_1x_2} \quad (5.3.2)$$

Os fluxos de calor variam da seguinte forma:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = Ax_2 e^{-Ax_1x_2} \quad (5.3.3a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_2} = Ax_1 e^{-Ax_1x_2} \quad (5.3.3b)$$

A simulação realizada para este exemplo segue os mesmos moldes do exemplo anterior, sendo este iniciado escolhendo o valor da constante A igual a um e realizando as simulações com malhas de 16, 32, 64 e 128 elementos de contorno(e.c.), para verificar a convergência do método dos elementos de contorno com o refinamento. O gráfico apresentado na figura 5.3.1 mostra o erro médio percentual para o fluxo de calor nos nós, em função da quantidade de elementos de contorno.

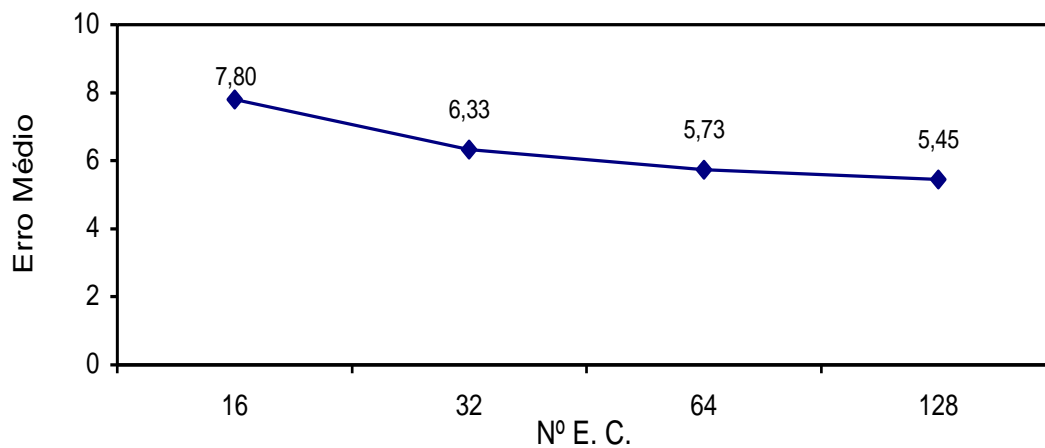


Figura 5.3.1 - Erro médio percentual com o refinamento da malha.

Neste exemplo, devido ao maior rigor dos gradientes de variação da condutividade térmica, os já comentados erros nos cantos foram amplificados. Os testes seguintes foram realizados para mostrar a precisão do método com a variação da constante A, para mostrar isso foi utilizada a malha com 64 e.c. de refinamento. A figura 5.3.2 mostra estes resultados.

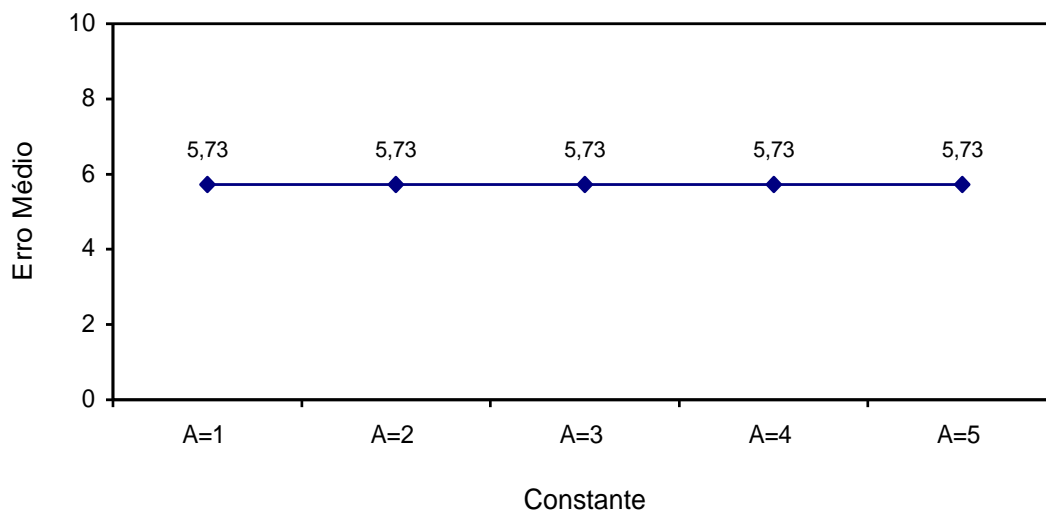


Figura 5.3.2 - Erro médio percentual com a variação das constantes.

Novamente houve uma estabilidade no valor dos erros percentuais cometidos, não obstante o aumento do gradiente de variação das propriedades. No

entanto, o mesmo problema verificado no exemplo anterior foi identificado: grandes erros são cometidos nos valores de fluxo nos cantos.

5.4 DIFUSÃO BIDIMENSIONAL COM CONDUTIVIDADE TÉRMICA VARIÁVEL-3

O terceiro problema também é sobre difusão bidimensional com um campo de temperaturas variáveis, apresenta a mesma configuração geométrica mostrada nos exemplos resolvidos anteriormente, com as condições de contorno do tipo Dirichlet, ou seja, apenas temperaturas são prescritas na fronteira. A configuração geométrica apresentada é de um domínio de dimensões 1,0 x 1,0 (u.c.). Agora tal é governado por outro campo de temperatura específico que varia de acordo com a equação:

$$\theta = e^{x_1} + e^{x_2} \quad (5.4.1)$$

Por sua vez, a condutividade térmica é:

$$K = e^{-x_1 - x_2} \quad (5.4.2)$$

Sendo os fluxos de calor variando da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = e^{x_1} \quad (5.4.3a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_2} = e^{x_2} \quad (5.4.3b)$$

Foi realizada uma bateria de testes para verificar a convergência dos valores numéricos com o refinamento das malhas. Os resultados são apresentados na figura 5.4.1.

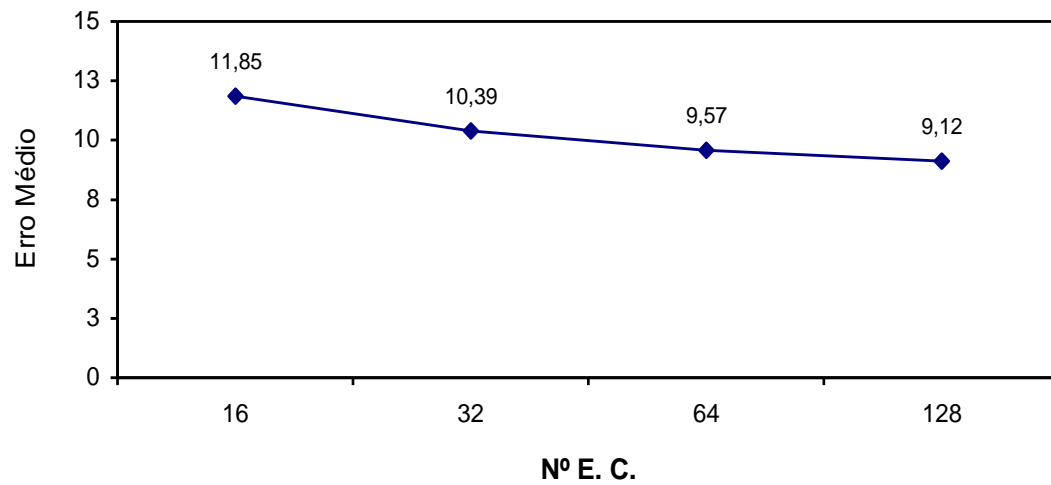


Figura 5.4.1 - Erro médio percentual com o refinamento da malha.

Este problema apresentou ainda maiores dificuldades numéricas do que os casos precedentes, pois o erro médio percentual ainda foi maior do que naqueles exemplos.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

O Método dos Elementos de Contorno carece de boas formulações para tratar de problemas não homogêneos, especialmente porque é uma técnica de contorno. Considerar variações de propriedades em seu interior é sempre uma dificuldade primordial. Situação na qual os métodos de domínio, como os Elementos Finitos e Volumes Finitos não promovem maiores dificuldades.

Para resolver problemas setorialmente não-homogêneos há o recurso das sub-regiões; no entanto, para variações gradativas de propriedades não há formulações competitivas para compor alternativas frente a outros métodos.

A formulação do método dos elementos de contorno com a técnica da Quase-Dupla Reciprocidade trata a não-homogeneidade física como se fosse uma ação de domínio e a influência da sua variação é computada em cada elemento de contorno que é analisado. Empregaram-se elementos de contorno constantes nesse trabalho. Assim, pelo fato das propriedades não variarem ao longo de cada elemento, exigiu-se a introdução de uma boa quantidade de pontos nodais para níveis mais elevados e satisfatórios de precisão nos casos em que houve gradientes acentuados de variação. No entanto, o desempenho geral em todos os problemas apresentados foi satisfatório para a utilização deste método em engenharia, embora haja necessidade de maiores pesquisas para melhorar alguns resultados que foram apenas razoáveis.

A utilização de elementos de contorno com interpolação linear ou quadrática poderiam trazer taxas de convergência mais acentuadas e erros menores. Com isso, os resultados seriam mais precisos.

Melhores testes, usando outras funções de interpolação, talvez trouxessem maior esclarecimento sobre o problema de convergência de valores nos cantos. Deve-se ressaltar, entretanto, que os exemplos abordados foram acadêmicos e que as descontinuidades de fluxo não são sempre comuns em problemas práticos.

De qualquer modo, o desempenho apresentado neste trabalho justifica o investimento de pesquisa nesta formulação, tendo em vista também sua simplicidade, seu baixo custo computacional e a possibilidade de acoplamento imediato com algumas outras técnicas do Método dos Elementos de Contorno (MEC) que facilitariam a simulação de problemas dinâmicos associados a problemas de propagação de ondas.

Esta última categoria de problemas tem sido objeto de enorme atenção por parte de diversos centros de pesquisa, usando outros métodos numéricos. Os casos em que se pesquisa o comportamento de materiais funcionais também é outro campo importante de aplicação para o conteúdo desse trabalho.

CAPÍTULO VII

REFÊRENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 Loeffler, Carlos Friedrich; Pereira, Rafael Dias. “Desempenho de Algumas Estratégias de Simplificação de Equações Diferenciais Empregando o Método dos Elementos de Contorno como Ferramenta de Solução”. In: IX Congresso Regional dos Estudantes de Engenharia Mecânica, 2002, Itajuba. 2002.
- 2 Loeffler, Carlos Friedrich; Pereira, Rafael Dias. “Eficácia da Transformação de Variáveis na Simplificação de Problemas de Campo Escalar Simulado pelo Método dos Elementos de Contorno”. In: XXV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 2002, Nova Friburgo. 2002.
- 3 Loeffler, Carlos Friedrich; Pereira, Rafael Dias. “Transformação de Variáveis na Simplificação de Equações Diferenciais: Uma Análise Empregando Elementos de Contorno como Método de Solução”. In: Revista Engenharia Ciência e Tecnologia, 2003, Vitória. 2003.
- 4 Loeffler, Carlos Friedrich; Pereira, Rafael Dias. “O Método dos Elementos de Contorno com Quase-Dupla Reciprocidade Aplicado a Meios Não Homogêneos”. In: X Congresso Regional dos Estudantes de Engenharia Mecânica, 2003, Santos. 2003.
- 5 Loeffler, Carlos Friedrich; Pereira, Rafael Dias. “Modelagem de Meios Não Homogêneos Através do Método dos Elementos de Contorno com Quase-Dupla Reciprocidade”. In: XXVI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 2003, São José do Rio Preto. 2003.

- 6 Brebbia, C.A., Telles, J.C.F. and Wrobel, L.C., , (1984), "Boundary Element Techniques Theory And Applications In Engineering", Sprinter-Verlag, New York.
- 7 Brebbia, C.A., Power, H., (1999), "Boundary Elements XXI", International Series on Advances in Boundary Elements, Volume 6, Witpress, Southampton, Boston.
- 8 Loeffler, C.F. & Mansur, W.J. "Quasi-Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Incompressible Flow: Application to the Diffusive-Advective Equation". International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 58, Issue 8, pag 1167-1186, John Wiley and Sons, 2003.
- 9 Massaro, C.A.M. & Loeffler, C.F.,2001, "Boundary Element Formulation Applied to Solution of Convective-Diffusive Heat Transfer Problems". Anais do XVI COBEM (em CD ROM), Uberlândia.
- 10 Nardini, D., Brebbia, C.A., (1982), "A New Approach to Free Vibration Analysis using Boundary Elements", Proceeding of the Fourth International Seminar, Boundary Element Methods in Engineering, Southampton.
- 11 Partridge, P.W. , Brebbia, C.A. and Wrobel, L.C., (1992) "The Dual Reciprocity, Boundary Element Method".